REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”

COMPRENSIÓN Y DIFICULTADES DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA. CASO: UPEL-MARACAY

Trabajo como requisito parcial para
optar al Grado de Magíster en Educación
Mención Enseñanza de la Matemática

Autor: Yerikson Suárez Huz
Tutor: Fredy E. González

Maracay, Enero de 2013

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”

COMPRENSIÓN Y DIFICULTADES DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA. CASO: UPEL-MARACAY

Autor: Yerikson Suárez Huz
Tutor: Fredy E. González

Maracay, Enero de 2013

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor del Trabajo presentado por el ciudadano Yerikson Suárez Huz, para optar al Grado de Magíster en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática, cuyo título es COMPRENSIÓN Y DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA; considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En la Ciudad de Maracay, a los 24 días del mes de Enero de 2013.

Fredy E.González
C.I. Nº. 643.333

DEDICATORIA

Todo el esfuerzo, dedicación, sacrificio y éxito que conlleva la elaboración de este trabajo se lo dedico a:

Mis padres:
Rafael E. Suárez Maitín. Felicitaciones, porque mis triunfos siempre serán los tuyos. Me diste todo y más. Eres mi orgullo, mi apoyo y mi motivo para seguir adelante.
Edgles J. Huz. Fuente de inspiración, de lucha y perseverancia; de estoicismo y firmeza ante la vida.

Mis hermanos, *Yermain* y *Yeferson;* a mi sobrino *Moisés Rafaél.* Apoyo y amor incondicional.

Toda mi familia, amigos, compañeros de trabajo; por sus constantes palabras de aliento, interés y apoyo.

Quienes me enseñan algo nuevo todos los días, mis estudiantes. La razón por la cual es necesario continuar mejorando profesionalmente

Su apoyo, comprensión y aliento constante fueron vitales para la concreción de esta meta

RECONOCIMIENTO

Vaya mi reconocimiento y agradecimiento infinito A

Dios por guiarme siempre; por colmarme de salud, por rodearme de la gente que ha puesto en mi camino; por escucharme y cuidarme; por darme la familia que tengo; los amigos que disfruto; y un trabajo gratificante. Jamás lo lograría sin ti

Mi madre y mi padre; por la crianza y el amor incondicional. Me ayudaron a cumplir mis sueños siempre. Mi agradecimiento infinito.

Mis hermanos; quienes saben lo que este logro significa para mí.

Mi sobrino, por llenarme de alegrías.

Todos y cada uno de los miembros de mi familia materna y paterna. Son los mejores por demostrarme una y otra vez que los éxitos de uno son los éxitos de todos; y que las dificultades de uno son las dificultades de todos.

Mi maestro, el Dr. Fredy González. Guía y mentor. Excelente ser humano; lleno de sabiduría y dispuesto siempre a compartirla con los demás.

Mis amigos; por hacerme la vida tan agradable. Son pocos, pero sin lugar a dudas son los mejores.

Los colegas y compañeros de trabajo del Departamento de Matemática de la UPEL-Maracay. Igualmente mis agradecimientos por su constante preocupación e interés en mi prosecución académica y profesional, en especial a la Profa. Fabiola Czwienczec y Profa. Belén Arrieche, a las Profesoras Martha Iglesias, Julia Sanoja y Zoraida Paredes. De manera particular quiero agradecer a Estiven Mendez, Dimaxi Díaz, Rolando García y Efraín Brizuela; por su aliento, apoyo y respaldo desinteresado.

Mis estudiantes; el motor que me mueve y me impulsa a cada vez ser un mejor profesional de la docencia.

Y todo lo que hagan, de palabra o de obra, háganlo en el nombre del Señor Jesús, dando gracias a Dios el Padre por medio de él. **Colosenses 3:17**

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”
Maestría en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática
Línea de Investigación en Educación Matemática (LIEM)

COMPRENSIÓN Y DIFICULTADES DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA.

Autor: Yerikson Suárez Huz
Tutor: Fredy E. González
Fecha: Enero 2013

RESUMEN

El propósito de este trabajo es identificar y analizar algunas dificultades y modos de razonamiento presentes en futuros docentes de Matemática, cuando deben resolver problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad, para ello se aplicó a un grupo de estudiantes para profesores de Matemática un cuestionario conformado por dos partes, una sección de 5 preguntas cerradas y una hoja de trabajo con 5 problemas abiertos a través del cual se analizan un conjunto de dificultades en torno al cálculo de Probabilidades bajo el enfoque clásico, relativas al espacio muestral, razonamiento combinatorio, comparación de Probabilidades y el sesgo de equiprobabilidad. Los sujetos de estudio lo conforman un grupo de 20 estudiantes de la carrera de educación en la especialidad de Matemática de la UPEL Maracay. Se trata de un estudio descriptivo-interpretativo; de campo apoyado en una indagación documental y en la modalidad de estudio de casos múltiple. En cuanto a los referentes teóricos se manejan las ideas estocásticas fundamentales de Heitele (1975), la idea de sesgo de equiprobabilidad Kahneman, Slovic y Tversky (1982) y la comparación de probabilidades (Cañizares, 1997). Los resultados señalan que la existen dificultades en la comprensión de las ideas fundamentales asociadas al enfoque clásico de probabilidad; por lo que esta concepción se puede considerar un tema complejo. En este sentido, hay una marcada presencia del sesgo de equiprobabilidad; al mismo tiempo se observó un considerable número de preguntas sin contestar o con respuestas muy superficiales; también se evidenció el poco y restringido uso de la Regla de Laplace, pero se evidencia un adecuado razonamiento proporcional a la hora de comparar probabilidades. Además, en cuanto a la comparación de grupos que recibieron formación en el área de Probabilidad con respecto a aquellos que no la recibieron; los resultados son muy parecidos; lo que conduce a pensar en un redimensionamiento en la formación en el campo de la enseñanza de la probabilidad de los futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay.

Descriptores: Enfoque clásico de la Probabilidad, dificultades, comprensión, ideas estocásticas fundamentales, sesgos.

INTRODUCCIÓN

La matemática se emplea, entre otras cosas, para modelar situaciones que acontecen en los más variados terrenos de la vida cotidiana; lo que le da un papel preponderante para la construcción de un ser integral, capaz de afrontar las más diversas situaciones y abordarlas de manera plausible. Sin embargo, al intentar modelar fenómenos propios de la naturaleza, o sociales, entre otros, el hombre ha podido comprobar que existen situaciones que obedecen a un modelo determinista y otras que en cambio obedecen a un modelo aleatorio Jiménez y Jiménez (2005) caracterizados por la presencia del azar, la incertidumbre.

Además, existen claras diferencias entre esta visión determinística y la azarosa o aleatoria (León, 2007); por lo que el razonamiento lógico deductivo característico del estudio del pensamiento matemático, como el pensamiento numérico y algebraico, geométrico, variacional, entre otros, no es suficientes para el estudio del pensamiento estocástico, el cual requiera de abordajes teóricos y metodológicos adicionales.

En particular, la sociedad contemporánea demanda de sus ciudadanos, capacidad y destreza en habilidades vinculadas precisamente relacionadas con el pensamiento estocástico, esto es, con el estudio de estas situaciones reales que involucran en mayor o menor medida condiciones de incertidumbre y aleatoriedad, con el propósito de mejorar, entre otras cosas, la facultad de tomar decisiones, que es una característica propia de los seres humanos. Basta con observar por ejemplo a los estudio de encuestas para analizar tendencias, análisis de situaciones de riesgos por parte de las compañías de seguro, diversas predicciones y estudios meteorológicos, comportamiento de poblaciones, control de calidad en empresas e industrias y en general actividades que involucren la toma de decisiones bajo condiciones de incerteza.

En consecuencia, la sociedad se ve inevitablemente comprometida al acondicionamiento y a la reestructuración de su sistema educativo, con la idea de cumplir con este compromiso de formar a sus conciudadanos de forma más adecuada a la realidad en la que están inmersos, ya que una vía para la capacitación y desarrollo de estas habilidades es a través del proceso de educación formal que se imparte en las diversas instituciones educativas y los variados niveles y modalidades, ya que en ideas de Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), "el reconocimiento de la incertidumbre, como una característica de la realidad, y aprender a manejarse con ella, son fundamentales en el desarrollo intelectual de los individuos del siglo XXI" (p. 85)

En este sentido, los asuntos vinculados con la incertidumbre, el azar y lo aleatorio, son tratados y abordados en los primeros niveles de educación, en las clases de Matemática, y es que actualmente existe la tendencia de incorporar en los currículos de matemáticas en los primeros niveles de educación formal, contenidos que coadyuven al desarrollo del razonamiento probabilístico. Sin embargo, autores como Kahneman, Tversky y Slovic, (1982); Batanero, (2006); Borovcnik, y Kapadia, (2010) señalan que las concepciones previas de los estudiantes, a veces se conforman como obstáculos para la comprensión de los conceptos asociados a la teoría de la Probabilidad, lo que dificulta el proceso de aprendizaje de estos temas.

Además, Heitele (1975) propone un conjunto de ideas que deben ser abordadas en las aulas de clase y que su aprendizaje es esencial para el correcto desarrollo del razonamiento estocástico. Algunas de estas ideas estocásticas fundamentales, así como ciertos sesgos, pueden ser asociados a una concepción especifica de la Probabilidad, como lo es la Clásica (Batanero, 2005), enfoque bajo el cual se introduce en general la enseñanza de la Probabilidad en los primeros niveles del sistema educativo venezolano (Salcedo, 2006a); y que también forma parte del contenido del curso de Probabilidad y Estadística Inferencial del plan de estudios para profesores especialistas en Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) en el Instituto Pedagógico de Maracay.

Precisamente, la presente investigación surge de la necesidad del autor en estudiar la problemática que como profesor de este curso ha venido observando con al bajo rendimiento por parte de los estudiantes para profesores de Matemática, y la complejidad que experimentan los estudiantes para futuros profesores, lo que dio motivo a indagar acerca de las dificultades que afrontan los mismos y los razonamiento empleados por ellos, debido a la necesidad de evidenciar algún conocimiento acerca de las ideas e intuiciones y desviaciones que muestran los estudiantes en su razonamiento al enfrentarse situaciones probabilísticas, específicamente en lo que respecta a su concepción clásica.

El conocimiento acerca de cuáles son las ideas previas de los futuros profesores de Matemática, así como las dificultades que confrontan cuando abordan situaciones que involucran el enfoque clásico de la Probabilidad, implica entre otras cosas la posibilidad de intervenir en el acto pedagógico de la enseñanza de estos temas en atención a esas dificultades; procurando una comprensión no sólo del contenido sino del aspecto didáctico del mismo; lo cual a su vez debería ser transferido a las aulas de clase donde se desenvuelvan profesionalmente como profesores de Matemática egresados de la UPEL Maracay.

El presente trabajo de investigación está estructurado en seis capítulos; los cuales se describen a continuación; El Capítulo I referido al problema de estudio, en el mismo se aborda la problemática de la enseñanza de la Probabilidad, y en particular bajo su concepción clásica, se incluyen en este capítulo el objetivo general del estudio y sus objetivos específicos, así como la justificación de este tipo de investigaciones desde diversos aspectos.

En el Capítulo II se plasman los resultados de una indagación documental que comprende por una parte la sustentación teórica del estudio del razonamiento probabilístico; en particular se aborda el constructo de ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975), la comparación de probabilidades (Cañizares, 1997) y la idea de sesgo de equiprobabilidad (Lacoutre citado en Borovcnik y Kapadia, 2010); y por otro lado contempla la revisión de estudios previos relacionados con la presente investigaciones para estudiar abordajes metodológicos, instrumentos empleados, hallazgos y cuestiones pendientes.

El Capítulo III sirve para describir la metodología que fue utilizada para desarrollar la investigación, y en el mismo se puntualizan aspectos relativos al tipo y diseño de la investigación, el escenario donde se llevó a cabo el estudio, los instrumentos aplicados, así como los sujetos de donde se recopiló la información de interés a través de los cuestionarios, y finalmente el procedimiento seguido para desarrollar la investigación, el cual fue estructurado en fases.

En el Capítulo IV se desglosan los resultados del análisis de la información recopilada a través de los sujetos de estudio y que fueron recopiladas por medio de los instrumentos construidos. En este sentido, se aborda el análisis desde 4 frentes en atención los siguientes criterios (a) análisis individual de cada ítem, (b) análisis de ítems agrupados por temática; (c) análisis de los grupos de sujetos que ya han aprobado un curso donde vieron temas de probabilidad y (d) razonamiento individual de cada uno de los sujetos participantes en la investigación.

En el Capítulo V se presentan las conclusiones a partir del análisis de la información recabada; y se plantean algunas cuestiones pendientes para futuras investigaciones, mientras que en el Capítulo VI se desglosan una serie de recomendaciones y sugerencias vinculadas a los hallazgos.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

En el presente capítulo se desarrollan aspectos relacionados con (a) la Educación Matemática y sus implicaciones en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática; (b) La Educación Estadística, su concepción, ámbito de estudio e interrelación con la Educación Matemática; (c) La probabilidad y su enseñanza, modos de abordaje, concepciones y dificultades; (d) Problematización; (e) Objetivos planteados y (f) justificación e importancia de la investigación desarrollada.

Planteamiento del Problema

La educación como medio, proceso y camino para la construcción de un hombre capaz de modificar y adaptar su entorno; y de potenciar a través de ella sus habilidades, destrezas, modos de comportamientos, sus actitudes y aptitudes, así como sus formas de razonamientos; ha sido de especial interés para la sociedad desde tiempos inmemoriales.

De manera particular; la Matemática ha sido una disciplina que de forma permanente y recurrente ha estado presente en la formación del ser humano desde su infancia hasta su madurez, además, debido a la importancia de esta disciplina en el desarrollo y progreso de la civilización, a lo largo del tiempo innumerables instituciones han asumido la responsabilidad de promover la enseñanza de la Matemática y a mejorar la calidad de la misma en atención a aspectos como (a) los procesos de aprendizaje; (b) los métodos de enseñanza, (c) la formación de aquellos en quienes recae la función docente; y (d) La naturaleza de los objetos matemáticos; entre otros.

Y es que a decir de Cantoral y Farfán (2003), del estudio sistemático de estos elementos y la influencias de los mismos en la modificación y adaptación de las prácticas escolares en torno a esta área de conocimientos; se encarga actualmente el campo disciplinar de la Educación Matemática (EM); idea apoyada por Castro (2007) quien en relación a la EM como disciplina científica con vida propia sostiene que esta

> … ha alcanzado un grado de madurez tal que le permite afirmarse con identidad propia en el concierto de las ciencias sociales; además, ha podido delimitar el espacio de los problemas que le son inherentemente propios; y, adicionalmente, ha logrado decantar los abordajes metodológicos pertinentes y adecuados para la indagación de dichos problemas, en una perspectiva que es pluriparadigmática (p. 521)

Si bien se desprende de las consideraciones hechas anteriormente que la EM se configura entonces como un ámbito transdisciplinario en el que convergen, entre otras, áreas tales como (a) Pedagogía; (b) Psicología; (c) Epistemología de la Matemática; (d) Didáctica General, y (e) la Matemática en sí misma; el foco de estudio fundamental de la misma lo constituyen los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemática.

Y es que la EM, como campo disciplinario, plantea entre sus fines fundamentales, la mejora de la calidad en la enseñanza de la Matemática, lo que lleva implícito la búsqueda de teorías y prácticas que expliquen cómo se aprende esta disciplina; todo esto sustentado desde una búsqueda científica de respuestas a interrogantes que surgen desde el quehacer propio de la enseñanza.

En sintonía con lo anterior, Rico (1999) señala que “la Educación Matemática se propone intervenir en la sociedad mediante la identificación, planteamiento, tratamiento y resolución de los problemas que surgen en el sistema educativo conectados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (p.2), de donde se desprende que la misma se constituye como un agente trasformador del individuo y de su entorno sobre todo entendiendo que la Matemática ha estado en permanente evolución y vinculada con el desarrollo científico y tecnológico, por lo que es pensada como un conducto para la comprensión del hombre y sus complejas y muy variadas relaciones y realidades (Castro, 2007).

El interés de los educadores acerca de la Matemática que se debe enseñar en las aulas de clase, y la manera de abordarla, esto es, la manera de enseñarla en función de los procesos que se activan en los estudiantes y que les permiten aprenderla, constituye un asunto crucial y, tal como lo refiere Castro (ob. cit.) "…ha representado el estímulo principal para la configuración y delimitación de la problemática de este campo de estudio y de los métodos adecuados para su conocimiento e intervención" (p. 522).

Ahora bien, no es fácil delimitar las problemáticas que deben ser abordadas e investigadas en el ámbito de la EM. Pero, si partimos de la premisa propuesta por González (2000) de que la investigación en esta disciplina científica procura resolver "los problemas asociados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en escenarios escolares" (p. 12) entonces, nos encontramos frente a la línea medular de la EM, conformada precisamente por el estudio profundo y sistemático de aspectos referidos a los modos de enseñar y aprender tópicos referidos a la Matemática.

De esta línea de acción propuesta, se genera la necesidad de identificar problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática vigentes en los actuales momentos en las diversas instituciones educativas; entre los que a decir del autor que llevó a cabo la presente investigación; es posible mencionar como ejemplo a la escasa vinculación de la Matemática escolar con la realidad y el contexto propio del individuo; lo cual a su vez, ocasiona la poca utilización de la Matemática en espacios pertenecientes a otras disciplinas y áreas de conocimientos.

Pero también deben ser objeto de estudio, de reflexión e indagación; otros problemas relevante tales como (a) el aprendizaje memorístico y procedimental de la Matemática; (b) la falta de motivación por parte de los docentes, de algunos de los contenidos matemáticos escolares a impartir; (c) la necesidad de estrategias didácticas adecuadas para la enseñanza de la Matemática; (d) el parcelamiento y desligue entre las distintas ramas de la Matemática; y (e) la omisión; quizás por falta de tiempo, ubicación de los contenidos en los programas o desconocimiento del tema o del abordaje didáctico del mismo; de la enseñanza de algunos tópicos y/o temas matemáticos por parte de quienes tienen asignada la responsabilidad de impartirlos, lo que posiblemente se traducirá en una situación de desconocimiento y/o escasa formación por parte del estudiante en tales contenidos.

Precisamente unos contendidos que de forma usual son impartidos en las clases de Matemática en lo que se conoce comúnmente como Educación Básica – y que abarca a individuos desde los 6 hasta los 17 años de edad aproximadamente, en sus distintos niveles, y que han sido objetos de estas reflexiones por parte de un conjunto de profesionales de diversas naturalezas, son los temas vinculados a la Estadística y la Probabilidad; por lo que este creciente interés por mejorar la calidad de la enseñanza de estos temas ha devenido en la emergencia, concreción y consolidación de un nuevo campo de estudio reconocido como Educación Estadística (EE).

El origen de un nuevo campo disciplinar, nuevo pero no ajeno a la Educación Matemática, radica en la diferencia entre el razonamiento de tipo Matemático y el razonamiento probabilístico (Landín y Sánches, 2010), ya que por ejemplo, en la enseñanza de la Probabilidad se manejan conceptos que se apartan de las situaciones deterministas usualmente abordadas en Matemáticas, por lo que se requiere de un tipo de razonamiento distinto para comprender este tipo de fenómenos vinculados a lo aleatorio.

El interés por el estudio de estos tópicos ha sido reseñado a lo largo de mucho tiempo; por ejemplo, Garfield y Ahlgren (1988) ya hablaban de una importante y acelerada tendencia a incorporar tópicos asociados a la Estadística y la Probabilidad en los diversos currículos desde educación inicial hasta la educación secundaria y a casi dos décadas, tanto Ortíz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006), como; Azcárate (2007) señalan que los conceptos vinculados a la Estadística y la Probabilidad ocupan cada vez más un papel preponderante en los planes de estudio de los diferentes niveles educativos en muchos países.

A la idea anterior se suman Barragués, Guisasola y Morais (2005) quienes hablan de una reinvención y reincorporación de la enseñanza hacia estos temas, a pesar de que, tal y como indica Batanero y Díaz (2007) la enseñanza de estos temas en los currículos no universitarios está presente desde hace más de dos décadas.

Se puede apreciar entonces que el gran esfuerzo emprendido por numerosos expertos de las más variadas áreas del saber con el propósito de fomentar, mejorar y facilitar la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad, ha sobrevenido en la aparición de un campo disciplinario que tal y como lo señala Batanero (2001a) tiene entre sus cuestiones prioritarias (a) el estudio de los mecanismos de evaluación de los contenidos estocásticos; (b) el diseño, puesta en práctica y evaluación de recursos didácticos apropiados; (c) la identificación y caracterización de concepciones iniciales, creencias, actitudes y errores de los estudiantes y (d) la formación de profesores.

De tal manera que, en la actualidad, la estocástica, término utilizado para referirse de manera conjunta a la Estadística, la Probabilidad y la Teoría Combinatoria (Garfield y Ahlgren, 1988; Salcedo, 2006b), se ha integrado de forma generalizada al currículo de matemáticas desde los niveles de enseñanza básica, pasando por niveles de educación media y por las diversas carreras universitarias que requieran de conocimientos sólidos dentro del campo de la Estadística, la cual, tal y como lo refiere Rodríguez (2004), se encuentra en una etapa de considerable crecimiento, lo que la ha posicionado como una disciplina propia dentro del mundo de la ciencia.

Precisamente este auge vertiginoso de la Estadística en la sociedad actual ha ocasionado un incremento en su uso por parte de las personas (Batanero, Ortíz, Sererano y Cañizares, 2001); lo que a su vez incide sobre la necesidad de ofrecer un adecuado adiestramiento de todos aquellos quienes recurren a la misma; y por otra parte, también se hace necesario mejorar la formación de talento humano sobre el cual se delega el deber de formar a los ciudadanos dentro del contexto de la Estadística; labor que en general es encomendada a los docentes de matemáticas sobre todo en lo que respecta a los niveles de Educación Básica y Media. Se deduce entonces la presencia de un hilo conductor entre la EE y la EM; el de la formación docente, puesto que los tópicos estocásticos son impartidos en muchos casos por docentes del área de Matemática.

Sin embargo, Núñez, Sanabria y García (2004) indican a pesar de los grandes esfuerzos hechos, todavía no existe una cultura de lo estocástico, lo aleatorio; de la estadística; la cual indiscutiblemente es necesaria en la sociedad actual. Y es que para Batanero (2001a), aunque se han incorporado en los currículos de los distintos niveles educativos los temas de Probabilidad y Estadística; los profesores acostumbran posponer estos temas para el final del período escolar y; con frecuencia los omiten o asignan la realización de trabajos que no son adecuados. Así que como consecuencia de esto, los estudiantes que ingresan a las instituciones universitarias y que estudian carreras que requieren de un adecuado dominio de tales contenidos, carecen de los conocimientos básicos necesarios; lo que a su vez dificulta la asimilación de otros temas; por lo que pareciese entonces que los docentes de Matemática de los niveles educativos básicos y medios confrontan ciertas dificultades que no permiten culminar con éxito el proceso de aprendizaje de los estudiantes en contenidos propios de la estocástica impartidos en las clases de Matemática.

Precisamente, uno de estos temas propios de la estocástica y que deben ser estudiados en las clases de Matemática, es el vinculado a las diversas concepciones de la Probabilidad. Para Borovcnik y Kapadia (2010), la probabilidad se concibe como un instrumento para la modelación de una gran variedad de situaciones reales. Y es que la misma aparece en una amplia gama de situaciones científicas, tecnológicas y sociales en donde intervienen el azar, la aleatoriedad y la incertidumbre. Esto coincide con lo expuesto por León (2007) quien afirma que "la Probabilidad cada día cobra más importancia debido a el reconocimiento de la presencia de la incertidumbre en las acciones del hombre y la naturaleza" (p.179)

En relación a este reconocimiento de la incertidumbre y el azar en la realidad, Fischbein (1975) expresa que es necesario cambiar la visión exclusivamente determinista de nuestro contexto; regida por el razonamiento lógico donde una proposición es verdadera o falsa; incorporando en las aulas de clase la presentación y el análisis de situaciones y fenómenos de la vida cotidiana donde prevalece la aleatoriedad, el azar, la no certeza, el riesgo y la incertidumbre

Sin embargo diversos estudios revelan la complejidad del aprendizaje aspectos inherentes al concepto de probabilidad en los diversos niveles educativos. Por ejemplo, Sánchez y Hernández (2000) indican que existe un consenso entre profesores e investigadores respecto al hecho de que los temas vinculados con la Probabilidad constituyen un área difícil de enseñar y aprender. También Azcárate (2007) señala que la Probabilidad "es un concepto de difícil comprensión, pues, en general, entra en clara contradicción con el pensamiento determinista y causal dominante en nuestra educación" (p.48). Una razón que justifique esta visión, aparentemente complicada y compleja, En relación a la asimilación y comprensión de este concepto es que la inserción de la probabilidad en el contexto educativo pretende desplegar en los estudiantes una forma de razonamiento diferente al lógico-deductivo y causal-determinista.

En relación a este modo de razonamiento distinto que se desdobla a la hora de trabajar con temas asociados a la Teoría de la Probabilidad; Ortíz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2009) señalan que el concepto de Probabilidad está inmerso en una trayectoria de pensamiento substancialmente diferente del razonamiento determinista característico y propio de las clases de Matemática, y que a decir de Nuñez, Sanabria y García (2004), en vez de incorporar, emplear y reflexionar acerca de este tipo de razonamientos en el aula de clase; se le evade como si se tratase de un modo de pensar extraño y que deja de lado la condición rigurosa de la Matemática.

Sin embargo, tal y como fuese reseñado anteriormente, producto de la vigencia y pertinencia de los conocimientos propios de la Estocástica en la sociedad contemporánea, entre los que destacan los de Probabilidad, se ha dado un gran movimiento curricular en torno a la incorporación de temas vinculados alrededor de dicho concepto. Esto debido a las exigencias de introducir de manera temprana, el estudio de contenidos vinculados con la aleatoriedad, el azar y la probabilidad (Cañizares y Batanero, 2005).

Entre algunas razones que justificarían este movimiento curricular alrededor de los mencionados temas, cabe mencionar la proporcionada por Batanero (2006), quien señala que la teoría de la Probabilidad es la base que sustenta una gran gama de disciplinas científicas, como por ejemplo, algunas ramas de la investigación de operaciones, la teoría de decisiones, las ciencias sociales, la Biología; también Azcárate (2007) justifica esta tendencia a incluir la enseñanza de temas de probabilidad al señalar que debido a las características de la sociedad actual; en la cual prevalece un alto volumen de información y situaciones que involucran de alguna manera un componente de incertidumbre; se requiere de individuos preparados para afrontar, comprender e interpretar tales realidades.

Adicionalmente, se espera que un dominio adecuado de los conceptos asociados a la teoría de probabilidad, proporcionarían a los individuos métodos más concretos para la toma de decisiones. Así mismo, para Godino, Batanero y Cañizares (1996), la probabilidad concede una excelente oportunidad para que los estudiantes modelen y matematicen situaciones reales y ofrezcan soluciones a problemas concretos basándose en criterios argumentativos sustentados en la incertidumbre, el azar y lo aleatorio de variados escenarios concretos.

Las razones esgrimidas en los últimos párrafos, sugieren, entre otros aspectos, la necesidad de abordar la formación en el ámbito de la Probabilidad pues a través de ellas se suministran herramientas adecuadas para el manejo de situaciones reales donde prevalece lo aleatorio, el azar y la incertidumbre. En este sentido, Barragués, Guisasola y Morais (2006) indican que la temas propios de la Probabilidad "contribuyen a aportar una imagen mucho más equilibrada de la ciencia, que tradicionalmente ha presentado ante el alumno un carácter marcadamente determinista, donde todo era explicable en términos de causas y efectos" (p. 56).

Más contundente es León (2007) cuando se refiere a esta dualidad entre determinismo y aleatoriedad y afirma que

> Durante mucho tiempo predominó una visión netamente determinista del mundo según la cual el universo se comportaba como una máquina cuyos engranajes calzaban a la perfección, lo que llevaba a negar la posibilidad a fenómenos fortuitos al considerar el azar como una manifestación de ignorancia. Poincaré cuestionó esta argumentación y diferenció los fenómenos fortuitos, de los cuales la probabilidad informa sobre las posibilidades de ocurrencia y los no fortuitos, de los que no puede decirse nada hasta tanto no se lleguen a conocer las leyes que los gobiernan (p. 19)

De tal manera que estos cuestionamientos conducen hoy en día a admitir al azar y a lo aleatorio como una cualidad característica de una gran variedad de fenómenos que ocurren en la realidad circundante; y que en consecuencia se hace necesario brindar a los estudiantes una visión más equilibrada de la realidad, en virtud de que no todos los fenómenos que suceden se basan en reglas deterministas como las leyes de la Física; y que deben ser abordados desde un razonamiento no determinista, el cual es provisto precisamente gracias al desarrollo de las ideas circunscritas en la Teoría de Probabilidad.

Sin embargo, y pesar del creciente interés por parte de las autoridades en materia de políticas educativas, de incorporar a los currículos oficiales estos tópicos relacionados con la Probabilidad, Azcárate (2007) refiere que esto no es de ninguna manera un indicativo de que tales contenidos sean impartidos en los salones de clase; y que de de hecho estos temas siguen siendo omitidos o poco estudiados por los estudiantes dentro de las instituciones educativas.

Entre algunas razones que justifican este comportamiento de la no inserción de temas vinculados a la Probabilidad en las aulas de clase son, destacan el hecho de que la probabilidad tiene una naturaleza que va contraria a la intuición de las personas (Guzmán e Insuza, 2011); otra posible razón tiene que ver con la inadecuada formación de aquellos sobre quienes recae la responsabilidad de enseñar temas de probabilidad; idea apoyada también por Azcárate (2007), quien indica que una de las posibles causas por las cuales no se enseñanza temas relacionados a la Probabilidad, a pesar de su importación y reconocimiento oficial en los pensum de estudios desde los primeros niveles de escolaridad; es el hecho de que no se le ha puesto la atención requerida al perfeccionamiento de los profesionales comprometidos con su enseñanza en las aulas de clase.

También conviene señalar a Rodríguez (2004) quien refiere que “aún hoy día prosiguen las controversias filosóficas sobre la interpretación y aplicación de conceptos tan básicos como los de probabilidad, aleatoriedad, independencia o contraste de hipótesis, mientras que estas controversias no existen en álgebra o geometría” (p. 13).

Ahora bien, como un ejemplo particular vinculado al dominio de contenidos vinculados con temas de estocásticas, vale citar el caso de Venezuela donde, según Salcedo (2006a) los contenidos de Probabilidad están presentes en el curriculum oficial de educación primaria desde el año 1985 y en educación secundaria desde 1972, lo que coincide con la idea sostenida por de Batanero, Ortíz, Serrano y Cañizares (2001); quienes señalan que al día de hoy la Probabilidad se ha integrado de forma generalizada al currículo de matemáticas desde los niveles de enseñanza básica, pasando por niveles de educación media y por las diversas carreras universitarias que requieran de conocimientos sólidos dentro del campo de la estocástica; entre otras razones debido a su carácter instrumental y de apoyo para otras disciplinas y al avance vertiginoso de la información y el acceso a la misma.

Al respecto del caso venezolano en particular, Salcedo (2006a) señala que existen problemas alrededor de la enseñanza de los temas asociados con la Estadística y con la Probabilidad en las escuelas, y considera la escasez de tiempo como la razón por la cual los profesores no abordan estos temas del el currículo escolar. Por otra parte, Salcedo (2006b) indica que los resultados arrojados por el Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (SINEA) y reflejados en un reporte publicado en 1998, revelan que no existe dominio de las nociones elementales de Probabilidad y Estadística en la Educación Básica, debido al hecho de que menos del 30% de los alumnos respondieron correctamente a las preguntas relacionadas con esos tópicos.

Otro indicador considerado por Salcedo (Ob. Cit.), está vinculado con los resultados de la Prueba de Aptitud Académica (PAA) que se venía aplicando en Venezuela hasta el año 2007, y en este aspecto ahonda considerando que "Los resultados de 2006, en los 4 modelos aplicados a recién egresados de EMDP, indican que el porcentaje de respuestas correctas en tópicos de Probabilidad y Estadística oscila entre el 8,6% y 31,8%." (p. 79)

La evidencia empírica de la cual se dispone, sirve de base entonces para conjeturar que los profesores de Matemática que deberían enseñar el tema de Probabilidad - en Venezuela - parecen no estarlo haciendo; o si lo están haciendo, pues al parecer no se está realizando de manera efectiva, y quizás esto pueda deberse al modo de formación y preparación profesional que reciben para llevar a cabo el acto pedagógico de estos temas.

En opinión de quien lleva a cabo la presente investigación, y basado en la experiencia profesional del mismo en la formación inicial de docentes de Matemática en el Instituto Pedagógico de Maracay "Rafael Alberto Escobar Lara" y que forma parte de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), los mismos parecen carecer de las nociones básica y sólidas vinculadas a contenidos propios de la Teoría de Probabilidad; y en consecuencia no son capaces de emplear de manera correcta el razonamiento probabilístico en la resolución de problemas donde priva la incertidumbre; aún y cuando estas ideas, conceptos y modos de razonamiento debieron ser adquiridos a lo largo de su formación como escolar preuniversitaria.

Se presume que esto ocurre debido, entre otras razones, al hecho de que raramente se incluyen estos tópicos en las aulas de clases en las escuelas y liceos, es decir, producto del poco énfasis en el estudio de las nociones de Probabilidad y Estadística, a pesar de formar parte de de los programas de estudio vigentes. Pero es que definitivamente poco se podría avanzar en torno a la enseñanza de la Probabilidad en los primeros niveles educativos, si solamente se hace una incorporación de los temas de Probabilidad en el curriculum y en los planes de estudio oficiales; si no se considera que esta acción debe ir apoyada y debe sostenerse sobre la formación adecuada de docentes en torno a estos temas, tanto desde el punto de vista formal; como desde el punto de vista didáctico.

Se requiere entonces de profesionales- que en general son los profesores de Matemáticas, pero que no se limita a ellos solamente-con formación matemática sólida en torno a la teoría de la Probabilidad; así como en todo lo vinculado al estudio, comprensión, abordaje didáctico y manejo pedagógico asociado al razonamiento estocástico; en atención a sus errores, dificultades, obstáculos, sesgos, heurísticas, etc. En este sentido, para Urrea (2005)

> Incidir en el aprendizaje de la probabilidad y de ideas básicas relacionadas, desde nuestro punto de vista, implica conocer la forma en que evolucionan los estudiantes en este campo de conocimiento. La

> existencia de una composición de intuiciones y desviaciones que muestran los estudiantes al enfrentar situaciones probabilísticas, plantea enfáticamente la necesidad de contar con un conocimiento de las características con que se presentan (p. 207)

En concordancia con lo anteriormente expresado es necesario entonces contar con un docente capaz de reconocer y hacer reconocer en los demás, las importancia y amplia presencia de la el azar y la incertidumbre en muchos fenómenos; y que para su abordaje se requiere de un modo de pensar distinto y cuyo eje principal lo constituye precisamente la Probabilidad. Ideas apoyadas por Ortíz, Mohamend y Contreras (2011); quienes señalan que para que se produzca un cambio favorable hacia la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad, es necesario mejorar la calidad de la preparación de los docentes encargados de impartirla en las aulas de clase. De otro modo; sin un proceso de formación dentro de este ámbito en particular, los docentes en ejercicio y/o en formación podrían transmitir a sus estudiantes sus propias creencias y concepciones, en muchos casos, erróneas (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006)

También Batanero, Godino y Roa (2004) sugieren la necesidad de incorporar, en la formación de aquel que esté encargado de impartir la enseñanza de temas relativos a la Estadística en general y de manera particular a la Probabilidad, un conjunto de elementos entre los que destacan (a) la revisión epistemológica y evolutiva asociada al significado de los conceptos probabilísticos, (b) desarrollo de capacidad crítica a la hora de utilizar materiales instruccionales y de proponer estrategias metodológicas adecuadas, (c) reconocimiento de errores, dificultades, obstáculos y concepciones erróneas en el razonamiento probabilístico.

Por lo tanto para mejorar la formación de los profesores en torno a la enseñanza de la probabilidad; es necesario, entre otras cosas, que se cuente con una comprensión lo más clara posible, acerca de cómo los docentes y futuros docentes abordan y resuelven problemas asociados al concepto de Probabilidad.

En particular Ortíz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2008); señalan que es primordial reconocer los conocimientos y modos de razonar de los futuros los profesores en torno al concepto de Probabilidad; pues esto permitiría implementar un proceso de formación más adecuada para los futuros docentes; no solo desde el punto de vista matemático-formal sino también desde el punto de vista didáctico.

De manera particular, en los planes de estudio del subsistema educativo dedicado a la Educación Básica- y que comprende los niveles de educación inicial, primaria y media- en Venezuela el desarrollo de temáticas relacionadas con la Probabilidad forman parte de la asignatura Matemática. Y se infiere que en la mayoría de los países sucede lo mismo. De allí que se promueva la investigación de la formación en el contexto probabilístico de los docentes de Matemática en formación en Venezuela.

En Venezuela, la UPEL tiene la misión de preparar y capacitar a los docentes que demanda el sistema educativo venezolano en sus distintos niveles y modalidades (UPEL, 1999); es en esta institución junto con las facultades de educación de otras universidades, donde se forman los profesores que enseñan Matemáticas en las escuelas y liceos; por ende se espera que los planes de estudio permitan examinar con exhaustividad los contenidos matemáticos que dichos profesores deberán impartir a los alumnos de las aulas que les corresponda regentar; así que, entre dichos contenidos deberían estar incluidos los que corresponden al estudio de la Probabilidad ya que como se mencionó con anterioridad, estos tópicos forman parte de los programas de estudio vigentes en primaria y secundaria.

Con relación a la manera en cómo se enseña la teoría de la Probabilidad en la universidades, no solamente venezolanas sino como currículo establecido en muchos centros de educación superior, conviene resaltar las ideas de Sáenz de Castro (1998) quien devela que

> La enseñanza tradicional de la teoría de probabilidades es lineal en el desarrollo del currículo. El contenido de la disciplina se despliega siguiendo la estructura lógica de la matemática: a partir de los axiomas de Kolmogorov se deducen los diversos teoremas y se realizan ejercicios de aplicación para apuntalar los nuevos conocimientos. No hay conciencia de la naturaleza del razonamiento y por tanto no se consideran distintos enfoques probabilísticos de un mismo problema… Tampoco hay conciencia de diferencias individuales en la comprensión probabilística y todos los alumnos se someten al régimen de enseñanza (p. 52)

Y es que precisamente una de las cuestiones vinculadas a la dificultad en la comprensión de la Probabilidad está vinculadas a esas diferencias individuales, y a las diversas concepciones bajo las cuales se concibe se conceptualiza la misma, y es que para Guzmán e Insuza (2011), así como Borovcnik y Kapadia (2010); la enseñanza de la Probabilidad debe considerar los diversos enfoques o concepciones de la misma, esto como una manera de favorecer a los estudiantes con una comprensión integral del concepto, sus aplicaciones, limitaciones en su uso e interpretaciones.

En relación a las múltiples concepciones que admite el concepto de probabilidad, Azcárate (2007) refiere que

> La comprensión integral de la noción de probabilidad necesita de la interacción de las diferentes posibles interpretaciones, aspectos que habrán de ser tenidos en cuenta a la hora de su tratamiento en el aula, siempre que el objetivo sea facilitar el desarrollo de un pensamiento probabilístico idóneo (p.9)

En definitiva, el significado polifacético del concepto Probabilidad constituye un elemento de primordial importancia en la enseñanza de la misma en las aulas de clase. Así, Batanero (2005) refiere que la enseñanza de tal concepto no puede limitarse a una sola visión o enfoque; puesto que de hecho tales perspectivas están vinculadas entre sí. Sin embargo, Según Guzmán e Insuza (2011), muchos profesores tienen preferencia por el enfoque clásico de la Probabilidad.

En relación a esta preferencia, Batanero (2005) apunta hacia el hecho de que el enfoque clásico ha prevalecido en la enseñanza sobre todo en los primeros niveles de educación básica; con un énfasis en el uso de la teoría combinatoria; a pesar de lo complejo que puede llegar a ser su uso; por lo que puede considerarse como que el enfoque clásico es muy complicado. De igual manera Salcedo (2006a) indica en el caso de Venezuela, que esta concepción de la probabilidad es la cuenta con mayor presencia en el curriculum escolar desde los primeros años del mismo.

Pareciese entonces que el abordaje clásico de la probabilidad es apropiado cuando se hacen referencias a situaciones propias de los juegos de azar; donde la equiprobabilidad es una hipótesis plausible. Adicionalmente Núñez, Sanabria y García (2004) mencionan que “los juegos de azar forman parte de nuestro acervo cultural" (p. 4), por lo que parecería admisible la incorporación del tema de probabilidad clásica desde los primeros niveles educativos y hasta niveles universitarios, apoyados en el uso de tales actividades lúdicas. Basta tan sólo con detenerse a pensar en la cantidad de juegos de loterías que abunda, las salas de Bingo, juegos de cartas, las máquinas de apuestas, las apuestas de caballos; a los juegos deportivos, etc.

De hecho, Salcedo (2006b) refiere que "Una recomendación que aparece con frecuencia en las investigaciones para mejorar la comprensión de la probabilidad es dedicar más tiempo a la utilización de dispositivos como dados, monedas, ruletas, etc. que permitan a los estudiantes realizar experimentaciones." (p.83)

Sin embargo, Garfield y Ahlgren (1988) ya señalaban que entre las razones por las cuales los estudiantes, de cualquier nivel educativo, presentan dificultades en torno a la comprensión de temas que están relacionados al enfoque clásico de probabilidad; entre las que destacan (a) dificultades vinculadas a las fracciones y al razonamiento proporcional; (b) las distintas interpretaciones de la Probabilidad; (c) dificultades en la traducción verbal de los datos; y (d) el hecho de que las concepciones y creencias de los estudiantes, acerca de la probabilidad, entran en conflicto con la normativa teórica de la disciplina.

En relación a este último aspecto, aquellos que tienen la responsabilidad de la enseñanza de la Probabilidad en las aulas de clase en los diversos niveles y modalidades educativas, no puede considerar a los estudiantes como recipientes vacíos o páginas en blancos que se van cargando de la información que se les transmite. Saenz de Castro (1999) sostiene que los estudiantes tienen sus propias heurísticas, sesgos, creencias y concepciones acerca de la Probabilidad; y señala la importancia de conocerlos; se supone que con fines de desarrollar acciones pedagógicas adecuadas para la enseñanza de estos tópicos. Al respecto Urrea (2005) indica que

> Hay indicios de que la comprensión del concepto de probabilidad y de las ideas básicas, relacionadas con ésta, enfrentan la interferencia de varias dificultades para que los estudiantes puedan llevar a cabo un

razonamiento acorde a lo establecido por la disciplina, estas dificultades se manifiestan en los estudiantes por medio de diferentes sesgos (p. 208)

Lo anterior conduce al interés particular de aquellos aspectos cognitivos y que están relacionados con la comprensión de temas propios de la Probabilidad, tal y como lo es en efecto la concepción clásica de esta. En este sentido por ejemplo, Kahneman , Tversky y Slovic (1982) refieren que las personas a la hora de expresar juicios probabilísticos emplean ciertas maniobras denominadas heurísticas, las cuales no son más que estrategias de pensamiento que utilizan las personas para tomar decisiones bajo condiciones de incertidumbre y si bien en algunos casos se comportan como mecanismos útiles, en otros casos crean sesgos, esto es, concepciones erróneas vinculadas al razonamiento probabilístico.

Y es que precisamente uno de los sesgos más vinculados al enfoque clásico de probabilidad es el sesgo de equiprobabilidad (Lacoutre, citado por Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares, 1998; Barragues y Guisasola, 2006) y que está referido a la presuposición sin ningún tipo de justificación de que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio tienen la cualidad de ser equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad de ocurrir; aún y cuando esto no es necesariamente cierto o cuando no existen razones para presumir de tal hipótesis.

Otro elemento teórico relacionado con el enfoque clásico de la Probabilidad, lo constituye el de las ideas estocásticas fundamentales identificadas por Heitele (1975); y que constituyen una serie de conceptos sobre los cuales se sustenta todo el cálculo probabilístico (Batanero, 2004). Heitele (Ob. Cit.) propone la enseñanza en edad escolar de las siguientes ideas o conceptos: (a) La probabilidad como normalización de nuestras creencias; (b) El espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades; (c) Regla de adición de probabilidades; (d) Independencia y regla del producto; (e) Equiprobabilidad y simetría; (f) Combinatoria; (g) Modelos de urnas y simulación; (h) La variable aleatoria; (i) Las leyes de los grandes números y finalmente; (j) Muestreo.

Las ideas destacadas por este autor son decisivas en el proceso de instrucción ya que pueden servir de guía para la enseñanza del tema desde la educación primarias hasta la universitaria; y pueden ser desarrolladas en diversos niveles cognitivos, lingüísticos y operatorios, además están implícitas en el currículo de la escuela hasta el nivel universitario, en diversos grados de formalización.

En el caso particular del enfoque clásico de Probabilidad, las ideas de espacio muestral y de combinatoria, así como la de equiprobabilidad y simetría constituyen nociones básicas y fundamentales para su correcta interpretación.

Así mismo, otro aspecto vinculado al enfoque clásico de Probabilidad es la influencia del razonamiento proporcional a la hora de hacer comparación de probabilidades (Ortíz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006), en este sentido, debido a que un problema de comparación de probabilidades-en particular bajo la configuración del enfoque clásico- involucra necesariamente la comparación de dos fracciones; se requiere en consecuencia de una adecuado nivel de razonamiento proporcional. La importancia de la comparación de probabilidades estriba en el hecho de poder tomar decisiones mediante el contraste de resultados obtenidos a través del cálculo de las probabilidades.

Además, autores como Cañizares (1997) también alegan que la probabilidad se compone de dos nociones esenciales; el azar y la proporción, y que es necesario tener consciencia de la naturaleza incierta de la situación para poder emplear los cálculos de proporciones de manera adecuada en el estudio de probabilidades, ya que la capacidad de calcular proporciones, en sí misma, no implica necesariamente la comprensión de la probabilidad debido a que se precisa tomar en consideración la imposibilidad de controlar o predecir los resultados.

Todos estos aspectos relacionados con el razonamiento probabilístico han sido abordados y estudiados principalmente en niños y adolescentes; sin embargo, y opinión de quien llevó a cabo la presente investigación, son poco los estudios en donde se han considerado a los futuros docentes o incluso a los docentes en servicio.

En el caso particular de Venezuela, este tipo de investigaciones son escasas, y en la UPEL Maracay es prácticamente nula; a pesar de que en mencionada institución se forman profesores en la especialidad de Matemática y se incluye en su pensum de estudios un curso de Probabilidad y Estadística Inferencial, a pesar de que pareciese que el conocimiento de las concepciones y formas de razonamiento que poseen los individuos, y en particular los estudiantes para profesores de Matemática, es un punto clave para asegurar el éxito de las propuestas curriculares realmente efectivas en torno a la enseñanza escolar de la Probabilidad. Adicionalmente, durante el período académico 2010-2 fue de 60%, mientras que durante los períodos académicos 2011-1 y 2011-2 el porcentaje de reprobados según consta en actas oficiales del Departamento de Matemáticas fue de 43%, mientras que en el 2012-1 fue de 35%; lo que habla entonces de un considerable número de aplazados dentro de esta asignatura.

Pareciese necesario entonces, examinar e indagar de manera profunda y sistemática acerca del razonamiento probabilístico de los futuros docentes de Matemática, específicamente de la UPEL Maracay, en relación con aspectos vinculados al enfoque clásico de la Probabilidad, por considerarse este uno de los contenidos a impartir en los salones de clases de Matemática en las instituciones educativas venezolanas en los primeros niveles de escolaridad.

En concordancia con lo expuesto en las páginas precedentes, surgen los siguientes cuestionamientos:

Interrogantes

¿Cómo se evidencia la presencia del sesgo de equiprobabilidad en el razonamiento que hacen los futuros docentes de Matemáticas de la UPEL Maracay, cuando resuelven problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad?

¿Qué dominio tienen los futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay en relación con las ideas estocásticas fundamentales vinculadas con el cálculo de probabilidad bajo el enfoque clásico?

¿Cuáles son las características de las dificultades de los futuros docentes de Matemática al resolver situaciones de comparación de probabilidades, donde está involucrado el enfoque clásico de Probabilidad?

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Analizar el razonamiento probabilístico presente en estudiantes para profesores de Matemática de la UPEL Maracay, cuando resuelven problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad, en cuanto a las ideas estocásticas fundamentales, criterios de comparación de probabilidades y la presencia del sesgo de equiprobabilidad.

Objetivos Específicos

1. Identificar la presencia del sesgo de equiprobabilidad en el razonamiento que hacen los futuros docentes de Matemáticas de la UPEL Maracay, cuando resuelven problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad.
2. Determinar el dominio tienen los futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay en relación a las ideas estocásticas fundamentales vinculadas al cálculo de probabilidad bajo el enfoque clásico.
3. Describir las características de las dificultades de los futuros docentes de Matemática al resolver situaciones de comparación de probabilidades, donde está involucrado el enfoque clásico de Probabilidad.

Justificación de la Investigación.

La inclusión de los temas de Probabilidad y en particular, el estudio de las diversas concepciones o enfoques de la mismas en el sistema educativo venezolano promueve una visión más integral de la realidad donde se desenvuelven el individuo; debido a que permite afrontar situaciones enmarcadas dentro de la aleatoriedad y la incertidumbre; amén de permitirle mejorar su capacidad de toma de decisiones basado en el razonamiento probabilístico.

Al respecto, Batanero (2006) sostiene que la importancia de un razonamiento correcto sobre el azar y la incertidumbre radica en que estos últimos son inherentes a la cotidianidad del ser humano puesto que se manifiesta en multiplicidad de situaciones concretas; pero muy a pesar de esto; las intuiciones, creencias y concepciones sobre la probabilidad tienden a conducir con frecuencia a razonamientos incorrectos.

De la trascendencia de la Probabilidad para la sociedad y de las conclusiones, con frecuencia erróneas, a las que llegan los individuos cuando abordan situaciones donde es necesario el razonamiento probabilístico; se deduce la importancia de que el personal que labora los centros de formación docente como la UPEL Maracay, identifiquen las dificultades vinculadas al razonamiento probabilístico entre los futuros docentes que allí se capacitan. En consecuencia, esto permitiría a los formadores de estos futuros profesionales de la educación en Matemática, reconocer e incorporar aspectos dentro su proceso formativo que les permitan lograr sólidos conocimientos, teóricos y prácticos, sobre la enseñanza de la Estocástica, de manera que dominen y aprendan de manera eficaz Probabilidad y su enseñanza, y sean capaces de producir este mismo tipo de planteamientos pedagógicos en sus propias aulas de clase.

Rodríguez (2004), así como Batanero (2001b); señalan que a pesar del importante desarrollo que en los últimos años ha tenido la Estadística, el número de investigaciones sobre la didáctica de la estadística es aún muy escaso. Así mismo, Garfield y Ahlgren (1988) indican que son escasas las investigaciones acerca de cómo los estudiantes comprenden los conceptos asociados a la estocástica; pero al mismo tiempo las investigaciones hechas reportan que la mayoría de los sujetos confrontan serias dificultades a la hora de aprender los temas relacionados con la Estadística y la Probabilidad.

Para Batanero (2001b), todavía la proporción de investigaciones en el campo de la EE en comparación con los de las diversas ramas de la Matemática, todavía es muy pequeña; lo que de alguna manera dificulta conocer los avances, aportes, cuestiones prioritarias que ha aportado la EE a la enseñanza de estos temas en el aula de clase. Adicionalmente, se han realizado pocos estudios respecto del modo de entender el azar y la probabilidad en las universidades venezolanas, idea apoyada por Salcedo (2006a) quien afirma que "En nuestro país son pocas las investigaciones que se encuentran sobre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de los aprendizajes de la probabilidad y la estadística, incluso se podría decir que es inexistente" (p. 30); por lo que se justifica este tipo de estudios en nuestro contexto.

En vista de ello, se consideró relevante investigar en este nivel educativo las dificultades y razonamientos presentes en futuros docentes de Matemática cuando abordan situaciones que involucran el enfoque clásico de la Probabilidad, partiendo del hecho de que una vez que egresan como profesores, son los que tienen la responsabilidad de coadyuvar al proceso de aprendizaje de la Probabilidad, el azar, y por ende promover una forma de razonamiento en los individuos, que esté más adaptada a la realidad, en virtud de que la Estadística y la Probabilidad constituyen parte de los contenidos que debe ser enseñados en las aulas de clase por parte de los profesores de matemáticas en los niveles educativos propios de la Educación Básica

En consecuencia, los centros de educación tienen el gran compromiso de formar estudiantes para que sean capaces de utilizar su conocimiento y comprensión de aspectos relativos al azar y la incertidumbre para realizar las acciones más apropiadas tomando decisiones basadas en criterios científicos; y esto sería posible si, entre otras cosas, se cuenta con profesionales de la docencia realmente capacitados y adiestrados en los aspectos teóricos-formales de la Teoría de la Probabilidad, como el de sus múltiples concepciones o enfoques; el conocimiento acerca de cómo los individuos razonan en situaciones de incertidumbre y aleatoriedad, además de una formación didáctica alrededor de la enseñanza de estos temas

Precisamente con la intención de trabajar en propuestas didácticas que contribuyan a una correcta comprensión de los diversos enfoques e interpretaciones de la Probabilidad, se pasa entonces por el hecho de que el docente debe reconocer y estar al tanto de las concepciones, creencias y dificultades manifiestas en los estudiantes sobre el concepto de probabilidad y las ideas básicas relacionadas, para que estos elementos sean incorporados y considerados dentro del diseño de las propuestas didácticas; puesto que se aspira que a través de la investigación se identifiquen cuáles son las dificultades presentes por los futuros docentes de Matemática a la hora de abordar situaciones problémicas vinculadas al uso de algunas ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975); la presencia de algunos sesgos que conducen a razonamientos erróneos y a la detección de estrategias incorrectas en la resolución de problemas relacionados con el enfoque clásico de la Probabilidad.

Por tanto, se hace más que necesaria la promoción y desarrollo de investigaciones en el contexto de la formación de profesores en Matemática en el área de la Educación Estadística, y de forma particular en la enseñanza de la Probabilidad, debido que además de un conocimiento profundo y vasto dominio del contenido probabilístico por parte del profesor, también es superlativo que éstos últimos manejen lo relacionado con la manera en que estos conocimientos son adquiridos por los estudiantes y cómo son asimilados por ellos; ya que tal y como lo confirman Ortiz, Serrano y Mohamed (2009), la formación de los profesores debe dirigirse de manera equitativa y contundente tanto hacia las áreas del conocimiento estocástico como en la didáctica del contenido del mismo ya que según se reporta en sus estudios, las estrategias utilizadas por los futuros profesores que ya han recibido instrucción en probabilidad, a la hora de resolver enunciados probabilísticos, evidencian similitudes en errores en el abordaje hecho por estudiantes de diversos niveles de educación básica.

CAPÍTULO II

COORDENADAS TEÓRICAS Y CONCEPTUALES

A continuación se describe la información recopilada durante el proceso de indagación documental llevado a cabo por el autor, y que sirven de sustento para la construcción del método. El presente capítulo se estructura en (a) información relativa a las bases teóricas; (b) estudios previos relacionados con la temática objeto de estudio en la actual investigación.

Bases Teóricas

Enseñanza de la Probabilidad en el Marco de la Educación Estadística

Batanero, Garfield, Ottaviani y Truran (2000) señalan que la Educación Estadística (EE) constituye un campo disciplinar en proceso de consolidación y en el que participan un cúmulo importante de actores provenientes de diversas áreas del conocimiento. En este sentido, es importante la EE para los profesores de Matemáticas pues sobre ellos recae la responsabilidad de enseñarla en los primeros niveles educativos. Pero para distinguir al campo de la EE del campo de la Educación Matemática (EM), es necesario conceptualizar a la primera y establecer- de ser esto posible- un hilo conductos entre ambas.

Batanero (2001a) propone como conceptualización de la Educación Estadística que la misma es un "campo de innovación, desarrollo e investigación, constituido por todas aquellas personas (educadores estadísticos) que se interesan o trabajan por mejorar la enseñanza, el aprendizaje, la comprensión, la valoración, el uso o las actitudes hacia la estadística." (p.1). Además tal autora considera que la EE ha devenido en un campo de estudio prolífero a nivel mundial durante las últimas décadas y le adhiere el estatus de campo científico a partir de la concreción de la International Association for Statistical Education (IASE) en 1991, la cual se proyecta como una institución que promueve el desarrollo y la mejora de la Educación Estadística en el contexto internacional y fue creada por el International Statistical Institute (ISI).

No obstante, en opinión de Suárez (2012) , la expansión de la EE no parece ser tan amplia ni tan constante; ya que aunque se reconocen fuertes espacios de discusión, investigación y producción científica en lugares como España, Estados Unidos de Norteamérica, Australia y Nueva Zelandia; este vertiginoso movimiento de la EE no ha sido tan contundente ni tan constante en algunas regiones geográficas como por ejemplo Latinoamérica; aunque ciertamente se reconocen los actuales esfuerzos por acelerarlo.

Otro indicador del proceso de consolidación de la EE como campo disciplinario, es la realización de los International Conference on Teaching of Statistics (ICOTS) desde 1982 y que empezaron a ser organizados por la IASE desde su fundación; así mismos hay otros eventos tales como las conferencias satélites del International Congress of Mathematics Education ICME, denominadas Round Table Conference y que es sobre temas específicos de Educación Estadística.

Otro punto de referencia para justificar la consolidación de la EE como disciplina lo constituye la proliferación de publicaciones periódicas orientadas a los profesores de Estadística y que apuntan hacia la existencia de una problemática en la enseñanza aprendizaje de temas relativos a la Estadística y la Probabilidad; una de las más renombradas es la Teaching Statistics, la cual cuenta con más de dos décadas de existencia durante los cuales se ha ido desenvolviendo y adquiriendo una identidad y calidad internacional reconocida y en consecuencia coadyuvando a la conformación de la EE como disciplina. Adicionalmente se editan otras revistas como Statistical Education Research Newsletter. Journal of Statistical Education. Teaching Statistics; Statistics Education Research Journal, y la Journal of Statistics Education; lo que habla de la variedad de medios de difusión y divulgación de temas inherentes a la EE.

Ahora bien, a pesar de esta fase de conformación de la EE como disciplina, ésta que se considera que tanto la Estadística, como la Probabilidad, tienen características y modos de razonamientos propios; se reconocen la necesidad de trabajar de la mano con la Educación Matemática. Incluso autores como Batanero, Garfield, Ottaviani y Truran (2000) reconocen que gran parte de los investigadores en el campo de la EE provienen precisamente de la EM y que los marcos teóricos y abordajes metodológicos de esta última son de singular relevancia para la EE y reconocen que el fin de todos los miembros que contribuyen de alguna manera en el contexto de la EE; es el de hacer de esta una disciplina científica reconocida como un amplio conjunto de conocimientos que permitan y contribuyan a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de los temas relacionados con la Estadística y la Probabilidad.

Batanero (2001b) indica que el aumento en el número de investigaciones, publicaciones periódicas, congresos y eventos relacionados con la EE, constituyen indicios de la conformación y consolidación de una disciplina científica con autonomía propia pero que sin embargo, todavía la proporción de investigaciones en el campo de la EE en comparación con los de las diversas ramas de la Matemática, todavía es muy pequeña; lo que de alguna manera dificulta conocer los avances, aportes, cuestiones prioritarias que a aportado la EE a la enseñanza de estos temas en el aula de clase

Ahora bien, la Estadística como disciplina no se puede reducir a un simple repertorio de conceptos, técnicas, algoritmos y procedimientos; sino que trasciende a través de un nuevo modo de razonamiento, el razonamiento estocástico. A través de este modo de razonar es posible dar respuesta a situaciones por medio de inferencias y toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre. Pero enseñar lo necesario para utilizar este modo de razonamiento, según Batanero (2001a) no es fácil y alega como razones, la desmotivación de los estudiantes, así como el poco conocimiento matemático que poseen.

Además la necesidad de un grupo importante de profesionales; entre los que se encuentran profesores de Matemática, Estadísticos y Psicólogos, de reunirse y discutir aspectos diversos y relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad; hace pensar que existe una problemática educativa que gira en torno a la acogida de temas estocásticos en el aula de clases (Batanero, 2001a)

Entonces parce ser que, una pregunta clave es ¿Cómo se interrelacionan entre si la Estadística y la Probabilidad?, y para Godino, Batanero y Cañizares (1996) la probabilidad provee de una manera de evaluar la incertidumbre, tan presente en diversos ámbitos de la realidad, y en consecuencia, los modelos probabilísticos constituyen un medio para la comprensión adecuada de los métodos estadísticos tan ampliamente utilizados en tan distintas áreas del conocimiento.

También autores como Batanero y Godino (2002), señalan que la Probabilidad aparece en una amplia gama de situaciones científicas, tecnológicas y sociales en donde intervienen el azar, la aleatoriedad, la incertidumbre y el procesamiento estadístico de los datos. Además, la existencia de conceptos como variabilidad, muestreo, distribuciones, constituyen elementos de una conexión indisoluble entre la Estadística y la Probabilidad, ideas también apoyadas por Pajares (2009) quien postula que la Probabilidad es una disciplina profundamente relacionada a la Estadística puesto que ha contribuido no solo a su desarrollo formal sino que ha incrementado el alcance de sus aplicaciones, al ser capaz de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, por lo que su conocimiento es cardinal en la formación de un individuo con una justa comprensión del mundo en que vivimos.

En este mismo orden de ideas, León (2006) quien afirma que "la noción de Probabilidad cada día cobra más importancia debido a el reconocimiento de la presencia de la incertidumbre en las acciones del hombre y la naturaleza" (p.179); por lo que es necesario cambiar la visión exclusivamente determinista de nuestro contexto; regida por el razonamiento lógico donde una proposición es cierta verdadera o falsa; incorporando en las aulas de clase la presentación y el análisis de situaciones y fenómenos de la vida cotidiana en las cuales prevalece la aleatoriedad, el azar, la no certeza, el riesgo y la incertidumbre, cuyo tratamiento amerita un manejo adecuado de la noción de Probabilidad y su estimación ya que el mismo es parte de la Matemática y base de otras disciplinas científicas donde no tenemos la certeza completa acerca de una propuesta dada debido a su carácter azaroso.

El Azar y lo Aleatorio

Tratar de entender y comprender el azar y lo aleatorio ha sido una cuestión de la que se ha ocupado el hombre desde períodos antiguos. Además, la manera de explicar la presencia y ocurrencia de fenómenos asociados con la incertidumbre han sido variadas y controversiales.

Por ejemplo, León (2007), Batanero y Serrano (1996) y León (1998) coinciden en que en tiempos pasados, la explicación de estos acontecimientos era atribuida a la existencia de fuerzas sobrenaturales y a la idea de suerte e imprevisibilidad. León (2007) también señala que el azar ha estado directamente relacionado como expresión de la ignorancia y del desconocimiento del verdadero comportamiento de ciertos hechos que nos rodean.

También Urrea (2005) indica que “La evolución de los conceptos de aleatoriedad, azar y probabilidad ha pasado por etapas difíciles, entre otras cosas motivado por la manera de ver e interpretar el mundo y los fenómenos que en el ocurren” (p. 210)

Estas ideas son reforzadas por autores como Barragués, Guisasola (2006), quienes en relación a lo complejo del azar y lo aleatorio refieren que

> En un largo primer estadio preteórico, existieron creencias y actitudes hacia el azar que dificultaron que éste se planteara como problema abordable por el ser humano. Durante muchos siglos se considera que el resultado de tirar un dado expresa la opinión de los dioses sobre futuros acontecimientos, nada es aleatorio. Sólo a partir del siglo xvi se da un intento de abordar el problema del azar desde la perspectiva de lo humanamente realizable, de la mano de Cardano, Galileo, Pascal y Fermat, entre otros. (p. 244)

Entonces, debido al interés de un grupo de personajes dedicados a la matemática, bien sea de manera formal o por mero entrenamiento; a partir de finales del siglo XVI y principios del XVII, se pretende objetivizar y matematizar el azar, procurando dar a entender las leyes que lo rigen. Para León (2007) el razonamiento probabilístico es un modo de enfrentar, abordar y explicar situaciones donde priva la incertidumbre, per conviene dejar en claro ciertos conceptos fundamentales a partir de los cuales se desarrolla el enfoque clásico de la probabilidad.

También Landín y Sánchez (2010) refieren que el razonamiento probabilístico es diferente del razonamiento matemático, lógico y deductivo, puesto que el modo de pensar probabilísticamente es

> la manera de razonar que siguen los matemáticos o estadísticos para formular, interpretar, obtener y validar enunciados y afirmaciones probabilísticas. Una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones de azar y puede modelarlas, puede escapar a los sesgos cognitivos, cuida que sus creencias y concepciones no estén en contradicción con el razonamiento normativo, sabe cuándo y cómo la probabilidad puede jugar un papel importante, puede determinar la probabilidad de eventos (aislados o a partir de probabilidades dadas). Además, construye e interpreta distribuciones de probabilidad y las utiliza para hacer inferencias. (p. 599)

Se recurre entonces al razonamiento probabilístico para emitir juicios y tomar decisiones bajo circunstancias caracterizadas por la presencia de la incertidumbre, y nos permite prever y/o predecir de alguna manera conclusiones e inferencias basándonos en la poca información que se pueda tener, lo que convierte al razonamiento probabilístico en un modo de pensar caracterizado por un importante componente predictivo e inferencial, que de ninguna manera es ajeno al hombre, ya que lo empleamos de manera habitual, quizás de manera consciente o inconsciente, por ejemplo cuando tomamos decisiones en diversos momentos de la vida; pero que definitivamente lo diferencia de forma radical del razonamiento lógico-matemático.

El empleo de este modo de razonar empieza con la distinción entre aquellos fenómenos o situaciones donde está presente el azar. En primer es necesario diferenciar entre lo que ellos denominan experimentos deterministas y experimentos aleatorios. Por ejemplo para Batanero y Godino (2002) “Los primeros son aquellos que, realizados en las mismas circunstancias sólo tienen un resultado posible. Por el contrario, un experimento aleatorio se caracteriza por la posibilidad de dar lugar, en idénticas condiciones, a diferentes resultados” (p. 741)

Ramírez, Vásquez y Fernández (2011) explicitan las características de un experimento aleatorio al establecer que estos

> (a)Pueden repetirse un número ilimitado de veces sin cambiar esencialmente sus condiciones, (b) No es posible predecir un resultado particular del experimento, pero si se puede describir el conjunto de todos los resultados posibles, y (c) A medida que el experimento se repite, los resultados individuales ocurren en forma irregular, pero en los resultados comienza a aparecer un modelo definido de comportamiento. Esta regularidad, denominada regularidad estadística, hace posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual analizaremos el experimento (p. 9)

Batanero y Godino (2002) señalan que un “suceso es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Distinguimos entre sucesos elementales, cuando no pueden descomponerse en otros más simples y suceso compuestos cuando se componen de dos o más sucesos elementales” (p. 742)

La investigación acerca del pensamiento probabilístico y de la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad ha sido abundante durante los últimos cincuenta años. La mayor parte de estas investigaciones estuvo dedicada a investigar la naturaleza de las intuiciones probabilísticas de las personas y la manera en que ellas se manifiestan a través de la naturaleza y el ambiente. Por otro lado, el estudio de la evolución histórica de las ideas probabilísticas contribuye a comprender los obstáculos cognitivos y conceptos previos erróneos que afectan al proceso de enseñanza aprendizaje del estudiante.

Las investigaciones acerca de la comprensión de ideas, concepciones, creencias y conceptos vinculados al azar, lo aleatorio y la probabilidad en sí misma han venido aumentado y redirigiéndose con el pasar del tiempo. Por ejemplo Batanero (2000) refiere que la mayoría de estas investigaciones estaban orientadas hacia una población particular, que eran los estudiantes de educación secundaria. Sin embargo, Suárez (2012) reporta que en el caso particular de América Latina, la mayoría de las investigaciones han estado dirigidas hacia estudiantes universitarios y también están dirigidas en su mayoría al estudio de aspecto cognitivos relacionados al estudio del razonamiento probabilístico.

En general estas investigaciones evidencian el uso de estrategias no probabilísticas y la presencia de sesgos a la hora de dar respuestas a situaciones en el marco de la incertidumbre y la aleatoriedad (Barragués y Guisasola, 2006). Ramírez y Ballestero (2007) apuntan a que en el tiempo se han concluido diversas investigaciones donde se han aplicado cuestionarios de probabilidad diseñados por Green, Papinni, Fischbein y Gazit, Lacoutre (en Cañizares, 1997), y que han sido aplicados a grupos de diferentes niveles educativos. Como parte de los análisis de estos cuestionarios se pudo observar que existen dificultades que exteriorizan los estudiantes en temas de Probabilidad.

Entonces respecto a la enseñanza de temas vinculados a la Probabilidad, hay que considerar una serie de elementos vinculados a las nociones previas y su relación con los conceptos formales como: (1) la interacción entre las ideas previas y un nuevo conocimiento que parece ajeno, contradictorio y contraintuitivo ; (2) la persistencia del conocimiento previo sobre la idea de Probabilidad y su cálculo por encima de los conceptos sobre el conocimiento normado y regido por las ciencias; (3) procesos por los cuales las personas cambian sus concepciones iniciales por concepciones admitidas por toda una comunidad científica.

Comparación de Probabilidades

Un problema de comparación de probabilidades involucra de manera directa una comparación entre fracciones. Cañizares y Batanero (2005) indican que aunque el dominio del cálculo de proporciones es un prerrequisito para el computo adecuado de probabilidad; y más en el caso del enfoque clásico de la probabilidad; éste no es el único. Señalan que una diferencia importante es la condición de acontecimiento seguro del primero frente al grado de incertidumbre presente en el segundo y que muchas veces se ve influenciado por elementos subjetivos en la asignación de probabilidades, en lugar de orientarse por un razonamiento proporcional o basado en el uso de la combinatoria.

Godino, Batanero y Cañizares refieren que para poder asimilar el concepto clásico de probabilidad es necesaria la habilidad y destreza en el uso y manipulación de fracciones, así como el concepto de razón. Para Cañizarez (1997) las estrategias erróneas en la comparación de probabilidades pueden ser consecuencia del desconocimiento de parte de los datos del problema como por ejemplo el utilizar solamente los numeradores; así mismo son reiterativas las estrategias erróneas basadas en operaciones aditivas cuando se necesita de operaciones multiplicativas; también se ha detectado que un individuo puede usar diferentes estrategias según la naturaleza del planteamiento y que a veces trata de resolver un problema más complejo con una estrategia sencilla.

Ramírez y Ballestero (2007) indican que en relación al razonamiento proporcional utilizado por estudiantes en problemas de probabilidad "Los estudiantes cuando abordan problemas relacionados con la Probabilidad en donde interviene el pensamiento proporcional, no toman en cuenta el espacio muestral y evidencian deficiencias en el manipulación aritmética de y relación de orden de los números racionales.

Para Cañizares (1997); existen diversas estrategias a emplear para comparar dos probabilidades; por lo que no es suficiente el mero requisito de una respuesta correcta; ya que es posible llegar a conclusiones falsas sobre el razonamiento probabilístico de los sujetos, puesto que se puede haber escogido una respuesta siguiendo un razonamiento correcto o incorrecto.

Las estrategias a considerar se describen a continuación y se utilizará como referencia un experimento aleatorio que consistirá en comparar dos urnas con un número de fichas blancas y otro tanto de fichas negras; considerando donde es más factible obtener una ficha de color determinado. Además; estas estrategias son categorizadas en dos tipos; a saber:

1. *Estrategias de Comparación de una sola variable:* que el alumno sólo tiene en cuenta una variable del problema, o al menos decide la solución comparando una sola variable; bien sea esta los casos posibles, los casos

favorables o los casos desfavorables. Entre las estrategias que caen dentro de esta categorías están:

- *Comparación del número de los casos posibles*: Se contrastan únicamente los casos posibles en cada urna; en función de los cuales se llevará a cabo la comparación de probabilidades y se selecciona la urna que tiene más bolas; obviando la relación de proporcionalidad entre las bolas blancas y las negras. Esta estrategia aunque puede generar en algunos casos respuestas correctas; no tiene sustento lógico puesto que se deja de lado la comparación de la cardinalidad de un conjunto total con la cardinalidad de un subconjunto

- *Comparación del número de los casos favorables:* Esta estrategia radica en preferir la urna que posea más bolas favorables según indicaciones del experimento aleatorio. Es considerada la estrategia más simple; y puede ser utilizada cuando hay igualdad de casos posibles; pero no es necesario para su uso. Esta estrategia también podría generar en muchos casos respuestas erróneas.

- *Comparación de los casos desfavorables*: Esta estrategia consiste en escoger la coja con el menor número de bolas del color desfavorable. Se suele utilizar cuando hay igualdad de casos favorables; por lo que se centra la atención en los desfavorables. Al igual que en el caso anterior; esta estrategia puede conducir a respuestas erradas.

2. *Estrategias de Comparación de dos variables*: Para Cañizares (Ob Cit.) y en relación a este tipo de estrategias

> Los alumnos buscan la solución del problema comparando, de alguna manera, todos los datos que aparecen en el enunciado. En ocasiones esta comparación la realizan mediante una operación aditiva, restando entre sí los casos favorables y desfavorables de cada caja y comparando estas diferencias o mediante una operación multiplicativa, estableciendo la comparación de probabilidades en base a la regla de Laplace. También se puede establecer la comparación mediante alguna regla de poner en correspondencia los casos favorables y desfavorables de las cajas, con el fin de establecer si existe o no algún tipo de proporcionalidad entre ellos. Son estrategias más elaboradas que las del caso anterior, exigiendo la consideración

> de un mayor número de datos por parte del alumno, así como, en alguna de ellas, la utilización del razonamiento proporcional y la herramienta del cálculo y la comparación de fracciones (p. 110)

- *Estrategias aditivas:* Bajo este modo de realizar las comparaciones; se toman en cuenta tanto los casos favorables, como los desfavorables y los casos posibles; por lo que se consideran la totalidad de datos en el enunciado; los cuales posteriormente son sometidos a algún trabajo de tipo aritmético para hacer la comparación; y el cual puede o no conducir a una respuesta correcta; o en caso de ser correcta; la misma puede deberse a igualdad en los datos pero no a una correcta aplicación operatoria aritmética.
- *Estrategias de correspondencia:* Consiste en implantar un criterio de proporcionalidad en una fracción y utilizarlo en la otra fracción.
- *Estrategias multiplicativas*: Es la aplicación y utilización directa de la Regla de Laplace; pues requiere del estudio y relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, es decir, comparación directa de las fracciones(probabilidades) establecidas por los números de casos favorables y desfavorables con respecto a los casos posibles, y esta estrategia por tanto puede resolver de manera correcta todos los planteamientos involucrados con la comparación de probabilidades.

Sesgo de Equiprobabilidad

Las personas, desde su niñez, poseen un conjunto de ideas intuitivas, preconcepciones o juicios previos acerca del azar y la probabilidad y que son puestos el descubierto en el razonamiento empleado en determinadas situaciones o planteamientos y a este respeto, Bennett citado en Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2005) indica que las preconcepciones acerca del azar pueden en general anteceder a al pensamiento formal, normativo e institucionalizado y, que si son correctas, pueden ser de gran ayuda en el proceso de aprendizaje; pero que de forma contraria, se pueden convertir en dificultades para la correcta comprensión de los conceptos probabilísticos.

En general, se ha comprobado de manera empírica, a través de variados estudios como Kahneman, Tversky, y Slovic, (1982), Sáenz de Castro (2002), Barragués, Guisasola y Morais (2005) y Borovcnik y Kapadia (2010), que muchas veces tales ideas son equivocadas o difieren de la teoría normativa, es decir, de los significados referenciales asociados a la Probabilidad.

Precisamente, una de las líneas de investigación más relevantes y prolíferas en relación al razonamiento probabilístico es la referida al estudio de tales preconcepciones y a la presencia de sesgos en dicho razonamiento, por ejemplo Autores como Kahneman, Slovic y Tversky (1982) han señalado la presencia de errores sistemáticos de tipo psicológico en la toma de decisiones por parte de los sujetos ante situaciones de tipo probabilístico.

En opinión de Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares (1998) una posible explicación a estos errores es que con frecuencia al intentan resolver problemas de probabilidad se recurre a heurísticas. Para Pérez Echeverría (1990) las heurísticas se describen como “mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales (p. 51) y su empleo es propio del razonamiento probabilístico.

En consecuencia el uso de estrategias de tipo cognitivas utilizadas de manera inconscientes y que suprimen parte de la información del problema, tienden a reducir la complejidad del mismo, de modo que sea comprensible a aquel quien lo trata de resolver; pero ocasionado posibles errores y la presencia de sesgos en el razonamiento. Godino, Batanero y Cañizares (1996) ya hacían referencia a estudios como los de Kahneman, Slovic y Tversky en 1982; para apoyar “la existencia de ciertos errores sistemáticos y conductas estereotipadas persistentes en la toma de decisiones ante situaciones de tipo probabilístico” (p. 47).

Algunos de estos errores detectados son de naturaleza psicológica y parece que la simple exposición de la teoría de la probabilidad no es suficiente para corregirlos. De hecho, y en opinión de quien lleva cabo esta investigación, muchas veces el profesor no está consciente de la presencia de estas concepciones erróneas en sus estudiantes; para así promover estrategias didácticas adecuadas para su detección, concientización de parte de los estudiantes y posterior corrección.

Para Salcedo (2006b) "A los razonamientos incorrectos respecto a situaciones probabilísticas se les conoce en la literatura especializada como *sesgos* en la interpretación de la probabilidad, se entiende por esto el conjunto de respuestas incorrectas que tienen un origen similar" (p. 24)

El sesgo de equiprobabilidad está vinculado al hecho de que los individuos tienden a creer que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio tienen la misma posibilidad de ocurrir. Este sesgo ha sido ampliamente estudiado, por ejemplo ver Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares (1998).

Así que los sujetos que manifiestan tal sesgo asocian que el hecho de que un experimento sea aleatorio entonces, automáticamente cada uno de sus posibles resultados tiene el mismo chance de ocurrencia. Salcedo (2006b) apoya estos argumentos cuando señala que, para ellos, pareciera confluir una conexión inmediata entre azar y lo aleatorio; y la equiprobabilidad.

Barragués, Guisasola y Morais (2005); Sánchez (2009) y Batanero(2001b) señalan un conjunto de estudios llevados a cabo por un grupo de investigadores entre 1985 y 1992, vinculados al cálculo de probabilidades; los cuales se realizaron en diversos contextos de la pregunta, con diversas edades de los sujetos; y varios niveles de formación; se encontró que la gran mayoría de los sujetos tenían la creencia de que al lanzar dos dados era igual de probable obtener un cinco y un seis que obtener dos seises.

Tales resultados estarían ligados a la idea de que si un experimento es aleatorio, entonces sus resultados deben tener la misma probabilidad; lo que hoy en día se conoce como sesgo de equiprobabilidad. Además Sánchez (2009) indica que la presencia de dicho sesgo puede ser no erradicada debido a una sobrestimación del enfoque clásico. También Salcedo (2006b) indica que "al parecer, este sesgo se debe a que las personas no logran establecer conexiones entre los modelos combinatorios con experimentos aleatorios." (p. 26)

Salcedo (2006b) también señala que la presencia de este sesgo pueda deberse entre otras cosas al hecho de que

> …los contactos iniciales en la educación formal respecto a la probabilidad se hace a través de su concepto clásico, el cual se basa en experimentos aleatorios donde todos los eventos son igualmente probables. Generalmente, se inicia el estudio de la probabilidad con experimentos aleatorios, cuyos resultados son todos igualmente probables. (p. 26)

Venturiello (2008), así como Barragués y Guisasola(2006) señalan que este sesgo se refiere a la certeza de los sujetos de que todos los sucesos involucrados a cierto experimento aleatorio tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Es decir, en caso de no existir una información cierta y manifiesta, y en ocasiones incluso aun existiendo esta información, la presencia del sesgo de la equiprobabilidad ocasiona que una persona tienda a asignar la misma probabilidad a las distintas alternativas que se proponen o sugieren.

Por ejemplo, si una persona tiene que elegir entre 2 caminos posibles, al emplear el sesgo de equiprobabilidad se asumirá que hay un 50% de posibilidades de ser elegido cada uno de los caminos. Del mismo modo si hubiesen sido 3 en lugar de 2 se diría que la posibilidad es 1/3 para cada uno. Esto ocurre porque se asume injustificadamente que la elección de los caminos posibles es equiprobable, es decir, que no intervendrán otros factores como el gusto del caminante por un recorrido determinado en lugar de otro.

Concepciones de la Probabilidad

El origen de la teoría de Probabilidad se remonta a la segunda mitad del siglo XVII en un campo completamente ajeno a la Matemática y la Estadística, o al menos así era para la época, como lo son juegos de azar, lo que de forma peculiar llevó al desarrollo de ésta. Godino, Batanero y Cañizares (1996) señalan que con frecuencia se considera a Pascal y Fermat como los precursores del cálculo de Probabilidad. La razón para tal afirmación se basa en el hecho de unas comunicaciones o correspondencias entre ellos debido a unos planteamientos vinculados con juegos de azar que le hiciera el Caballero de Meré a Pascal.

A través de su desarrollo histórico, diversas han sido las concepciones asociadas al concepto de probabilidad. En tal sentido Salcedo (2006) refiere que “la probabilidad no parece resumirse en una definición única.” (p. 12); e igual perspectiva indican Batanero y Díaz (2007) al afirmar que la enseñanza de la Probabilidad no puede limitarse a una sola concepción o enfoque; puesto que están intrínsecamente relacionadas. Los enfoques para el abordaje del cálculo y la asignación de probabilidades; son el enfoque clásico, el frecuencial, la subjetivista, y el axiomático. A continuación se describen brevemente cada una de ellas basados en el trabajo de Ramírez, Vasquez y Fernández (2011).

La *concepción clásica de la probabilidad*, propuesta por Laplace, es la más antigua y tiene su origen en la búsqueda de aplicación a problemas de ganancia y situaciones de riesgos inspiradas, como se mencionó con anterioridad, en los juegos de azar.

Entre tanto las probabilidades continuaron aplicándose al estudio de problemas relacionados con los juegos de azar, la definición Laplaciana no fue sometida a crítica alguna. Sin embargo, ya algunos apuntaban a ciertas incongruencias o discrepancias con esta visión inicial del concepto de probabilidad (como la simetría en los juegos de azar), y es así como a principios del siglo XX, Richard Von Mises (1883-1953) y otros matemáticos contemporáneos revisaron los fundamentos teóricos y propusieron la *concepción frecuentista*, según la cual, la probabilidad está íntimamente relacionada con la frecuencia relativa.

Esta relación radica en el principio de que si un cierto fenómeno aleatorio se puede repetir en idénticas condiciones cuantas veces se desee, la probabilidad de cualquier suceso asociado a dicho fenómeno sería igual al límite al cual tiende su frecuencia relativa. Sin embargo, conviene mencionar, que al igual que en el caso de la concepción clásica, bajo esta visión también se pueden apreciar ciertas dificultades técnicas, como las referidas a la posibilidad de repetir infinitas veces un experimento bajo condiciones exactas.

Las limitaciones anteriores, junto a la restricción que significa la equiprobabilidad de la concepción clásica, ha impulsan el surgimiento de la visión *subjetiva de la probabilidad*, entre cuyos precursores destacan Bruno De Finetti (1906-1985) pero principalmente Leonard J. Savage (1917-1971) con su obra The Foundations of Statistics publicada en 1954. Este enfoque postula que la probabilidad de un suceso puede ser asignada basándose en el grado de creencia y confianza personal que tiene el sujeto acerca de la ocurrencia de este. Se acepta entonces que distintas personas pueden diferir en sus apreciaciones y estimaciones de una probabilidad en atención a lo que consideran como información relevante para ellos y a la experiencia con la cuentan

Tomando como punto de partida algunas características observadas ciertos fenómenos, es posible construir un modelo abstracto que nos traduzca y/o generalice de alguna manera su comportamiento. Esto es propuesto por Andréi Kolmogorov (1903-1987), cuando propone su *modelo axiomático* para la teoría de la Probabilidad. Bajo los principios de esta concepción, el cálculo de probabilidad se fundamenta en la existencia de una medida de la probabilidad (Meyer, 1992), representada a través de una función $P(A)$ cuyo dominio está conformado por el conjunto de todos los posibles resultados, denotado por S, y A un suceso cualquiera de un experimento aleatorio; y cuyo recorrido es el intervalo real [0,1] y que satisface los siguientes axiomas:

1. $P(A) \geq 0$ Para cualquier suceso $A \in S$
2. $P(S) = 1$
3. $P(A, UA_2, UA_3, U.......) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$ *si* $A_1, A_2, A_3.......$ es una sucesión de sucesos mutuamente excluyentes o incompatibles, es decir, siempre que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Es importante resaltar que, no existen inconsistencias entre los enfoques analizados hasta el momento, ya que por ejemplo si se está en presencia de una fenómeno donde priva la condición de simetría, el subjetivista sería capaz de reconocerla y con un razonamiento a priori obtendría la misma probabilidad que un clasicista, y cuando el fenómeno pueda repetirse un gran número de veces obtendrá las mismas respuestas que el frecuentista, y el enfoque axiomático propuesto es adaptable a las situaciones previstas en los enfoques anteriores.

Enfoque Clásico de la Probabilidad

Por ejemplo Rodríguez y Agnelli (2009) señala que desde la (a) perspectiva clásica, la probabilidad de un suceso es el cociente que se obtiene al tomar el número de maneras en que éste puede ocurrir entre el número total de resultados posibles, bajo los principios de espacios muestrales finitos y resultados elementales equiprobables; (b) el enfoque frecuencial la probabilidad es obtenida por medio de la frecuencia relativa de aparición de un resultado al llevar a cabo un experimento un gran número de veces bajo circunstancias similares; (c) la interpretación subjetiva considera a la probabilidad como una representación numérica que de alguna manera mide el grado de creencia que tiene un individuo en relación a la ocurrencia de un determinado suceso. Bajo este enfoque, la asignación de probabilidades a un suceso es personal y depende entre otras cosas de la información de la cual dispone el individuo y el conocimiento que posea o no en relación al fenómeno aleatorio asociado.

Salcedo (2006b) refiere que la probabilidad "…inicialmente surge como un conocimiento empírico asociada a los juegos de azar y posteriormente es cuando entra en el mundo de la matemática" (p. 12). Estas ideas son apoyadas por autores como Batanero (2005) y León (2007) quienes refieren que las comunicaciones escritas entre Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) en las cuales ambos discuten y dan soluciones a ciertos problemas vinculados con juegos de azar, constituyen el punto de partida de la teoría de la probabilidad desde el punto de vista matemático.

Sin embargo es necesario esperar hasta el año 1814 cuando Laplace acuña una definición, conocida hoy en día como definición clásica de probabilidad o regla de Laplace. Aunque vale la pena reseñar que autores como Rodríguez y Agnelli (2009) indican que aunque el enfoque clásico de la Probabilidad se le atribuye a

Laplace; esta visión del tema ya aparecía en trabajos de Pascal, Bernoulli, Huygens y Leibniz.

Para Godino, Batanero y Cañizares (1996), el primer intento de definir de manera matemática y rigurosa a la Probabilidad se debe a Pierre Laplace, para quien la probabilidad de que un evento ocurra no es más que la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles; bajo el supuesto de que todos los casos son igualmente "probables" y son finitos. Así que según esta concepción, el cálculo de probabilidad se reducía a estudios de tipo combinatorio y trabajo aritmético con fracciones.

Salcedo (2006b) señala que esta definición dada por Laplace refiere que la probabilidad de un suceso es una fracción cuyo numerador es igual al número de casos favorables y cuyo denominador es igual al número de casos posibles; siempre y cuando estos casos sean igualmente posibles. León (2007) hace ver que Laplace es considerado como el matemático que más aportes ha hecho al desarrollo de la teoría de la Probabilidad; enfatizando precisamente con su definición e interpretación clásica de la Probabilidad.

Definiciones similares son aportadas por Barragués y Guisasola (2006); quienes además alegan que el cálculo de la probabilidad en este caso se reduce simplemente al análisis combinatorio.

Sin embargo, no se comparte la idea de que el problema se reduce simplemente a un análisis combinatorio. Por ejemplo, Sánchez (2009) señala que las dificultades en cálculo de probabilidades bajo el enfoque clásico se hacen más complejas cuando se incorporan elementos de asociados a la combinatoria.

Además Barragués y Guisasola (2006) señalan que estos cálculos son válidos siempre y cuando esté presente el principio de indiferencia o idéntica verosimilitud; que no es más que la equiprobabilidad de los sucesos elementales. León (2007), así como Salcedo (2006b) refieren que este principio de simetría aunque está muy presente en los juegos de azar; no cuanta con amplias situaciones reales donde pueda ser aplicado, lo cual se convierte en una limitación para su uso.

Entre otros inconvenientes que presenta esta interpretación de la probabilidad, Sánchez (Ob. cit) y Barragués y Guisasola (2006), refieren que fuera de situaciones propias de juegos de azar, son muy pocas las situaciones reales y concretas donde se pueda construir un espacio muestral equiprobable necesario para la aplicación correcta de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidad bajo la concepción clásica; lo que conlleva a que este enfoque tenga un restringido espacio de utilización, haciendo por tanto, su definición restrictiva

También para Batanero (2005) y para Godino, Batanero y Cañizares (1996), esta definición no era adecuada debido a que no ofrece en realidad una respuesta satisfactoria a la pregunta ¿Qué es la probabilidad?, pues tan solo proporciona una procedimiento práctico para el cálculo de probabilidades asociadas a ciertos tipos de sucesos muy particulares, como por ejemplo aquellos donde cada posible resultado tenga la misma posibilidad de ocurrir y además el conjunto de estos posibles resultados sea finito.

También Batanero (2005) refiere que esta definición de probabilidad es circular; ya que refiere que los cada uno de los sucesos posibles deben ser equiprobables, lo que exige por tanto la aplicación previa de la probabilidad en estos casos. Batanero y Godino (2002) señalan de manera explícita la manera para utilizar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidad siguiendo el enfoque clásico; y al respecto indican que

> Si un espacio muestral consta de un número finito *n* de sucesos elementales y no tenemos motivo para suponer que alguno de ellos pueda ocurrir con mayor frecuencia que los restantes, la probabilidad de cada uno de estos sucesos elementales es *1/n.* En estos casos, podemos aplicar la *regla de Laplace* para calcular las probabilidades de los sucesos compuestos. Un suceso compuesto que se compone de *k* sucesos elementales, tiene, en este caso una probabilidad igual a *k/n* (regla de Laplace) (p. 746)

Basta con que se tenga la seguridad de un suceso elemental tanga más chance de ocurrir que otro; o que el espacio muestral sea infinito para que esta regla no pueda ser aplicada.

Recientemente, para justificar la asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace, se ha recurrido al Principio de Indiferencia, a través del cual se puede considerar a los casos posibles como equiprobables cuando hay evidencia de un balance y equilibrio entre cada uno de ellos.

Ideas Estocásticas Fundamentales

Heitele (1975) propone un grupo de conceptos que sirve todo el de sustento al cálculo de probabilidades y la estadística y que por tanto es necesario enseñarlos e irlos introducirlos poco a poco pero de manera sistemática, continua y evolutiva dentro de la escolaridad formal del individuo. Batanero (2004) sostiene que aunque las ideas de aleatoriedad y la noción de probabilidad constituyen los puntos iniciales para el estudio de la teoría de Probabilidad, hay una serie de conceptos sobre los cuáles se apoya todo el cálculo de probabilidades y la estadística, precisamente en referencia a las ideas estocásticas fundamentales.

Heitele (Ob. cit.) menciona que estas ideas fundamentales son: (1) medida de probabilidad, (2) espacio muestral, (3) regla de la adición, (4) regla del producto e independencia, (5) equidistribución y simetría, (6) combinatoria, (7) modelo de urna y simulación, (8) variable aleatoria, (9) ley de los grandes números y finalmente, (10) muestreo y se supone que los mismos deben constituirse como parte fundamental del conocimiento que los profesores de Matemática y otros profesionales que desempeñan en los niveles educación básica y media secundaria en el campo de la enseñanza de la Probabilidad.

De este total de ideas, se consideran en la presente investigación solamente las de Espacio Muestral, equidistribución y simetría, y combinatoria; por estar directamente relacionadas con el cálculo de Probabilidades bajo su enfoque clásico, los cuales se describen a continuación.

Espacio Muestral

Rodríguez (2004) define el espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades**.** Batanero (2001b) señala que se trata de la idea, inicialmente formulada por Kolmogorov, y consiste en "asignar un espacio muestral de sucesos observables a cada experimento aleatorio y representar los sucesos como subconjuntos del mismo." (p. 20)

El concepto de espacio muestral se cimenta sobre la posibilidad de poder enumerar todos los posibles resultados que se podrían obtener al efectuar un determinado experimento aleatorio y considerarlos como un conjunto universal o referencial a partir del cual es posible obtener subconjuntos que son eventos o sucesos partiendo de los resultados elementales; y a los cuales se les calcula la probabilidad.

En general ocurre que el espacio muestral no está unívocamente determinado para un mismo experimento aleatorio, sino que pueden existir diferentes espacios muestrales asociados con el mismo, lo cual en realidad depende de lo que se desee estudiar de tales fenómenos.

La idea de espacio muestral permitió entre otras cosas la incorporación de la teoría de conjunto dentro de la Probabilidad, lo que a su vez devino en la axiomatización de la misma, pero el realizar un inventario de todos los posibles resultados del experimento conlleva a veces dificultades cuando quien realiza tal actividad no han alcanzado un nivel de razonamiento combinatorio suficiente.

Batanero (2001b), así como Borovnick y Kapadia (2010), refieren que el espacio muestral constituye una causa de dificultades en el desarrollo del estudio de la Probabilidad. En general esto es debido a la incorporación y uso de técnicas de conteo y enumeración propias de la teoría combinatoria.

Tales dificultades en general pueden venir dadas cuando el espacio muestral está compuesto por un gran número de elementos; pues se debe pensar en función del número total de casos posibles y no solo en los casos en los cuales se está interesado. Otras posibles dificultades presentes están ligadas al hecho de la presencia de ideas asociadas a como se lleva a cabo el experimento aleatorio.

Equidistribución y Simetría

Para Batanero (2001b) se trata de una "idea estratégica que consiste en decidir que ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto y que, por lo tanto podemos asignarles la misma probabilidad." (p. 22)

Una vez que se asume lo que pudiéramos considerar una hipótesis de trabajo, es posibles el cálculo de las probabilidades de los sucesos compuestos utilizando la Regla de Laplace, siempre y cuando el espacio muestral sea finito.

Pero esta suposición de ninguna manera puede darse como un hecho tácito y menos aún como algo ya preestablecido; sino que debe tratar de justificarse y hacerse ostensible y explícita de la manera más clara posible; ya que de hecho existen gran cantidad de fenómenos aleatorios donde sería un error la incorporación de tal error; error que en general se traduce en el sesgo de la equiprobabilidad.

Entre algunas dificultades en relación al principio de equiprobabilidad o simetría Batanero (2001b) señala por un lado que muchas veces los individuos creen que es más fácil obtener más un determinado resultado por encima de otros.

Combinatoria

El valerse de técnicas y análisis de conteo, propios de la combinatoria, para calcular el número de casos favorables y posibles; y así emplearlos para el cálculo de probabilidades es otra idea fundamental.

Para hacer uso de la regla de Laplace; a menudo es necesario determinar el número de elementos de un cierto subconjunto del espacio muestral; así como determinar el número de elementos de ducho espacio. En muchos de estos casos es necesario o imperativo recurrir al cálculo combinatorio. En la literatura clásica destacan Piaget e Inhelder (1951) quienes experimentan y analizan la influencia que tienen los procesos combinatorios en la conformación de las ideas y conceptos de azar y probabilidad y establecen una relación entre razonamiento combinatorio y probabilístico cuando hacen referencia a que una escasa y limitada facultad de razonamiento combinatorio reduce notoriamente la aplicación del concepto de probabilidad, en particular cuando se maneja desde la perspectiva clásica, la cual se instrumenta por medio de la Regla de Laplace.

Se puede definir a la Combinatoria o al análisis combinatorio como un área de la Matemática que se encarga del estudio de las diferentes formas en que se pueden formar agrupaciones y ordenar elementos de un conjunto. Para Roa (2000), los conceptos relativos a variaciones, permutaciones y combinaciones (bien sea con reposición o sin ésta), se desvelan como un importante instrumento a la hora de resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidad bajo su concepción clásica a la hora de resolver problemas que involucran cálculo combinatorio se requiere distinguir entre (a) si todos los objetos son diferentes o no, (b) cuando hay que tomar en cuenta la reposición o no de objetos, y (c) si es relevante el orden de los elementos.

Así mismo, también este autor reconoce la existencia de dificultades inherentes al uso de la combinatoria, como la i*dentificación del grupo de sucesos u objetos que se pide enumerar o contar*, según la cual, en algunas oportunidades los sujetos al intentar resolver problemas de combinatoria no reconocen a los elementos correctos del conjunto de objetos que se espera enumerar o disponer, lo que conduce en general, a una percepción incoherente de dicho conjunto, ocasionando ordenamientos errados de tales objetos; y como el hecho de que muchas veces en el enunciado de los problemas combinatorios hay a veces convenios implícitos que no quedan claros para el alumno, lo cual conlleva a ordenamientos erróneos, que no necesariamente obedezcan a la falta de comprensión de la teoría combinatoria, sino a esas convenciones implícitas.

Vale la pensar la mención de que de hecho muchos experimentos aleatorios pueden definir en el fondo, operaciones combinatorias. Por ejemplo la extracción de 4 piezas de un lote de 100 artículos pueden definirse como un experimento aleatorio en el que la determinación del espacio muestral (en realidad, el número de elementos que lo componen) viene dado por el uso de la combinatoria, y de consideraciones tales como si el muestreo o selección se hace con reemplazo o sin ella; o si el orden de la extracción es o no importante.

Por todo esto, para Batanero (2001b) "las operaciones combinatorias, más que ser algoritmos de cálculo de probabilidades en espacios probabilísticos complejos, proporcionan una interpretación clara de la estructura interior de los experimentos y el encadenamiento de sucesivos experimentos en un complejo mayor." (p. 23)

Para Belfiori (2011) con relación a la conexión entre combinatoria y el enfoque clásica de la Probabilidad, esta última es una

> Definición a priori la cual implica un cociente entre dos números que representan la cantidad de casos posibles y la cantidad de casos favorables. La obtención de estos números no siempre resulta simple. El análisis combinatorio nos permite facilitar el trabajo de calcular probabilidades de eventos complejos en los cuales, frecuentemente la enumeración de casos es difícil, tediosa o ambas. (p. 73)

Añade este autor además, que si el sujeto no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales. Más aún, este autor relaciona la aparición del concepto de azar con la idea de permutación y la estimación correcta de probabilidades con el desarrollo del concepto de combinación. Un ejemplo de esta relación, puede ser que al analizar el uso de los diagramas en árbol en un contexto probabilístico y combinatorio, se pone en evidencia la existencia de una dependencia entre el espacio muestral de un experimento compuesto y las operaciones combinatorias; ya que en general la colección de todos los eventos posibles que conforman tal espacio muestral requiere de un proceso de construcción combinatorio, a partir de los sucesos elementales en los experimentos simples.

A continuación se desarrollan algunos elementos teórico-prácticos vinculados al cálculo combinatorio y a los cuales se hacer referencia al momento de describir los aspectos normativos de las preguntas y los problemas planteados en el cuestionario y en las hojas de trabajo que sirvieron como instrumentos para la recolección de la información.

Así mismo, tales cuestiones teóricas servirán para contrastar y analizar las respuestas que emitieron los sujetos de la investigación. Para el desarrollo de estos aspectos se han tomado como puntos de referencias los planteamientos de Godino, Batanero y Cañizares (1996); Meyer (1992), Freund y Walpole (1990)

1. *Regla del producto:* Sean A, B, C,…X, Y, Z; n conjuntos con n_A, $n_{B,}$ $n_{C,}$ n_X, $n_{Y,}$ n_Z elementos respectivamente. Se pueden formar $n_A.n_{B.}n_{C.}n_{X..}n_{Y.}n_Z$ grupos o arreglos distintos tomando un elemento de cada uno de los conjuntos A, B, C,…, X, Y, Z respectivamente.

   Además es necesario distinguir entre un arreglo ordenado y uno no ordenado. El arreglo o la disposición de objetos se dice ordenado, cuando el orden en que han sido extraídos sus elementos es importante. Así dos arreglos con los mismos elementos serán arreglos distintos siempre y cuando existan algunos de los elementos que ocupen posiciones diferentes. En caso contrario se dice que el arreglo no es ordenado, es decir, cuando el orden de aparición de los elementos no es relevante para el estudio.

2. *Permutaciones:* Supongamos que tenemos n objetos diferentes, los cuales queremos ordenar de diversas maneras; y sabiendo que el orden en el que se disponen es importante. Una pregunta clave sería, ¿Cuántos de estos arreglos se pueden obtener?; así mismo, ¿De qué manera se pueden obtener estos arreglos? En primer lugar, nótese que en el arreglo participan todos los objetos; y que no se admite la repetición de ninguno de estos. A tal tipo de arreglos se les denomina permutaciones.

   Mediante la aplicación de la regla del producto es posible deducir la fórmula para obtener el número de maneras de ordenar a todos los n objetos. En efecto, para hacer un arreglo cualquiera comenzamos con ubicar un primer objeto, pero tenemos en este caso n posibles maneras de escoger al mismo; para seleccionar al segundo objeto tenemos n-1 opciones, el elemento en la tercera posición lo obtenemos de los n-2 elementos restantes, y así sucesivamente hasta que nos queda un solo objeto que sería el que ocuparía la última posición. Entonces por la regla de la multiplicación, es posible obtener n.(n-1).(n-2).(n-3)….3.2.1 arreglos diferentes considerando los n objetos distintos. Se representa el producto anterior con la expresión n!, y se lee, n factorial.

Ahora bien, es posible que los n objetos diferentes puedan ser seleccionados en repetidas ocasiones. Por ejemplo al formar todos los números de 3 dígitos con las cifras 1, 2 y 3. En este caso, para escoger el primer elemento del arreglo tenemos n alternativas, para seleccionar el segundo objeto tenemos nuevamente n objetos-ya que se puede repetir el objeto ya escogido-, de manera análoga para cada uno de los demás; en consecuencia, si cada uno de los n objetos puede ser seleccionado más de una vez; al aplicar la regla del producto, tenemos n^n arreglos diferentes.

3. *Variaciones:* Se considera nuevamente un lote de n objetos para hacer arreglos u ordenamientos de r de estos n elementos (con $r < n$) y bajo el principio de que el orden de disposición es importante y ninguno de los r objetos se puede repetir. Un ejemplo de este tipo de situaciones es el de seleccionar 3 personas de un grupo de 5 para que cada uno ocupe un nuevo empleo en una compañía. De manera general; para elegir al primer elemento tenemos n opciones; para el segundo objeto tenemos que hay n-1 objetos; para el tercer elemento contamos con n-2 objetos y así sucesivamente hasta que se escoge el r-ésimo elemento de un total de n-r+1 objetos restantes.

Al hacer uso de la regla del producto, se concluye que el número de arreglos distintos de n objetos tomados r de ellos viene dado por n.(n-1).(n-2)….(n-r+1); lo cual se puede escribir, haciendo uso de la notación factorial, como el cociente entre n! y (n-r)!

Pero ahora, si suponemos que cada uno de los r objetos a ser escogidos se puede repetir, es decir, una vez seleccionado, se puede volver a tomar; como por ejemplo en el caso de la construcción de números de 3 cifras utilizando los dígitos 1,2,3,4,5 y 6; y siguiendo los mismos razonamientos anteriores; entonces en este caso, para cada arreglo siempre podremos disponer de n objetos; y como la elección de estos se hace r veces; se concluye que hay n^r posibles arreglos diferentes.

Estudios Previos Relacionados

Cañizares y Batanero (2005) llevan a cavo estudios relacionados con la comparación de probabilidades y la influencias del razonamiento proporcional sobre el cálculo de de las mismas; en una población de 134 estudiantes de entre 10 y 14 años en Granada, España. Con el propósito de analizar las estrategias que ponen en práctica los estudiantes al comparar probabilidades; los investigadores aplicaron un cuestionario escrito y complementaron con entrevistas a algunos sujetos. Los resultados arrojan que (a) el nivel de razonamiento proporcional en general es bajo; (b) aunque se cuente con individuos con un mismo nivel de razonamiento proporcional, el éxito en la comparación de probabilidad al analizar problemas de probabilidad tiende ser variado, (c) por lo cual que no hay una coincidencia total, aunque sí bastante relación entre el nivel de razonamiento proporcional y el éxito en tareas probabilísticas de un nivel proporcional dado. Como aporte a la presente investigación es que se cuenta con una categorización que pueda ser aplicada para el análisis de los argumentos de los estudiantes que participan en este estudio. Brinda orientaciones de tipo metodológica; y además se han tomado y hecho adaptaciones de algunos reactivos utilizados en el cuestionario para ser utilizados en la actual investigación.

Un estudio de las mismas características que el anterior es llevado a cabo por Ortíz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006), acerca de la capacidad de comparación de probabilidades y estrategias empleadas por maestros en formación pero la población estaba conformada por 102 maestros en formación en una facultad de Educación y Humanidades en España. Los hallazgos develan que aunque hay mejoras en los resultados en comparación con la investigación previa, se evidenció gran dificultad de parte de los sujetos al resolver los planteamientos propuestos, además los resultados sugieren a la necesidad de reforzar la formación probabilística elemental, de los futuros profesionales de la educación en su etapa de primaria ya que difícilmente podrán enseñar un tema en que muestran dificultades tan notables

También Ramírez y Ballesteros (2007) estudian la resolución de problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional; los cuales son muy comunes en el estudio del enfoque clásico. Para esto aplica un cuestionario de selección simple pero donde pide la justificación de las respuestas marcadas. El mismo fue aplicado a estudiantes de secundaria y quienes en su mayoría presentan deficiencias y concepciones erróneas a la hora de abordar este tipo de planteamientos. Del estudio se tomaron en cuenta los reactivos del cuestionario y se adaptaron para la presente. Uno de los ítems está referido a la presencia del sesgo de equiprobabilidad tomando en consideración el enfoque clásico e Laplace, mientras que el otro ítem está relacionado con la comparación de probabilidades.

En Barragués, Guisasola y Morais (2005), así como en Barragués y Guisasola (2006) se analiza el sesgo de equiprobabilidad - entre otros sesgos y heurísticas- a la hora de estudiar las formas de razonamiento utilizadas por un grupo de 110 estudiantes universitarios de ingeniería en España. Para el estudio se recurre a la aplicación de un cuestionario escrito con 6 enunciados abiertos, así como al desarrollo de entrevistas. Los resultados señalan que en los dos ítems donde se estudio este sesgo en particular, la mayoría de los estudiantes evidencian presencia del mismo; esto a pesar de haber recibido formación académica en teoría de la Probabilidad. De esta investigación son tomados y adaptados parte de los reactivos aplicados.

Un estudio similar es desarrollado por Urrea (2005) con 180 estudiantes universitarios de México, pertenecientes a diversas carreras; algunos con formación en el área de Probabilidad y otros sin ella. Se pone en evidencia nuevamente una alta presencia del sesgo de probabilidad (entre otros sesgos estudiados) y las dificultades que afrontan los estudiantes al resolver problemas de probabilidad ya que se detecta que una proporción importante de estudiantes incurren en una serie de desviaciones en su razonamiento en comparación a lo que se considera como razonamiento normativo fundamentado en la teoría.

Guzmán e Insunza (2011) lleva a cabo una investigación acerca de la comprensión y dificultades de profesores de secundaria en torno a la probabilidad. El estudio se hizo en 80 profesores de secundarias técnicas a los que se les aplicó un cuestionario de 17 reactivos; que entre otros aspectos, estudiaba los relacionados a la combinatoria, juegos equitativos, el sesgo de equiprobabilidad, y el cálculo de la probabilidad bajo el enfoque clásico.

Desde el punto de vista metodológico clasifica las dificultades en Alta, media y baja en función del porcentaje de respuestas correctas. Evidenciaron entre otras cuestiones, la falta de dominio de técnicas de conteo necesarias en muchos casos para el cálculo de probabilidad en su interpretación clásica principalmente. Fueron adaptados algunos ítems propuestos en su cuestionario para la presente investigación, y también se tomaron como referentes parciales para este estudio el modo en el cual se analizó la información recabada.

Dos trabajos desarrollaron investigaciones en relación al análisis combinatorio de estudiantes de ingeniería. Roa (2000) realiza una investigación donde se analizan las estrategias de resolución de una muestra de problemas combinatorios elementales, así como las dificultades y errores por parte de estudiantes de últimos cursos de la licenciatura de Matemáticas. El estudio se realiza mediante cuestionarios escritos aplicados en tres fases a un total de 147 estudiantes y entrevistas individuales a una muestra reducida. La caracterización de los conocimientos puestos en juego por los estudiantes se ha realizado mediante el análisis de las respuestas a los cuestionarios y entrevistas usando métodos cuantitativos y cualitativos. La investigación muestra que, a pesar del carácter elemental de los problemas combinatorios seleccionados, los estudiantes tienen dificultades importantes para resolverlos debido a la estructura compleja de los procesos de resolución requeridos, puesta de manifiesto mediante un análisis de tipo semiótico, y a deficiencias en la enseñanza de la combinatoria que enfatiza el estudio de las fórmulas de las operaciones combinatorias en detrimento de componentes más primarios del razonamiento combinatorio

En el caso de Belfiori (2011) , aunque en el mismo no hay vinculación directa entre combinatoria y probabilidad, su resultados ofrecen un conjunto de dificultades presentes a la hora de resolver problemas de enumeración en el contexto de la teoría combinatoria; las cuales serán utilizadas para analizar los ítems relacionados con este tema. Además se verifica que, a pesar de ser la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad obligatoria a nivel medio, muchas veces no se realiza con la profundidad adecuada o directamente no se realiza, motivo por el cual el alumno universitario se encuentra con un vacío en sus conocimientos estocásticos que debe llenar al cursar la materia Probabilidad y Estadística.

Otro estudio relevante para la investigación es el de Saenz de Castro (1998) donde se estudia el razonamiento probabilístico de un grupo de estudiantes de recién ingreso a la universidad. Dicho razonamiento es puesto en evidencia al analizar los sesgos presentes al responder a un cuestionario siguiendo los postulados teóricos de Kahneman, Slovic y Tversky (1982), y cuyos resultaron arrojaron que existía un predominio excesivo del pensamiento determinista o causal, lo que deviene en una incapacidad para responder de manera adecuada a los planteamientos propuestos. Como aportes de dicho estudio a la presente investigación, se tomaron los referentes teóricos, aunque se analizaron sesgos diferentes a los plateados para aquella investigación; y también del modo en que se analizaron las respuestas aunque se hicieron adaptaciones.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

La construcción y conformación de un método para el desarrollo de la investigación constituye una Tarea Intelectualmente Exigente (González, 2008) que involucra, entre otras acciones, adoptar una postura, enfoque o configuración que guía y orienta el trabajo investigativo, en este sentido, González y Villegas (2009) señalan que

> El componente metodológico de un trabajo de investigación demanda al investigador un importante esfuerzo cognitivo y la adopción de una actitud activamente constructiva; y constituye un rasgo particular de cada trabajo indagatorio ya que el mismo depende de las cualidades del problema de investigación que se esté abordando, vale decir, de las preguntas que se están tratando de responder. (p. 11)

El posicionamiento metodológico en un trabajo de investigación sirve de sustento para la selección de su diseño, los escenarios donde se lleva a cabo, los sujetos u objetos a investigar, las técnicas e instrumentos para la recolección de la información, así como los recursos y procedimientos a los cuales se recurre para analizar el contenido de la información recolectada. Estos aspectos son desarrollados en el presente capítulo.

En este estudio se adoptó un enfoque mixto, lo cual implicó la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, para realizar inferencias producto de toda la información recolectada y lograr un mayor entendimiento del fenómeno bajo estudio; en lo cuantitativo, se trató de un diseño no experimental, por no existir control de variable alguno; lo cualitativo, se expresa en la interpretación dada por el investigador a las respuestas proporcionadas por los sujetos, participantes en el estudio, a preguntas abiertas (problemas) contenidas en un cuestionario construido específicamente para esta investigación.

Diseño de la Investigación

La presente investigación constituye un estudio de caso, de carácter interpretativo, apoyado en una indagación documental y en un trabajo de campo que consiste en "el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia." (UPEL, 2011:18) y donde los datos que son relevantes en el estudio son recabados directamente de la realidad donde se desenvuelven los sujetos involucrados en el estudio.

Para Reyes y Hernández (2008), los estudio de caso pretenden el entendimiento íntegro, estos, la comprensión en profundidad, de un determinado fenómeno, para descubrir relaciones y conceptos relevantes, además de verificar o comprobar relaciones o cualidades supuestas. En ese sentido, consiste de un examen detallado, completo e intensivo de una situación, de un sujeto o sujetos, o de un evento en su propio contexto y desde una perspectiva integral. Para ello se sirve de la observación directa, la experiencia e información aportada por los informantes y la interacción social del investigador con estos.

En este estudio de caso se analiza en profundidad la comprensión de la probabilidad, bajo su concepción clásica, en un grupo particular como el de estudiantes para profesores de Matemática de la UPEL Maracay. Además tiene carácter interpretativo pues se supone que a partir de sus respuestas a problemas de probabilidad bajo un enfoque clásico, se ponen en evidencia las dificultades confrontadas por estos estudiantes para profesores de Matemática para resolverlos y así es posible estudiar lo que ellos piensan y razonan a la hora de involucrarse en la resolución de problemas del tipo indicado.

Escenario de la Investigación

El estudio se realizó en el Departamento de Matemática del Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” (Maracay, Edo. Aragua), núcleo de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

La Universidad Pedagógica Experimental Libertador tiene la misión de preparar y capacitar a los docentes que demanda el sistema educativo venezolano en sus distintos niveles y modalidades (UPEL, 1999); es en esta institución junto con las facultades de educación de otras universidades, donde se forman los profesores que enseñan Matemáticas en las escuelas y liceos; por ende se espera que los planes de estudio permitan examinar con exhaustividad los contenidos matemáticos que dichos profesores deberán impartir a los alumnos de las aulas que les corresponda regentar; así que, entre dichos contenidos deberían estar incluidos los que corresponden al estudio de la Probabilidad ya que este tópico forma parte de los programas de estudio vigentes en primaria y secundaria.

La organización curricular que adopta el Instituto Pedagógico de Maracay está conformada por cuatro componentes de formación: (a) General; (b) Pedagógico; (c) Especializado y; (d) Práctica profesional. Respecto del componente especializado tal y como refiere UPEL (1999) se ofrecen experiencias de aprendizaje que permiten el “dominio teórico y práctico de los contenidos y metodologías de las disciplinas científicas en las cuales actuará el docente y de las estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de dichas disciplinas y de la aplicación de éstos conocimientos” (p. 12), y es en este componente en donde están ubicadas, en el área de Matemáticas Aplicadas de la especialidad, las asignaturas en las que se explicitan contenidos de Probabilidad.

En primera instancia se encuentra el curso de Estadística aplicada a la Educación, la cual se administra en el segundo semestre de la carrera y que se cursa sin ningún prerrequisito y cuyos objetivos fundamentales según Sanoja y De Sales (2006), son (a) comprender y manejar los conceptos básicos de la estadística descriptiva, así como sus aplicaciones para la solución de problemas, (b) ser capaz de analizar e interpretar información, (c) distinguir, (d) conocer los fenómenos aleatorios y (e) desarrollar las competencias para utilizar los principios básicos del cálculo de probabilidades.

El otro curso donde se explicita de manera más formal el tema de la Probabilidad es el curso de Probabilidad y Estadística Inferencial, la cual se dicta en el quinto semestre tiene como prerrequisitos los cursos de Estadística aplicada a la educación y Cálculo Integral, y cuyo objetivo cardinal es presentar de manera formal y rigurosa, la Teoría de Probabilidad, e iniciar al estudiante en el estudio del campo de la Inferencia Estadística.

Para Sanoja y Suárez (2009); el curso de Probabilidad y Estadística Inferencial ofrecido en el pensum de estudios de la especialidad de Matemática de la UPEL Maracay tiene como propósito

> Proveer al futuro docente de Matemática de los fundamentos teóricos y herramientas técnicas propias de la Teoría de la Probabilidad, la cual es considerada como esencial para el estudio de la Inferencia Estadística, la toma de decisiones y el análisis de situaciones reales donde prevalezca la incertidumbre y la aleatoriedad.
> Se espera por tanto, que por medio de un conjunto de experiencias de aprendizaje el futuro docente de Matemática adquiera conocimientos sólidos relativos a las distintas concepciones de la noción de Probabilidad; destreza en el cálculo de probabilidades y sus conceptos asociados; y, su aplicación en situaciones concretas (p.2)

Es precisamente en este curso del plan de estudio del Departamento de Matemática, que se supone los estudiantes para futuros profesores deben estudiar de manera formal y a profundidad la teoría de Probabilidad; por lo que se supone que poseen cierto bagaje informativo y normativo respecto de estos contenidos.

Sujetos

Los sujetos de estudio de la investigación fueron seleccionados, entre los estudiantes regulares de la especialidad de Matemática de la UPEL Maracay. Los sujetos de estudio de la investigación fueron seleccionados por medio de un muestreo intencional, no probabilístico tomando en cuenta los siguientes dos criterios de selección: primero, que no hayan sido cursantes de la asignatura de Estadística aplicada a la Educación; o en su defecto que no hayan visto el contenido asociado a temas de Probabilidad; y que así mismo no hayan cursado la asignatura de Probabilidad y Estadística Inferencial; y en segundo lugar, estudiantes que sí cursaron y aprobaron el curso de Probabilidad y Estadística Inferencial.

En total, en el estudio participaron 20 futuros docentes de Matemática con un promedio de edad de 22 años y cursantes de entre el tercer y el noveno semestre; 10 de género femenino y 10 de género masculino; 9 de estos estudiantes ya habían cursado y aprobado la asignatura de Probabilidad y Estadística Inferencial; en tanto que 11 no lo habían cursado ni visto contendidos de Probabilidad desde su ingreso a la especialidad.

Instrumentos

Para indagar y obtener la información acerca de las dificultades y modos de razonamiento que presentan los futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay al resolver situaciones que involucran el cálculo de probabilidades bajo su enfoque clásico se procedió al diseño y aplicación de un instrumento; un cuestionario considerado para Corbetta (2003) como un conjunto de preguntas diseñadas para generar los datos necesarios para alcanzar los objetivos propuestos del proyecto de investigación. El cuestionario permite estandarizar e integrar el proceso de recopilación de datos. con (a) preguntas cerradas relacionadas con el enfoque clásico de probabilidad (Ver Anexo A-1); y (b) problemas abiertos (Ver Anexo A-2) donde se plantean 5 situaciones relacionadas con el estudio de aspectos vinculados al enfoque clásico de Probabilidad.

Tanto el cuestionario escrito, como la hoja de problemas, fueron construidos y validados a la luz de los referentes teóricos descrito en el marco referencial ya que para la construcción de estos instrumentos se seleccionaron, rediseñaron y adaptaron-con pequeñas modificaciones en algunos casos- preguntas contenidas en cuestionarios aplicados por otros autores (Green, 1983; Cañizarez, 1997, Fischbein y Gazit, 1984) que aparecen como referencias de trabajos clásicos dentro de la literatura especializada en estudios cognitivos acerca de la comprensión de la probabilidad.

Con respecto al cuestionario; el mismo consta de 5 preguntas, con 4 opciones cada una, de las cuales sólo una es correcta. Se les pide a los participantes que contesten a cada ítem seleccionando la opción que consideren como la adecuada y que además justifiquen en hojas de registro de información que les fueron facilitadas; las razones por las cuales consideran como correcta la opción escogida. En el Cuadro 1 se mencionan los aspectos clave que estudia cada uno de los ítems propuestos en el cuestionario.

Cuadro 1

Relación de temas que explora cada ítem del cuestionario (Parte 1)

Temas que se abordan	Número de ítem
Comparación de Probabilidades	1, 2, 3
Cálculo de Probabilidad (Regla de Laplace)	1, 2, 3, 4, 5
Razonamiento Combinatoria	4, 5
Espacio Muestral	4, 5
Sesgo equiprobabilidad	4, 5

Los ítems 1, 2 y 3 están vinculados con la comparación de dos probabilidades; mientras que los ítems 4 y 5 tratan aspectos que atañen a la combinatoria, la determinación del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y a la presencia del sesgo de equiprobabilidad. Además todos los ítems involucran de manera directa el uso de la Regla de Laplace para el cálculo de Probabilidades.

En la segunda parte del cuestionario se le presentó a cada estudiante una hoja de trabajo con un total de 5 situaciones con el propósito de darle respuestas a una cierta pregunta; y donde se le pedía a cada sujeto que respondiera a la misma de manera razonada y justificada. En el Cuadro 2 se muestra la relación de cada situación con el tema de interés en estudio.

Cuadro 2

Relación de temas que explora cada ítem de Cuestionario (Parte 2)

Temas que se abordan	Número de Ítem
Comparación de Probabilidades	2
Cálculo de Probabilidad (Regla de Laplace)	1, 2, 3, 4, 5
Razonamiento Combinatoria	3, 4, 5
Espacio Muestral	3, 4, 5
Sesgo equiprobabilidad	1, 5

En cuanto a los temas abordados en cada ítem; tenemos que el problema 2 está relacionado con la comparación de probabilidades; el problema 1 y el problema 5 con el sesgo de equiprobabilidad; mientras que los problemas 3, 4 y 5 guardan relación con las ideas estocásticas fundamentales de combinatoria y espacio muestral.

Durante la aplicación del cuestionario, se les pidió a los estudiantes que realizaran todas las anotaciones posibles en el documento, con el fin de acceder a las expresiones de sus estrategias o de técnicas de solución implementadas en cada problema.

Procedimiento

A continuación se describe el procedimiento a través del cual se llevó a cabo la investigación, la cual se desarrolló en tres etapas claramente definidas y que se explicitan a continuación.

1. *Revisión documental preliminar*: Basada en una exploración bibliográfica minuciosa; recurriendo a fuentes impresas y electrónicas; con el propósito de reconocer el estado del arte de la investigación en torno a la enseñanza de la Probabilidad desde el punto de vista cognitivo y de la comprensión por parte

de los estudiantes en torno al concepto de Probabilidad y algunos conceptos asociados al mismo. Esto permitió vislumbrar un panorama general con relación al abordaje metodológico, los referentes teóricos y tendencias en investigaciones, así como cuestiones pendientes o aún no exploradas.

2. *Trabajo de Campo:* Para la recolección de la de información se contó con la participación de 20 futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay; adscritos al departamento de Matemática del mencionado instituto. Esta etapa se llevó a cabo en las fases que se describen a continuación

    - Fase 1: Diseño de dos instrumentos para la recopilación de la información, tomando como referentes cuestionarios similares aplicados en diversos contextos (Green, 1983; Cañizarez, 1997, Fischbein y Gazit, 1984). El primero de ellos un cuestionario con preguntas 5 cerradas; mientras que el segundo era una hoja de trabajo con 5 situaciones relacionadas al uso del enfoque clásico de la Probabilidad.
    - Fase 2: Presentación del cuestionario a los sujetos de investigación, así como la exposición de los propósitos de la investigación; con la idea de sensibilizar e informar a los sujetos sobre el estudio y su papel dentro del mismo
    - Fase 3: Aplicación de los instrumentos de recolección de la información, la cual se hizo en dos momentos; en primera instancia, la aplicación del cuestionario en el aula de clases en una sesión de trabajo llevada cabo en las aulas del departamento de Matemática; y en un segundo momento se les hizo entrega de la hoja de trabajo contentiva de las 5 situaciones que abordaban tópicos ligados al enfoque clásico de la Probabilidad, así como de las hojas de protocolo de registro de la información.

Con respecto a este segundo momento, se decidió, a petición de los mismos sujetos; dar un tiempo de 24 horas para la entrega de las respuestas a tales planteamientos debido a que según su parecer, se trataba de problemas muy complicados y que no sabían cómo abordarlos para emitir una respuesta en el momento y que necesitaban más tiempo para poder entenderlos.

3. *Organización, sistematización, análisis e interpretación de la información:* En primera instancia se procedió a la transcripción y registro digital, a través de fotografías, de las respuestas de los futuros docentes por cada una de los ítems que contestaron en el cuestionario, así como las respuestas emitidas con relación a la hoja de trabajo con los problemas.

Una vez construidas unas tablas (Ver Anexos B-1 y B-2) con toda la información antes recabada, se procedió al análisis de las mismas en 4 estadios; (a) Un primer análisis referido a las respuestas emitidas por los sujetos de investigación a cada una de las preguntas del cuestionario; (b) Un segundo análisis referido a los resultados globales obtenidos en grupos de ítems y de problemas que evaluaban aspectos similares, en este caso se hizo un proceso de categorización de las respuestas para identificar la presencia del sesgo de equiprobabilidad, analizar la comparación de probabilidades, los razonamientos combinatorios que efectúan los futuros docentes, la obtención del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio; y describir el uso de cálculo de probabilidad bajo la Regla de Laplace; (c) Un tercer análisis para el estudio del desempeño individual por cada participante para evidenciar el nivel de razonamiento; y finalmente (d) Un cuarto análisis que se hizo separando a los sujetos de estudio en dos grandes conglomerados siguiendo como criterio si desde su ingreso a la universidad como estudiantes regulares, recibieron instrucción o no, de contenidos vinculados al cálculo de probabilidades.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

En el presente capítulo se llevó a cabo un análisis de la información recogida a través de los instrumentos descritos en el Capítulo IV. Tal análisis se realiza a la luz de la teoría descrita en el Capítulo II; y se lleva a cabo en 4 niveles de análisis. En primer lugar se analizan las respuestas proporcionadas por los sujetos de estudio en cada uno de los ítems; un segundo momento del análisis consiste en analizar las respuestas agrupadas en función de los temas (comparación de probabilidades, sesgo de equiprobabilidad, espacio muestral, combinatoria, cálculo de probabilidad), en tercera instancia se realiza el análisis en atención a los sujetos clasificados en dos subconjuntos disjuntos tomando como criterio de clasificación el haber visto contenidos de probabilidad en la asignatura Estadística aplicada a la Educación y/o Probabilidad e Inferencia Estadística del plan de estudio de la especialidad de Matemática de la UPEL Maracay, y finalmente se realiza un estudio individual para analizar el razonamiento probabilístico de los sujetos en torno a la resolución de problemas asociados al cálculo de probabilidad bajo el enfoque clásico.

Análisis Específico de los Ítems y Problemas

En este apartado se procedió a analizar de forma individual cada uno de los ítems y problemas aplicados en el instrumento en cada una de sus partes. Esto brindó un panorama general acerca del desempeño global de los sujetos de estudio con respecto a todo el cuestionario. La presentación del análisis de los ítems y problemas en este reporte de investigación, se estructuró en primer lugar con el enunciado de cada uno de los ítems y problemas; en segundo lugar se emitió una respuesta normativa, a la luz de la teoría y en tercer lugar se procedió al análisis de las respuestas emitidas por los sujetos participantes de la investigación.

Análisis del ítem 1

Enunciado

En la caja A se han introducido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han colocado 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si para ganar un premio debes sacar una ficha negra (sin ver dentro de la caja), ¿Cuál caja escogerías para realizar la extracción?

(a) La caja A da mayores posibilidades de obtener la ficha negra

(b) La caja B da mayores posibilidades de obtener la ficha negra

(c) Las dos cajas dan la misma posibilidad

(d) No se puede concluir nada al respecto

Respuesta Normativa

En primera instancia se dará una respuesta normativa o de referencia para hacer el análisis correspondiente. Este ítem es tomado de Green (1983), y ha sido empleado por diversos autores a lo largo del tiempo, en este ítem puede aplicarse el principio de indiferencia (Ortíz y otros, 2006), entonces la asignación de probabilidades puede hacerse mediante la aplicación de la Regla de Laplace; lo que se corresponde con la estrategia multiplicativa (Cañizares, 1997); la cual siempre dará una respuesta correcta a la comparación de probabilidades, salvo asuntos de operatorios.

Para resolver este problema es necesario comparar dos fracciones y reconocer el espacio muestral, para poder determinar los casos favorables y los casos posibles.

Si A representa el evento “Obtener una ficha negra de la caja A”, y considerando el hecho de que se extrae una sola ficha y que por tanto el espacio muestral del experimento aleatorio “Extraer una ficha de la caja A” está formado por 4 casos posibles; entonces P (A) = 3/4 = 0,75.

De manera análoga, si B representa el evento “Obtener una ficha negra de la Caja B”; y considerando el hecho de que se extrae una sola ficha y que por tanto el espacio muestral del experimento aleatorio “Extraer una ficha de la caja B” está formado por 3 casos posibles; entonces P (B) = 2/3 = 0,67. En consecuencia, será más probable obtener una ficha negra si consideramos para su extracción la caja A, lo cual se corresponde a la opción a.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al ítem 1

El 100% de los sujetos del estudio acertó la respuesta correcta; sin embargo, las razones esgrimidas son variadas; y en algunos casos los argumentos empleados no son correctos. Para estudiar esta cuestión en detalle y hacer el análisis de las respuestas esgrimidas por los futuros docentes ante este planteamiento; se recurre a la clasificación de las estrategias empleadas que es propuesta por Cañizares (1997) y que fue descrita en el marco referencial de la presente investigación. A continuación se describen las estrategias empleadas por los futuros docentes de Matemática.

Estrategia de Comparación de casos favorables: se incluyen acá las respuestas de los sujetos P3,P4,P5,P16,P18. Por ejemplo; P4 afirma que la opción correcta es la *a* puesto que “*en la caja A hay más fichas negras para extraer y tiene más posibilidades*”; respuesta similar emite P5 cuando refiere que la opción correcta es la primera pues “*Porque al tener más fichas negras, existe la posibilidad de sacar una de dicho color*”; o la respuesta de P18 quien señala que “*La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra, pues tengo como tres chances u opciones de sacar una ficha negra, mientras que en la caja B solo tengo dos*”.

Estrategias Aditivas: Tan sólo utilizada por el sujeto P2, quien indica que su opción correcta es la primera “*Puesto que hay 3 fichas negras y sólo 1 blanca, pues* *existe más posibilidades que en la otra caja que tan solo hay 2 fichas. Aunque no se puede ver la ficha sino al momento que se sacó, considero que la posibilidad de la caja A es mayor*"

Estrategias de Correspondencia: Empleada por los sujetos P13,P14,P17. Se admiten como respuestas dentro de esta categoría, por ejemplo, la emitida por P13 quien indica que la opción a es la correcta "*Por el hecho de que la ficha negra está en proporción 3 a 1*". En el caso del participante P14; este establece a través de una regla de tres simple una relación de proporcionalidad, expresada de manera porcentual para comparar cual porcentaje es mayor.

Estrategias multiplicativas: Fue empleada por los participantes P1,P6,P7,P8,P9,P10,P11,P12,P15,P19,P20; lo que representa el 55%. Se incluyen en esta categoría argumentos como el de P1 quien señala que "*si en la caja A tenemos 3 negras y 1 blanca, la probabilidad de que salga negra es ¾, y en la caja B teniendo 2 negras y una blanca la probabilidad de que sea negra es 2/3. Así la caja que elegiría sería la A pues tengo un 75% de mayor posibilidad*"; o la respuesta de P19 "*Opción A, ya que al calcular la probabilidad de ambas cajas obtenemos los siguientes resultados:*

$P(a) = \frac{Casos\ Favorables}{casos\ posibles}$ $\quad P(a) = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad P(b) = \frac{2}{3} = 0{,}66$ *Lo que quiere decir que existe el 75% de posibilidad de sacar una ficha negra en la caja A.*"

Sin embargo, hay que hacer mención a ciertos casos donde se emplea de manera errónea la estrategia multiplicativa (aunque conduzca a la selección de la opción correcta) como lo es el caso del participante P10 quien en primera instancia determina las probabilidades de obtener una ficha blanca y una ficha negra par cada caja por separado, lo cual sería más que suficiente para hacer la comparación de manera correcta; pero posteriormente utiliza las probabilidades obtenidas para hacer ciertos cálculos sobre los cuales no se indica su razón de ser; "*3/4 . 2/3 =6/12=3/4=0,75 y 1/4 . 1/3 = 1/12 = 0,08 Ahora sumamos los resultados 0,75 + 0,08 = 0,83*". El participante refiere que se resuelve por el "*principio de la adición*" y además se sabe que ha cursado y aprobado el curso de Probabilidad y

Estadística Inferencial por lo que se infiere que trató de dar una respuesta a la luz de la Teoría de la Probabilidad.

Como se puede apreciar la mayoría de los sujetos, un total de 15, empleó estrategias de comparación de 2 variables (aditivas, correspondencia y multiplicativas), lo que representa el 75%; las cuales se suponen son más completas pues consideran la totalidad de los datos y las relaciones entre ellos. Además de los 20 sujetos; 19 seleccionan la opción correcta utilizando razonamientos correctos y uno sólo- el P10- aunque escoge la opción correcta, su razonamiento está errado y el haber marcado la opción correcta es meramente casual. En el Cuadro 3 se puede apreciar la relación entre las estrategias empleadas y los sujetos participantes en la investigación. Nótese que la cuarta parte de los participantes emplean la estrategia de comparar los casos favorables pero nadie contrasta con los casos posibles, lo cual en este enunciado en particular no sería una estrategia adecuada para aplicar pues el hecho de que existan más casos posibles en una caja que en otra no implica esto necesariamente una diferencia en cuanto a las probabilidades de extraer la ficha negra de una caja en particular.

Cuadro 3

Estrategias empleadas en la comparación de probabilidades ítem 1

Estrategia Empleada	Participantes	Total	%
Comparación del número de casos posibles	---	0	0 %
Comparación del número de casos favorables	P3,P4,P5,P16,P18	5	25%
Comparación del número de casos desfavorables	---	0	0 %
Aditivas	P2	1	5%
Correspondencia	P13,P14,P17	3	15%
Multiplicativas	P1,P6,P7,P8,P9,P10,P11,P12,P15 P19,P20	11	55%
Otras	---	0	0 %
Total		20	100%

Análisis del ítem 2

Enunciado

Dos cajas contienen bolas negras y blancas de la siguiente manera: La caja T: 2 negras y 2 blancas y la caja P: 4 negras y 4 blancas. ¿Cuál de estas dos cajas (T o P) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola negra

(a) La caja T

(b) La caja P

(c) La misma posibilidad

(d) No se puede concluir nada al respecto

Respuesta Normativa

Este ítem ha sido analizado a través de estudios previos por investigadores como Green, Papinni, Fischbein y Gazit; y considerando diversas poblaciones (Ramírez y Ballesteros, 2007)

De manera similar al ítem anterior; es necesario comparar las probabilidades de los eventos “Obtener una bola negra de la caja P”, y “Obtener una bola negra de la caja T”. La diferencia entre este ítem y el anterior es que en este caso existe igualdad de probabilidades en ambos eventos, y por lo tanto es indiferente la caja que se escoja para la extracción de la bola. Se da a continuación la respuesta de referencia; utilizando como estrategia de resolución, la multiplicativa; para el uso de la Regla de Laplace (Cañizares, 1997); y que puede resolver de manera correcta cualquier tipo de planteamiento de comparación de probabilidades.

Ciertamente, en el caso de la caja P donde hay 2 bolas negras y 2 bolas blancas; la probabilidad de extraer una bola negra es de 2/4= 1/2; y de forma análoga, en el caso de la caja T, la probabilidad de extraer una bola negra es 4/8 =

1/2. Estos cálculos se han hecho bajo la hipótesis de equiprobabilidad que caracteriza los juegos de azar y mediante la aplicación de la Regla de Laplace.

En consecuencia, es indiferente la caja que se selecciones para obtener una bola negra; ya que en ambos casos hay la misma posibilidad. Así que la opción correcta es la opción c.

Análisis de las Respuestas de los Sujetos al ítem 2

Veamos en primer lugar cuales fueron las estrategias empleadas para dar respuesta a este planteamiento. En Cuadro 4 se pueden apreciar las estrategias utilizadas por los sujetos del estudio y los porcentajes correspondientes.

Cuadro 4

Estrategias empleadas en la comparación de probabilidades ítem 2

Estrategia Empleada	Participantes	Total	%
Comparación del número de casos posibles	---	0	0%
Comparación del número de casos favorables	---	0	0%
Comparación del número de casos desfavorables		0	0%
Aditivas	P2,P16	2	10%
Correspondencia	P3,P4,P5,P6,P7,P8,12,P13,P15,P17,P18	11	55%
Multiplicativas	P1,P9,P10,P11,P14,P19,P20	7	35%
Otras (….)		0	0%
Total		20	100%

Se observa que la estrategia más utilizada en este caso se corresponde a las de Correspondencia con un total de once sujetos que representan el 55%; y en segundo lugar las estrategias de tipo multiplicativas con siete sujetos para un 35% y en tercera instancia dos sujetos utilizaron estrategias del tipo aditiva para un total de 10%. Es claro que las estrategias de tipo multiplicativas responderían de forma correcta al planteamiento puesto que se basa en la aplicación de la definición clásica de la probabilidad propuesta por Laplace.

En este caso 19 de los 20 sujetos (95%) aciertan la opción correcta; y sólo uno de los sujetos (5%) selecciona una opción errada. En relación con el sujeto con la respuesta errada, el sujeto P2, el mismo seleccionó la opción b y justifica su elección afirmando que "*Pues como hay más bolas negras y blancas, la posibilidad es mayor porque le lleva 2 bolas de diferencia a la otra caja*" utilizó una estrategia de tipo aditiva que no era adecuada en este caso; pues considera los casos posibles y favorables pero no reflexiona acerca de que la relación de proporcionalidad en ambas cajas es la misma; sino que se deja llevar por el hecho de que en la segunda caja hay más bolas en total y más de las negras que en la primera caja; lo cual no es un razonamiento correcto.

En cuanto a las estrategias de correspondencia se admiten en este caso como respuestas correctas que ambas ofrecen igual posibilidad porque por ejemplo en ambas cajas hay la mitad de las bolas negras; tal y como lo establece P3 cuando responde que la opción correcta es la c "*Porque en cada una de las cajas hay igual de posibilidades de extraer una bola negra*"; o el participante P4 quien llega a la misma opción correcta "*debido a que ambas cajas tienen la misma cantidad de bolas negras y blancas, en una hay dos de cada color y la otra 4. Por tal razón, al momento de extraer una bola negra ambas ofrecen la misma posibilidad*".

El participante P5 refiere que la opción correcta es la c "*ya que Tanto la caja T como la Caja P ofrecen la misma posibilidad de extraer una bola negra porque los eventos son proporcionales*", lo que pudiese entenderse que en ambas cajas hay una relación de uno a dos entre los casos favorables y los posibles. Se infiere que de manera similar son las respuestas emitidas por P6, P7,P8,P12,P15;P17 y P18 puesto que en todos estos casos se hace referencia a un 50% de posibilidades para cada caja pero no se evidencia a través de ningún cálculo.

Análisis del ítem 3

Una clase tiene 29 estudiantes de los cuales 13 son chicos y 16 son chicas. Se escribe el nombre de cada estudiante en un trozo de papel. Se colocan los papeles en un sombrero. El profesor toma uno de los papeles sin ver. Si el profesor pregunta a qué sexo corresponde el nombre del papel, ¿cuál de las siguientes opciones responderías?

(a). Es más probable que se trate de un CHICO que de una chica

(b). Es más probable que se trate de una CHICA que de un chico

(c). Es igual de probable que se trate de una chica que de un chico

(d). No se puede concluir nada al respecto

Respuesta Normativa

Se trata de un ítem que analiza la comparación de probabilidades; en este caso con respecto a la situación de qué es más probable, si obtener una chica o un chico sabiendo que hay 16 de las primeras y 13 de los últimos.

Se recurre a estrategias multiplicativas para lograr un argumento apropiado que justifique la selección de la respuesta correcta. Al haber más hembras que varones, esto conduce a pensar que en consecuencia es más fácil que el papel extraído tenga el nombre de un chica. Este razonamiento lo podemos confirmar al aplicar la Regla la Laplace, ya que contamos con la hipótesis de equiprobabilidad, y la probabilidad de que el papel tenga el nombre de una chica es de 16/29=0,55, mientras que la probabilidad de obtener un chico; es de 13/29=0,45 y por tanto es más probable obtener un papel con el nombre de una chica; concluyendo así que la opción correcta es la opción b.

Aunque ciertamente por lo elemental que pudiese llegar a parecer el enunciado, no es necesario el empleo de la Regla de Laplace para confirmar la respuesta correcta, si permite evidenciar el razonamiento puesto en práctica por los sujetos a la hora de hacer las comparaciones.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al ítem 3

Coinciden con esta respuesta 18 de los sujetos de estudio; mientras que un sujeto indica que la opción correcta es la A y otro sujeto refiere que la opción correcta es la C. Nuevamente la mayoría acierta la opción correcta; el 90% de los sujetos; mientras que tan sólo dos individuos, 10% de los informantes claves, fallan en la elección de la misma.

Veamos a continuación cuales fueron las estrategias utilizadas por los sujetos para dar respuesta a este planteamiento. En el Cuadro 5 se describen las estrategias utilizadas por los sujetos del estudio y los porcentajes correspondientes.

Cuadro 5

Estrategias empleadas en la comparación de probabilidades ítem 3

Estrategia Empleada	Participantes	Total	%
Comparación del número de casos posibles	---	0	0%
Comparación del número de casos favorables	P2,P3,P5,P6,P7,P8,P12,P13,P16,P17,P18,P20	12	60%
Comparación del número de casos desfavorables	---	0	0%
Aditivas	---	0	0%
Correspondencia	P14	1	5%
Multiplicativas	P1,P9,P10,P11,P15,P19	6	30%
Otras	P4	1	5%
Total		20	100%

La estrategia más utilizada es la referida a la comparación del número de casos favorables la cual fue empleada por 12 sujetos lo cual representa un 60%; mientras que la segunda estrategia aplicada es la multiplicativa con 6 sujetos y un 30% y finalmente 1 sujeto que recurren a otro tipo de estrategias, lo que coincide con un 5% del total.

Con respecto al grupo que recurrió a la comparación del número de casos favorables; se emiten razonamientos correctos similares en todos los sujetos como por ejemplo el esgrimido por el sujeto P3 quien señala la opción correcta debido a que "*Por haber tres chicas más que la cantidad total de chicos, hay tres oportunidades más de sacar el nombre de una chica del sombrero*". El participante P1 acierta en la opción correcta sin embargo el espacio muestral considerado no es el los 29 estudiantes sino de 39; lo cual podría ser atribuido a un error por descuido en el cálculo y que no afectó la opción correcta. Otro caso es el del participante P6 quien afirma que la opción correcta es la b ya que *"Hay más chicas que chicos"* sin embargo; refiere que la probabilidad es de un 55%, pero no refleja cómo ha llegado a tal resultado, ni por qué esta probabilidad es mayor que la de obtener un chico.

Otra estrategia que pudiese ser correctamente empleada en este caso es la estrategia multiplicativa, utilizada por 6 de los 20 sujetos ya que bastaba con aplicar la Regla de Laplace y comparar ambos resultados para llegar a la opción correcta. Para ilustrar el empleo de esta estrategia, por ejemplo el participante P9 justifica la selección de su opción afirmando que la alternativa correcta es "*La opción b ya que si tenemos 29 estudiantes, donde 13 chicos (A) y 16 chicas (B), la probabilidad es mayor en B; P(A)= 13/39=0,33 33% P(B)=16/39=0,42 42% 33% <42%"*.

Sin embargo 1 de los 6, específicamente el informante P10, que también recurre a esta estrategia, la emplea de forma errónea considerando al espacio muestral como un conjunto con 100 elementos y no 29 que se corresponde con el total de individuos en el salón de clase: lo que lo conduce a una elección incorrecta de las alternativas dadas.

Finalmente, En relación con el sujeto P4 considera que igual de probable obtener un papel con el nombre de una chica que de un chico ya que "…*considero que ambos tanto chicos como chicas tienen la misma ´probabilidad de ser seleccionados*", lo cual evidencia en realidad la presencia del sesgo de equiprobabilidad; y continúa con su justificación afirmando que es igualmente probable "*a pesar de haber más chicas que chicos, pero al momento de tomar un* *papel sin ver no se puede asegurar que sexo corresponde*"; por lo que alternativa seleccionada no es correcta.

Análisis del ítem 4

Enunciado

Cuando se lanzan simultáneamente 3 dados ¿Cuáles de los siguientes resultados es más fácil que ocurra?

(a) Obtener de alguna forma 5, 3 y 6

(b) Obtener de alguna forma dos veces el 5 y una vez el 3

(c) Obtener 3 veces el 5

(d) Todos estos resultados son igualmente probables

Respuesta Normativa

Para este ítem es necesario es necesario determinar primero el espacio muestral; conformado por todos los posibles resultados al lanzar tres dados (perfectamente balanceados).

Para determinar el espacio muestral es necesario recurrir a la teoría combinatoria. Por ejemplo, la regla de la multiplicación o un diagrama de árbol darán como resultado que hay un total de $6^3=216$ posibles resultados; o considerarlo como una variación con repetición. Cada uno de estos posibles resultados, denominados eventos simples o elementales, son equiprobables.

Ahora bien, consideremos el evento E_1 = {Se obtiene de alguna forma 5, 3 y 6}.En este caso el evento E_1 descrito por extensión viene dado por 6 eventos simples, a saber E_1= { (5,3,6); (5,6,3); (3,5,6); (3,6,5); (6,5,3); (6,3,5)}, por tanto al aplicar la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de obtener de alguna manera 5, 3 y 6 viene dada por $P(E_1)=6/216$.

Consideremos el evento E_2 = {Se obtiene de alguna forma 2 veces el 5 y una vez el 3}. Al describir este evento por extensión tenemos que el mismo viene dado por la unión de los siguientes eventos simples E_2={(5,5,3); (5,3,5); (3,5,5)} y que por lo tanto en este caso la probabilidad de este evento, al hacer uso de la Regla de Laplace, viene dada por $P(E_2) = 3/216$

Finalmente, si se denota por E_3 el evento de obtener 3 veces el 5; entonces en notación conjuntista, se obtiene que E_3 = {(5,5,5)}, por lo cual $P(E_3) = 1/216$, ya que de hecho se corresponde con uno de los eventos simples.

Como se puede apreciar, es más probable el evento E_1; que cualquiera de los otros dos eventos E_2 o E_3; por lo que la opción correcta en este caso en la opción a.

En este ítem se analizan los aspectos relacionados con la teoría combinatoria, la determinación del espacio muestral, el cálculo de probabilidad y el sesgo de equiprobabilidad.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al ítem 4

En la Cuadro 6 se pueden apreciar las opciones escogidas por los participantes y donde se refleja que tan solo 3 sujetos seleccionaron la opción correcta a, 1 sujeto considera que la opción correcta es la b, un sujeto cree que la alternativa correcta es la c; 13 individuos, lo cual representa el 65%, consideran que la opción correcta era la d y finalmente 3 informantes claves no contestan ni marcan ninguna opción.

Cuadro 6

Distribución de respuestas del ítem 4

Opción escogida	Participantes	Total	%
a	P8,P17,P20	3	15%
b	P10	1	5%
c	P9	1	5%
d	P1,P2,P4,P5,P6,P7,P11,P12,P13,P15,P16,P18,P19	13	65%
No contesta	P3,P14	2	10%
Total		20	100%

En relación con los tres sujetos que seleccionan acertadamente la opción correcta, el sujeto P8 recurre a un razonamiento de tipo combinatorio y que está relacionadas con el concepto laplaciano o clásico de probabilidad para justificar su elección afirma que "*Hay 216 posibles resultados. Se elige la opción A porque como no hay repeticiones tiene más posibilidades de que suceda ya que el 5, el 3 y el 6 pueden variar en cualquiera de los tres dados. En la B el 3 es el único que puede variar ya que el 5 se repite dos veces y en la C hay un solo caso porque el 5 se repite en los tres dados por lo tanto no varía*".

Argumento similar emplea el sujeto P20 cuando refiere que "*Es más fácil obtener a. Con 3 dados hay un espacio muestral de 6.6.6= 216 posibles resultados, el espacio muestral en este caso. Como el 5, el 3 y el 6 se pueden obtener en cualquier manera, entonces hay 6 posibilidades como por ejemplo 536, 635, 365, 563, 653, 365 y así. Tres veces 5 pasa de una sola forma y en el otro caso hay solo tres opciones 553, 355, 535, entonces las probabilidades son 6/216; 3/216 y 1/216. Es mejor la opción a*"; con lo que adicionalmente calcula cada una de las probabilidad y las compara entre sí para seleccionar la de mayor valor.

Esta misma estrategia donde se recurre a la Regla de Laplace, es utilizada por el participante P19, quien a pesar de dar con la opción correcta, utiliza un razonamiento erróneo, "*ya que este evento es equiprobable, puesto que cada dado tiene 6 lados lo que quiere decir que en total contamos con 18 caras (6 caras x 3dados que tenemos). Por lo tanto al calcular la probabilidad de (a), (b) y (c) es resultado que obtendríamos seria el mismo. Obsérvese P(a)= 3/18 = 0,16* " el cual surge en primera instancia debido a la determinación errada del espacio muestral y por otra parte, al hecho de asignar de manera automática el carácter de equiprobables a todos los resultados.

Sin embargo el sujeto P17 simplemente refiere que "*Es más probable que todas sean diferentes a que todas sean parecidas*" pero no justifica porqué el considera que esto es más probable que cualquier otra de las opciones.

El sujeto P10 refiere que la opción correcta es la b, lo cual es incorrecto y su justificación se basa en el razonamiento siguiente "*Aquí se debe construir un espacio* *muestral S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24}.No recuerdo bien este procedimiento, es por evento asociado, es decir, si formamos un conjunto con los número impares, obtendría* S_1 *= {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23} no estoy segura pero puede ser la opción b*". Es evidente una falta de comprensión del planteamiento del problema así como un manejo inadecuado de la definición de espacio muestral y aunque escoge una de las alternativas, expresa su duda y poca seguridad a la hora de la elección.

La opción c es escogida de manera incorrecta tan solo por el sujeto P9 el cual recurriendo a la Teoría de Probabilidad trata de dar respuesta al planteamiento, aunque no lo hace de manera adecuada pues evidencia muestras de mal uso de la teoría, a pesar de determinar adecuadamente el espacio muestral; el número de elementos del mismo no es empleado en ninguno de los cálculos posteriores.

La opción d es la opción más seleccionada y en realidad esta alternativa está directamente vinculada a la presencia del Sesgo de equiprobabilidad. Se demuestra entonces que la mayoría, un total de 13 sujetos que representa el 65% de los participantes, posee el sesgo de equiprobabilidad.

Con respecto al cómo se evidencia este sesgo en los razonamientos realizados por los informantes claves; se observa que el hecho de que los resultados elementales sean equiprobables, entonces también se consideran equiprobables los resultados de los eventos compuestos, se advierte por lo tanto una falta de discriminación entre los sucesos simples y sucesos compuestos de un espacio muestral que se obtiene como resultado de un producto cartesiano entre los 6 resultados posibles de cada dado.

Así se toman por ejemplo la justificación del participante P5 quien indica que "*Todos estos resultados son igualmente probables porque se está considerando el mismo espacio muestral, es decir, las 6 caras de los dados*", lo cual pone en evidencia la no distinción del espacio muestral que se obtiene al lanzar un dado y al lanzar 3 dados; argumento similiar es esgrimido por el sujeto P6 cuando señala que "*Al lanzar tres dados es posible que ocurra cualquier resultado, por lo tanto todos son probables*"

Así mismo, el participante P16 señala que "*Todos estos resultados son igualmente probables al considerar que los dados poseen una misma forma cuadrada y son rodados al mismo tiempo*"; o P18 quien refiere que "*Todos estos resultados son igualmente probables, pues si hablamos de dados nos referimos a una figura geométrica que es el cubo que tiene la característica de tener todos sus lados iguales, al momento de lanzarlo no se va a inclinar hacia un lado especial por poseer sus lados iguales*.", en estos casos se le atribuye la equiprobabilidad de los casos posibles a factores deterministas como el hecho de que el objeto es de una cierta forma regular.

También hay sujetos que seleccionan esta opción porque posiblemente les parece la más natural pero no cuentan con argumentos convincentes; tal es el caso del participante P4 quien justifica su elección afirmando que "*La opción d me parece la más acertada, ya que al lanzar tres dados simultáneamente no se puede saber a ciertas cual es el resultado a obtener, motivo por el cual todos tienen la misma probabilidad*"

En relación con la determinación del espacio muestral que se corresponde con el experimento aleatorio de lanzar simultáneamente 3 dados; se evidencias importantes dificultades En relación con este punto en particular. De los 20 sujetos que realizan el cuestionario, tan solo 8 sujetos, lo que representa el 40% (P2, P5, P8, P9, P10, P11, P19 y P20) hacen referencia al espacio muestral o al menos consideran su existencia de manera explícita y al número de elementos que lo componen.

Sin embargo de estos 8, tan sólo 3 (P8, P9 y P20) aciertan en la determinación correcta del número de elementos que posee el espacio muestral recurriendo al principio de la multiplicación y argumentando que el espacio muestral está formado por 6^3= 216 elementos. Por lo que solamente el 15% de todos los individuos calculan correctamente el cardinal del espacio muestral.

Los 5 sujetos restantes que aunque hacen referencia al espacio muestral y al número de elementos que los conforman determinan este de manera incorrecta. Así por ejemplo para el participante P2 "*cada dado tiene 6 caras y se pudiese decir 6 caras por 3 dados serían 18 posibilidades que podría salir*." y de manera similar para el participante P19 "*que cada dado tiene 6 lados lo que quiere decir que en total contamos con 18 caras (6 caras x 3 dados que tenemos).*"; por lo que los argumentos empleados son similares y provienen de la operación de potenciación que en este caso es confundida o mal interpretada; ya que en vez de multiplicar reiteradamente los posibles resultados que se pueden obtener al lanzar un dado; se hace es la multiplicación de estos posibles resultados por el número de dados; lo cual es incorrecto.

En el caso del sujeto P5, que "*…se está considerando el mismo espacio muestral, es decir, las 6 caras de los dados*.", por lo que en realidad se ve cada lanzamiento de dado de manera aislada; lo que a su vez conlleva a la errónea conclusión de que todos los casos son igualmente probables; ya que no se ha configurado el espacio muestral compuesto por las ternas que representan los posibles resultados al lanzar los 3 dados de manera simultánea. Finalmente En relación con los participantes P10 y P11; en el primer caso hay una mala interpretación al considerar que el espacio muestral está formado por el conjunto dado y descrito por extensión como *S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24}* y sobre lo cual no es posible identificar la razón del mismo puesto que el sujeto no lo refiere; y el caso del participante P11, el mismo concluye que "*Se pueden obtener 2160 resultados, ya que un dado tiene 6 caras, es decir 6 opciones diferentes y aplicarle el factorial 6¡ = 6.5.4.3.2.1=720 Entonces como son tres dados simultáneos 720 x 3 = 2160*", lo cual también es erróneo y donde se mezclan un mal uso del factorial de un número entero positivo al confundir o malinterpretar este con los 6 distintos resultados que se pueden obtener al lanzar un dado y al multiplicarlo por 3 justificando tal paso con el hecho de que se trata de 3 dados; argumento que ya se había planteado en otros participantes

En relación con el tema de la teoría combinatoria se evidencia una gran deficiencia y poco uso de este tipo de argumentos en los razonamientos realizados; lo que trae como consecuencia la incorrecta determinación del número de elementos que tiene el espacio muestral. En este ítem en particular era necesario aplicar la regla de la multiplicación, la construcción de un diagrama de árbol; o considerar que los posibles resultados se trataban de variaciones con repeticiones; y esto fue realizado únicamente por los 3 sujetos que calcularon bien el espacio muestral (P8, P9 y P20) mediante el uso de la primera estrategia. En los otros 17 sujetos no se detectan indicios del uso de la teoría combinatoria.

Finalmente y en relación con al uso explícito de la Regla de Laplace en el cálculo de la probabilidad siguiendo un enfoque clásico; la misma es empleada tan solo por 3 participante (P9,P19 y P20) pero únicamente el participante P20 hace uso correcto de la misma para justificar su elección. En el caso del sujeto P19 está mal empleado el uso de la Regla de Laplace debido al sesgo de equiprobabilidad presente y a la inadecuada determinación del espacio muestral y a pesar de que el sujeto escoge la opción correcta, se llega a la misma por argumentos y razonamientos incorrectos.

Este ítem ha sido el que mayores dificultades y errores ha exteriorizado por parte de los informantes clave, ya que en todos los aspectos analizados, las respuestas han sido de bajo nivel explicativo y con un alto componente de errores en el razonamiento.

Análisis del ítem 5

Enunciado

Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales, numeradas del 1 al 5 ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra al girar la ruleta tres veces

(a) Obtener exactamente 2, 1 y 5 (en ese estricto orden)

(b) Obtener 2, 1 y 5

(c) Obtener de alguna forma dos veces el 1, y una vez el 5

(d) Las opciones (a), (b) y (c) son igual de probables

Respuesta Normativa

Este ítem también hace referencia a la determinación del espacio muestral, la teoría combinatoria y la aplicación de la Regla de Laplace y a la presencia del sesgo de equiprobabilidad.

De manera similar a la pregunta anterior, el espacio muestral está formado por los distintos arreglos o disposiciones de 3 números de un total de 5 (dígitos 1,2,3,4 y 5). Al hacer uso de la regla de la multiplicación; vemos que en este caso hay $5.5.5=5^3=125$ posibles números de 3 dígitos. Cada uno de ellos es considerado como un evento simple o elemental.

Si consideramos el evento obtener exactamente 2, 1 y 5 (en ese estricto orden) $E_1=\{(2,1,5)\}$ y así, al aplicarla Regla de la Laplace se tiene que la $P(E_1) = 1/125$

Para el evento E_2 de obtener 2, 1 y 5; como no se dice nada acerca del orden en el que pueden apareces, entonces en este caso, $E_2 =\{(2,1,5); (2,5,1); (1,5,2); (1,2,5); (5,1,2); (5,2,1)\}$; por lo que la probabilidad de este evento, al aplicar la definición clásica de Probabilidad está dada por $P(E_2) = 6/125$

Con respecto al tercer evento, que es el de obtener dos veces el 1 y una vez el 5, y al cual se denota E_3, se observa que está constituido por exactamente tres eventos elementales, a saber $E_3 = \{(1,1,5); (1,5,1); (5,1,1)\}$; con lo que se deduce al aplicar la Regla de Laplace que $P(E_3) = 3/125$.

Se pone en evidencia que la opción más probable es la opción b, ya que los eventos E_1, E_2 y E_3 no son equiprobables y donde hay más casos favorables en precisamente en E_2.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al ítem 5

En el Cuadro 7 se pueden apreciar las opciones escogidas por los participantes y donde se refleja que la opción correcta es escogida tan solo por cuatro, lo que representa el 20% del total de sujetos y la opción más seleccionada es la opción d con el 55%. Es importante resaltar que una cuarta parte de los participantes, es decir el

25% de los sujetos del estudio, no seleccionaron ninguna opción y se limitaron a respuestas como las que señalan los participante P3 y P13 de que "*En realidad no lo sé*", o P7 "*Ni idea, esto es muy complejo para mí*", o P10 "*No recuerdo el procedimiento" o* P12 "*No tengo idea de cómo resolver este ejercicio"*.

Cuadro 7

Distribución de respuestas del ítem 5

Opción escogida	Participantes	Total	%
a	----	0	0%
b	P8,P9, P17,P20	4	20%
c	----	0	0%
d	P1,P2,P4,P5,P6,P11,P14,P15,P16,P18,P19	11	55%
No contesta	P3,P7,P10,P12,P13	5	25%
Total		20	100%

Este ítem es similar al anterior; se ha cambiado es el experimento aleatorio. Se puede apreciar que el número de sujetos que no contesta se eleva con respecto al cuestionamiento anterior, por lo que parece que el contexto del planteamiento del experimento aleatorio pudiése influir en la comprensión del mismo.

Mientras que los mismos sujetos que contestaron correctamente el ítem anterior también contestan acertadamente a este y se les suma uno más para un total de 4 sujetos con la opción correcta (P8, P9, P17 y P20). Los sujetos P8 y P20 utilizan los mismos argumentos que en el ítem anterior, las cuales caen en la categoría de estrategias multiplicativas o combinatorias pero con la diferencia de que el participante P20 justifica su respuesta con el cálculo y la obtención de las probabilidades, mientras que para el P8 es suficiente con el breve análisis combinatorio que efectúa. De manera similar procede P9, sin embargo se detectan fallos en sus argumentos y cálculos efectuados a pesar de haber escogido la alternativa correcta.

La mayoría de los sujetos han seleccionado la opción d como la opción correcta; y en realidad esta alternativa refleja la presencia del sesgo de equiprobabilidad en los participantes. Aunque la generalidad de los sujetos escogen esta opción; los argumentos y razonamientos por los cuales llegan a ella son diversos. Por ejemplo el participante P2 señala que "*Todos pueden ser probables porque están girando la ruleta tres veces y hay 5 áreas iguales entonces en cada giro la probabilidad sería igual en cada área*" y que también es utilizado por el sujeto P14; dándole mayor peso en el argumento al hecho de tener áreas iguales lo que es sinónimo de equiprobables.

Otros casos como el del sujeto P1 quien indica que "La opción A, B y C son igual de probables" pero no esgrime ningún argumento que sustente este hecho, y de manera similar hace el sujeto P6; o el caso del sujeto P4 quien asocia el hecho de la suerte, el azar o lo aleatorio con la idea de igualmente probables pues afirma que "*…todas las opciones tienen la misma probabilidad de salir. Porque al girar la ruleta uno no sabe cual resultado que saldría*" y donde este mismo argumento es también utilizado por el sujeto P16 cuando señala que "*Cualquier resultado en realidad es probable, tomando en cuenta de rodarse al azar*". Todo lo anterior hace asumir que se confunde la equiprobabilidad de los eventos elementales con la no aparente equiprobabilidad de los eventos compuestos; lo cual afecta el uso y resultado al aplicar la definición clásica de Probabilidad a través de la Regla de Laplace.

Ahora bien, en lo que respecta al estudio del espacio muestral tan solo uno de los participantes (5%) hace mención del mismo de manera explícita; los restantes 19 sujetos (95%) no hacen ninguna referencia al cálculo del mismo o al número de elementos. El único participante que contesta es el participante P1, quien refiere que "*en este caso el espacio muestral es de* $5^3=125$ *casos posibles*", lo cual es correcto y los cálculos que hace posteriormente se basan en este valor.

En relación conl uso de la Teoría Combinatoria para el abordaje de este tipo de problemas; tan sólo 3 sujetos (P8, P9 y P20) hacen algún tipo de mención con algunos elementos vinculados con la misma. Sin embargo, tan sólo el participante P1 lo hace de manera correcta y expresamente al aplicar el principio de la multiplicación para determinar el espacio muestral, ya que el participante P8 hace mención al hecho de la repetición o no en la formación de los distintos arreglos. En el caso del participante P9 se hacen cálculos combinatorios para referirse a los diversos arreglos u ordenamientos. Sin embargo no es correcto este razonamiento en virtud de que los números combinatorios aplican a casos donde el orden en el arreglo no es importante, lo cual no aplica en este experimento aleatorio en particular.

Al no distinguir entre el número de un experimento aleatorio simple con respecto a un experimento aleatorio repetitivo o compuesto; se afecta entonces el espacio muestral que determina el número de casos posibles; así como la determinación equivocada de los eventos compuestos, lo que en consecuencia dificulta el cálculo de probabilidad mediante el enfoque clásico a través del uso de la Regla de Laplace o de manera similar, conduce a resultados erróneos.

Finalmente y En relación conl cálculo de probabilidad mediante el uso de la Regla de Laplace, hacen práctica de este medio los participantes P9, P11 y P20. En el caso del participante P9 éste utiliza la Regla de Laplace para determinar la probabilidad de cada uno de los eventos elementales que conforman el espacio muestral que consiste en hacer girar la ruleta una vez; más no para el cálculo de cada uno de los eventos compuestos descritos en el problema propuesto; ya que las probabilidades de los mismos son obtenidas mediante la teoría de eventos independientes, a pesar de que en ningún momento hace mención del porqué asume esta hipótesis de trabajo.

En el caso del informante clave P11, el mismo considera que tiene solamente 5 opciones (del 1 al 5) y como se pregunta por la posibilidad de obtener 2,1 y 5; esto se reduce a tres alternativas; con lo cual al aplicar la Regla de Laplace, se obtiene en cada caso una probabilidad de 3/5. Es claro que este razonamiento no es correcto puesto que no considera el espacio muestral adecuado ni tampoco la influencia que tiene el orden en los diversos resultados que se pueden obtener.

En lo que respecta al sujeto P20, además de determinar correctamente el espacio muestral y el cardinal del mismo; también establece de manera adecuada los eventos compuestos y el número de elementos que posee cada uno de ellos; lo cual le permite aplicar la Regla de Laplace de manera adecuada al establecer el número de casos posibles y el número de casos favorables.

Todo lo anterior conduce a inferir que existen importantes dificultades a la hora de abordar problemas que involucran espacios muestrales compuesto y repetitivos debido a la falta de determinación de espacios muestrales, el uso de la teoría combinatoria y el desconocimiento de la regla de Laplace.

Análisis del Problema 1

Enunciado

Hay un semáforo que regula el tráfico en cierto cruce y que puede encontrarse en uno de los siguientes estados: ROJO, VERDE y AMARILLO. ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea ROJO o VERDE?

Respuesta Normativa

En este problema se definen 2 eventos o sucesos elementales cuya probabilidad es desconocida, aunque esto no se menciona en el planteamiento. La presencia del sesgo de equiprobabilidad en este caso se evidencia cuando se le asigna de manera arbitraria la misma probabilidad a cada uno de estos eventos.

De acuerdo al marco de referencia de la presente investigación; en primer lugar es necesario determinar el espacio muestral que consiste de tres casos posibles, a saber; (a) Obtener Rojo en un instante determinado P(R), (b) Obtener amarillo P(A); y finamente (c) Obtener Verde en un momento determinado P(V). Si consideramos el evento E={Obtener Rojo o Verde}, la probabilidad de tal será la suma P(R) + P(V).

Para hallar este valor numérico podría necesitarse del establecimiento de ciertos supuestos o hipótesis previas; como por ejemplo asumir de manera explícita la hipótesis de equiprobabilidad después de ciertos argumentos que la sustenten; pero siempre bajo el principio de que de manera inicial, no es posible obtener a priori los valores de P(R), P(V) y P(A).

Sólo bajo este razonamiento sería posible obtener como conclusión que aunque no es posible obtener el valor numérico P(R) + P(V); puesto que no se conocen los valores de las probabilidades de los sucesos elementales, si se considera el principio de indiferencia; entonces P(R) = P(V) = P(A) = 1/3; con lo cual y al aplicar la Regla de Laplace, se obtiene que P(E) = P(R) + P(V) = 1/3 + 1/3 = 2/3.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al problema 1

A continuación en el Cuadro 8 se describe el comportamiento de las respuestas dadas, siguiendo lineamientos propuestos por Barragues, Guisasola y Morais (2005)

Cuadro 8

Categorización de respuestas al problema 1

Categoría de las Respuestas	Participantes	Total	%
Respuesta correcta de baja calidad explicativa	P2,P16	2	10%
Respuesta Correcta	---	0	0%
Sesgo de Equiprobabilidad	P1,P5,P6,P7,P8,P9,P11,P12,P14,P15,P20	11	55%
Respuesta incodificable	P3,P4,P10	3	15%
No contesta	P13,P17,P18,P19	4	20%
Total		20	100%

La categoría "sesgo de equiprobabilidad" recoge aquellas respuestas en las que se asume de forma implícita que la probabilidad de cada uno de los tres estados del semáforo es 0,33, lo cual es notablemente lo poco razonable que, en general, resulta este supuesto a la hora de abordar la situación planteada ya que no existiría a priori ninguna razón que justifique el asumir este supuesto. El análisis detallado de la situación planteada establece y reconoce que las probabilidades de cada uno de los estados del semáforo son desconocidas, pero que se decide añadir de manera explícita la hipótesis de equiprobabilidad, esto es, se establece explícitamente que P(R) = P(V) = P(A) = 1/3 y, en consecuencia, se obtiene que la probabilidad del evento {R, V} está dada por P({R, V}) = P(R) + P(V) = 2/3

Entre algunos razonamientos expuestos por los informantes claves y que reflejan la presencia de dicho sesgo tenemos por ejemplo el informante clave P6 indica que "*El semáforo puede encontrarse en uno de los 3 estados, por lo tanto la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea rojo es 1 de 3 por lo tanto su probabilidad es 33,33%*"; de manera similar explica de manera simbólica el sujeto P7 que "*Los tres eventos probabilísticos de este caso son A={semáforo en rojo} P(A)=1/3, B={Semáforo en Verde} P(B)=1/3, C={Semáforo en Amarillo} P(C)=1/3*", también el participante P15 emite una respuesta parecida al señalar que "*Definimos los eventos y el espacio muestral S = { Amarillo, Verde, Rojo} N° S = 3 A={Rojo} N° A = 1, B={Verde} N° B = 1, C={Amarillo} N° C = 1 P(A) = 1/3, P(B) = 1/3 Entonces por teorema de probabilidad clásica, ya que los eventos son mutuamente excluyentes, tenemos P(A∪B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/3 = 0,6*"

Se evidencia que el 55% de las respuestas reflejan el sesgo de equiprobabilidad en la mayoría de los informantes claves; que ninguno explica correctamente que no es posible calcular la probabilidad solicitada debido al hecho de que la probabilidad de cada uno de los estados del semáforo o bien la fracción de tiempo que el semáforo se mantiene en cada uno de los estados es desconocida; y que tan sólo 2 participantes, lo que representa el 10%, emiten una respuesta medianamente correcta pero sin embargo, estas respuestas no profundizan o al menos no permiten avanzar en el análisis y no explican que aunque la probabilidad de cada uno de los estados del semáforo sea desconocida, se podría obtener una expresión general de la probabilidad pedida en términos de los parámetros P(R), P(V) y P(A).

Por ejemplo, el participante P2 describe que "*Existe tiempo específico que regulan el cambio de las luces en los semáforos*", mientras que el sujeto P16 refiere que "*Considero que en este caso la probabilidad más bien estaría regida por un tiempo determinado, ya que por cada cambio de luz se ha sistematizado un tiempo* *preciso*"; ambos están en lo correcto, más sin embargo con esta conclusión en mano y aún y cuando todavía es posible determinar una expresión para tal probabilidad, ninguno llega a la misma.

Por otro lado hay un 20% de los sujetos que no contestan este planteamiento o refieren que no saben o no comprenden la situación, mientras que un 15% realizan razonamientos que no reflejan ideas claras con respecto a la respuesta esperada al problema. Por ejemplo, el participante P10 realiza un pequeño diagrama representando el espacio muestral, describe los eventos simples o elementales pero finalmente señala que "*recuerdo con exactitud el procedimiento completo de este ejercicio*" a lo que ciertamente no es posible determinar si tiene o no el sesgo de equiprobabilidad debido a que no plasma ninguna idea relacionada con el cálculo de la probabilidad. De manera similar la respuesta del informante P3 refiere que "*Yo diría que rojo, porque es la luz que más tiempo tarda en cambiar*" lo cual ciertamente no es una respuesta aceptable o acorde al planteamiento propuesto; y en el caso del participante P4, el cual indica que "*La probabilidad es la misma porque en cualquier segundo la luz puede cambiar*" el mismo asume que tanto la probabilidad de que el semáforo esté en verde o en rojo son las mismas, pero no explicita cuales en efecto tal probabilidad ni emite razón alguna para justificar este hecho ni tampoco parece reflejar que se trata de la presencia de un evento compuesto.

De manera global se puede mencionar que este problema refleja dificultades a la hora de su abordaje por parte de los informantes claves debido a la presencia del sesgo de equiprobabilidad y al no discernimiento acerca del asumir la hipótesis de equiprobabilidad, y en general el desempeño en este ítem ha sido bastante bajo. Además como el desempeño de todos los participantes fue prácticamente el mismo, se pudiese inferir que el proceso de instrucción formal de la Teoría de Probabilidad no es suficiente para eliminar o hacer ver la presencia de dicho sesgo en los estudiantes, lo cual hace reflexionar sobre el modo de enseñanza de estos contenidos.

Análisis del Problema 2

Enunciado

Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión?

Respuesta Normativa

En esta situación, se pone en evidencia la comparación de probabilidades y con ella el razonamiento proporcional. Se incluye factores distractores dentro de la situación tales como considerar que Pilar tiene más posibilidades porque es más inteligente o porque es mayor.

Adicionalmente, en este problema, tanto Pilar como Rosa tienen la misma probabilidad de extraer una bola blanca. Para esto basta con considerar que en el caso de Pilar, el espacio muestral consiste de las 60 bolas (40 blancas y 20 negras); entre tanto que en el caso de Rosa, el espacio muestral lo conforman las 45 esferas en su poder (30 blancas y 15 negras).

Al considerar la selección de una bola como justa; entonces cada de las esferas en cada una de las cajas tienen la misma posibilidad de ser escogidas; por lo que estamos en presencia del principio de equiprobabilidad; y bajo esta condición se puede aplicar la definición clásica de probabilidad evidenciada en la Regla de Laplace.

En este caso, sea el evento E_1= {Pilar obtiene una bola blanca) y E_2={Rosa obtiene una bola blanca}, entonces $P(E_1) = 40/60 = 4/6 = 2/3$ y $P(E_2) = 30/45=10/15=2/3$. En consecuencia ambas tienen la misma probabilidad de obtener una bola blanca.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al problema 2

En el caso de las respuestas a este enunciado, 18 de los 20 sujetos participantes en el estudio contestan de manera acertada que la probabilidades en ambos caos es la misma, tan sólo los sujetos P4 y P10 llegan a conclusiones erróneas al respecto. Veamos a continuación cuales fueron las estrategias utilizadas por los sujetos para dar respuesta a este planteamiento. En el Cuadro 9 se describen las estrategias utilizadas por los sujetos del estudio y los porcentajes correspondientes.

Cuadro 9

Estrategias empleadas en la comparación de probabilidades al problema 2

Estrategia Empleada	Participantes	Total	%
Comparación del número de casos posibles	P2,P3	2	10%
Comparación del número de casos favorables	P4,P10	2	10%
Comparación del número de casos desfavorables		0	0%
Aditivas		0	0%
Correspondencia	P5,P8,P12,P14,P16,P18	6	30%
Multiplicativas	P1,P6,P7,P9,P11,P17,P19,P20	8	40%
Otras (….)	P13,P15	2	10%
Total		20	100%

Las estrategias más utilizadas son las referidas en primera instancia a estrategias multiplicativas con el 40%; y en segundo lugar estrategias de correspondencia con un 30%. Como se puede apreciar el 70% de los informantes claves utilizan estrategias de comparación de dos variables. Con respecto a las estrategias multiplicativas, las cuales se basan en el uso de la Regla de Laplace; todos los informantes claves aciertan la respuesta correcta; por ejemplo el sujeto P9 señala en su respuesta que "*Tenemos que en la caja de Pilar hay 40 bolas blancas y 20 negras. Se define B= Obtener una blanca, Así P(B)=40/60=2/3 P(B)=0,66. Por otro* *lado en la caja de Rosa hay 30 bolas blancas y 15 negras. Se define B = Obtener bola Blanca, Así P(B)= 30/45=6/9=2/3 P(B)=0,66. Por lo tanto sin importar el número de años que posea cada una, existe la misma probabilidad de obtener una bola blanca para las dos*"; argumentos similares han sido utilizados por quienes recurren a esta estrategia de resolución.

En relación con las estrategias de correspondencia empleadas por los participantes, la totalidad de los mismos acierta la respuesta correcta, pero en este caso los argumentos empleados son variables. Por ejemplo, P5 refiere que las probabilidades son las mismas puesto que "*los eventos son proporcionales"*; queriendo en realidad reflejar que son proporcionales los valores de casos favorables y casos posibles en ambas cajas; similar argumento es empleado por el sujeto P8.

Por otro lado el participante P12 y P14 establecen que las probabilidades son las mismas por medio de una relación proporcional a través de una regla de tres simple y obteniendo los mismos porcentajes en cada caso tal y como refleja P12 en su respuesta "*Pilar 10 años. Caja 40 bolas blanca y 20 bolas negras Rosa 8 años. Caja 30 bolas blanca y 15 bolas negras: Pilar 40 B blancas 66,6% y 20 B negras 33,3% 60=100%, Rosa 30 B blancas 66,6% y 15 B negras 33,3% 45=100%, con lo observado tienen la misma probabilidad de sacar una bola blanca*"

En el caso de los sujetos P16 y P18 hacen referencia al hecho de que al comparar los datos en ambas cajas, el número de bolas negras se corresponde con la mitad de bolas blancas. Sin embargo este argumento en particular no es del todo correcto; pues es posible que exista en ambas cajas una relación donde la proporción de bolas negras sean la mitad de las bolas blancas en ambas cajas pero que las probabilidades sean diferentes. Por ejemplo si en la segunda caja hay 100 bolas de las cuales 50 son blancas; tanto en la primera caja con en la segunda hay la mitad de bolas negras pero las probabilidades son diferentes en ambas cajas.

Con respecto a las estrategias empleadas y que consideran una sola variable, los informantes claves P2 y P3 utilizan la comparación de casos posibles; por ejemplo P3 indica que "… *Todo es de la cantidad de bolas en cada caja*". Es claro que esta estrategia tampoco funcione siempre debido a que no sólo basta con garantizar que hay más bolas en una caja que en otra para establecer que la mayor probabilidad sería la de la caja con más esferas. Además ninguno de los dos informantes aclara si efectivamente las probabilidades son iguales o no y se dejan llevar solamente por los factores distractores de la edad y la inteligencia.

Con respecto a los participantes que utilizan la estrategia de comparación de casos favorables, P4 y P10, ambos emiten una respuesta errónea puesto que consideran que Pilar tiene más posibilidades de sacar una bola blanca pues ella cuenta con más bolas blancas que Rosa; obviando el espacio muestral en cada caja y su influencia sobre el resultado, así por ejemplo P4 afirma que "*Considero que Pilar tiene más posibilidades de sacar una bola blanca porque tiene mayores número de ellas*", mientras que P10 apunta hacia un argumento muy parecido al indicar que "*…no es que Pilar saque más porque sea mayor o más inteligente sino porque según el comportamiento de la función, o sea según el rango en que se desarrolle es que va a dar el resultado; obviamente al tener más bolas Rosa que Pilar habrá mayor oportunidad a que esta ocurra*". Por lo tanto en ambos casos se comparan tan solo la cantidad de casos favorables y es el único factor que causa influencias sobre el resultado.

Finalmente y En relación con los sujetos P13 y P15, ambos contestan de manera acertada que las probabilidades en ambas cajas coinciden; sin embargo se desconoce la estrategia empleada por cada uno de ellos para obtener tales resultados.

Análisis del Problema 3

Enunciado

Suponga que participa en un juego que consiste en lanzar dos dados de simultánea, ¿Cuales de los siguientes eventos consideras tú que es más probable que suceda: Obtener de alguna manera un 5 y un 6; u obtener 6 en los dos dados.

Respuesta Normativa

A la luz de la teoría del enfoque clásico de probabilidad, es necesario recurrir a la teoría combinatoria para determinar el espacio muestral. Por ejemplo, a través de la regla de la multiplicación o por medio de una representación icónica con un diagrama de árbol; es posible obtener los 36 posibles resultados al lanzar dos dados (que se supone están perfectamente balanceados); o incluso es posible obtener este mismo resultado considerando que se trata de variaciones con repeticiones. Además, cada uno de estos resultados son considerados como equiprobables.

Ahora bien, consideremos el evento E_1={se obtiene un 5 y un 6}, se puede describir de manera explícita tal evento como E_1={(5,6); (6,5)}. Por otra parte, el evento E_2={Se obtiene doble 6} es un suceso elemental ya que solo puede ocurrir de una sola forma; cuando se obtiene justamente el par (6,6).

En consecuencia, es más probable obtener un 5 con un 6; que obtener un doble 6; ya que $P(E_1)=2/36=1/18$; mientras que $P(E_2)=1/36$.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al problema 3

Por medio de las respuestas que emiten los informantes claves ante este problema, se analizan los aspectos relacionados con la teoría combinatoria, la determinación del espacio muestral, el cálculo de probabilidad y el sesgo de equiprobabilidad.

En el Cuadro 10 se aprecia en primer lugar el porcentaje de respuestas clasificadas según categorías establecidas por el autor de la presente investigación, acompañadas por el número total de participantes que emiten una respuesta correspondiente a algunas de estas categorías preestablecidas que han sido tomadas y adaptadas de Saenz de Castro (1998).

Cuadro 10

Categorización de respuestas al problema 3

Categoría de las Respuestas	Participantes	Total	%
Respuesta correcta de baja calidad explicativa	P4	1	5%
Respuesta Correcta	P5,P8,P9,P16,P20	5	25%
Respuesta incorrecta	P1,P6,P7,P10,P11,P13,P15,P19	8	40%
Respuesta incodificable	P2	1	5%
No contesta	P3, P12,P14,P17,P18	5	25%
Total		20	100%

Apenas el 25% del total de los informantes claves acierta correctamente a la respuesta del problema; el 5% emite una respuesta parcialmente correcta; mientras que un 40% de los sujetos contesta de manera errónea y otro 25% no contesta o refieren no entender o no saber cómo abordar y resolver el problema. Por tanto el 70% de los sujetos confrontan dificultades a la hora de abordar el problema en cuestión; bien sea por no saber resolverlo o por proporcionar una respuesta incorrecta.

A continuación se analiza al grupo de informantes que aportaron respuestas correctas o parcialmente correctas, lo que en total suma 6 futuros docentes de Matemática. Del total de sujetos que contestan correctamente, P5,P8,P16 y P20 justifican su respuestas alegando que existen dos maneras de obtener un 5 y un 6; mientras que el doble 6 se puede obtener tan sólo de una forma; es decir, realizan una comparación de los casos favorables; por ejemplo el sujeto P5 responde que "*De acuerdo con mi noción de probabilidad, es más probable obtener un 5 y un 6 que 6 en ambos dados simultáneamente, pues en el primer evento se consideran 2 opciones y en cambio en el segundo sólo se estable una opción*".

Tan sólo el sujeto P9 recurre a la aplicación de la Regla de Laplace para justificar su razonamiento. Sin embargo, en el desarrollo de su argumentación acude a la hipótesis de independencia de eventos; por lo cual aplica en realidad la Regla de Laplace al experimento aleatorio que consiste en lanzar el dado en una oportunidad. A continuación se describe lo realizado por este informante "*Sean P=Obtener un 5 y un 6 C=Obtener 5 S=Obtener seis, P(P)=1/6 . 1/6 + 1/6 . 1/6 = 1/36 + 1/36= 2/36=*

1/18 = 0,05. Por otro lado, sea F= Obtener 6 en los dos dados s=Obtener 6, P(F)=1/6 . 1/6 =1 /36=0,02. Así, es más probable obtener un 5 y un 6”.

De las respuestas recogidas se evidencia que los futuros docentes de Matemática poco recurren al uso de la Regla de Laplace para justificar sus razonamientos, y en consecuencia hacen poco uso del cálculo de probabilidad bajo el enfoque clásico; ya la mayoría de sus argumentos se basan en comparar los casos favorables; lo que conduce a pensar en un dominio elemental del enfoque anteriormente referido.

En relación con el grupo de informantes que responde de manera incorrecta –un total de 8- todos excepto el participante P10 coinciden en afirmar que los dos eventos son igualmente probables; lo cual es característico de los sujetos con sesgo de equiprobabilidad; ya que no son capaces de distinguir entre eventos elementales o simples y eventos compuestos; debido a que se confunden o no se tiene claro que el hecho de que los eventos simples sean equiprobables; entonces los eventos compuestos que provienen de espacios muestrales producto también lo sean. Por ejemplo, el sujeto P1 responde que “*Los dos tienen la misma probabilidad (a simple inspección)*”, o también la respuesta similar que brinda el sujeto P19 al afirmar que “*Ambos eventos pueden ocurrir, tienen la misma posibilidad de obtener alguno de los dos resultados; porque esto es un evento equiprobable”*.

Nuevamente se aprecia que entre los argumentos utilizados por este grupo de futuros docentes de la especialidad de Matemática no destaca el del uso de la Regla de Laplace, lo que hace sugerir poca destreza en el manejo de la misma y poca comprensión del enfoque clásico de la Probabilidad.

En lo que respecta a la determinación del Espacio muestral y número de elementos que lo componen, ninguno de los 20 informantes claves describe de manera explícita el espacio muestral que describe el experimento aleatorio en cuestión. Sin embargo, en el caso de los participantes P9 y P11 se hace mención al hecho de que el mismo está conformado por 36 elementos a pesar de que ninguno de los dos indicó cómo se obtuvo tal valor.

Un tema estrechamente vinculado a la determinación de los espacios muestrales asociados a un experimento aleatorio, es el de la teoría combinatoria. En este sentido, los participantes P5, P8, P9, P16 y P20 – los mismos que contestaron correctamente al planteamiento- refieren que existen dos posibles manera de obtener un 5 y un 6 al lanzar los dos dados. Por ejemplo P16 informa que "*por la cantidad diversa de números contenidos por los dados se da la posibilidad de que salgan varios, 5 y 6 o 6 y 5*", y argumento similar emplea P20 cuando reseña que "*Como el 5 y el 6 se pueden obtener de dos manera 5-6 y 6-5 pero no con el 6-6, entonces es más fácil obtener 5 y 6 que dos veces el 6*".

Sin embargo ninguno de los 20 informantes claves hace uso de elementos teóricos para determinar el espacio muestral ni el número de casos favorables; y de hecho la mayoría no hacen la distinción entre el par (5,6) y el par (6,5) que representarían 5 en el primer dado y 6 en el segundo dado; o 6 en el primer dado y 5 en el segundo, lo cual conduce a considerar la aparición del sesgo de equiprobabilidad. Entre algunas posibles razones para esto, podrían ser por ejemplo que no hacía falta por la sencillez del experimento o por desconocimiento de la naturaleza del mismo, lo que traería como consecuencia la no identificación del espacio muestral adecuado.

Análisis Problema 4

Enunciado

Santiago tiene una bolsa negra que contiene cuatro canicas, cada una de ellas está etiquetada con los siguientes dígitos: 4, 6, 8 y 1. El pide a un compañero que seleccione una canica de la bolsa y anote el número, y después regresa la canica a la bolsa. Este procedimiento se repite hasta completar 3 dígitos. ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos se espera que puedan obtener el amigo de Santiago?

Respuesta Normativa

Se trata de un problema que involucra la determinación del espacio muestral asociado al experimento aleatorio extraer tres canicas de un total de 4 canicas numeradas (4, 6, 8 y 1). Se recurre entonces a la teoría combinatoria. En este caso se trata de variaciones con repetición, debido a que la extracción se hace con reemplazamiento de la canica, esto es, una vez que se escoge la canica y se anota el número que tiene, se incorpora ésta nuevamente a la bola.

Por tratarse de una variación con repetición; donde se toman 3 de 4 objetos; entonces, la cantidad total de números que se pueden obtener es de $4.4.4=4^3=64$ posibles números diferentes de 3 cifras. Otra alternativa para obtener este mismo número es mediante la aplicación del principio de la multiplicación o mediante la construcción de un diagrama de árbol.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al problema 4

En el Cuadro 11 se aprecia en primer lugar el porcentaje de respuestas clasificadas según categorías establecidas por el autor de la presente investigación.

Cuadro 11

Categorización de respuestas al problema 4

Categoría de las Respuestas	Participantes	Total	%
Respuesta correcta de baja calidad explicativa	---	0	0%
Respuesta Correcta	P1,P8,P19,P20	4	20%
Respuesta incorrecta	P4, P5,P6,P9,P10,P17	6	30%
Respuesta incodificable	P2,P11,P16	3	15%
No contesta	P3,P7,P12,P13,P14,P15,P18	7	35%
Total		20	100%

Tan solo 4 sujetos contestan de manera correcta al planteamiento propuesto, P1,P8,P19,P20. En los 4 casos se recurre al uso explícito de la regla de la multiplicación para dar la respuesta. Tan sólo en el caso del participante P1 se recurre al uso de la estrategia de diagrama de árbol para describir los posibles resultados que se pueden obtener. Por ejemplo el participante P20 señala que "*Se supone que para escoger cada uno de los tres dígitos hay siempre 4 alternativas por lo que hay un total de* $4.4.4=4^3=64$ *números distintos de tres cífras*"; lo cual es similar al argumento empleado por ejemplo por el sujeto P1 quien refiere que "*Se esperan 64 números diferentes de 3 dígitos. Eso creo porque son 4 números pero se escogen sólo tres de esos cuatro siempre, pues se valen números con las mismas cifras*".

Este ítem es que el mayor número de respuestas en blanco ha generado, un total de 7 sujetos, lo cual representa el 35%; lo que al agregarle el 30% de los sujetos que no contestaron correctamente y el lote de respuestas incodificables; da luces de lo complejo de este problema para los futuros profesores de Matemática.

En relación a los sujetos con respuestas incorrectas, interesa particularmente el caso del informante clave P9, el cual responde a este cuestionamiento de la siguiente manera "*Como la extracción se da con reemplazo, puede darse el caso de obtener números de una misma cifra como 1, 1, 1; 4, 4, 4; 6, 6, 6 y 888. Sin embargo excluimos estos resultados del espacio muestral. Así tenemos que podemos obtener los siguientes números diferentes de 3 cifras S = { (1, 4, 6); (1, 6, 4); (6, 4, 1); (4, 6, 1); (6, 1, 4); (4, 1, 6), (1, 4, 8); (1, 8, 4); (4, 1, 8); (4, 8, 1); (8, 1, 4); (8, 4, 1);(1, 6, 8); (1, 8, 6); (6, 8, 1); (6, 1, 8); (8, 1, 6); (8, 6, 1); (8, 6, 4); (8, 4, 6); (6, 8, 4); (6, 4, 8); (4, 6, 8); (4, 8, 6)}.Así se pueden obtener 24 números de tres diferentes dígitos.*".

En este caso, asocia directamente la cantidad de números diferentes al cardinal del espacio muestral, y los empieza a describir por extensión; en el proceso elimina –sin ninguna justificación, pero deja en claro que está consciente de esto- a aquellas ternas donde coinciden los dígitos. Adicionalmente deja de lado otros posibles resultados, en particular aquellos donde se repite un dígito; de lo cual se infiere que en la mente del sujeto no estaba permitido que se repitiese un dígito si este ya había salido previamente; esto a pesar de que reconoce perfectamente que el muestreo es con sustitución o reemplazo.

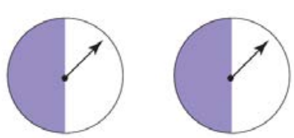
En el caso del sujeto P5, éste hace uso del factorial de un número y determina que "*se espera obtenga 24=4.3.2.1 números diferentes de tres dígitos, de acuerdo con mi noción de permutación*", a pesar de que reconoce al principio que no comprende bien el planteamiento del problema propuesto. Argumento similar y errádo utiliza el sujeto P10 quien procede a permutar los 4 dígitos en cuestión hasta obtener 4 números de 4 cifras diferentes; con lo cual por ejemplo se evidencia que no reconoce el principio de sustitución con el cual se hace el experimento, ni reconoce que los números formados deben ser de tres dígitos solamente.

En relación con el también elevado número de sujetos con respuestas incodificables, entran en este grupo, por ejemplo la respuesta del sujeto P11 que intenta realizar una representación pictórica del planteamiento pero no lo conduce a nada y en consecuencia no continúa; o la respuesta del sujeto P16 quien señala que "*En mi opinión en impredecible, pueden ser dos diferentes, o tal vez uno. Se da la existencia de varias probabilidades*".

Análisis del Problema 5

Enunciado

Un juego de la feria consta de dos ruletas como las que se muestran en la figura. Un jugador gana un premio sólo si ambas flechas caen en el área sombreada, cuando se hace girar una vez cada una de las flechas. ¿Consideras que el juego anterior es equitativo?



Respuesta Normativa

La situación planteada no representa un juego justo o equitativo. Ya que en realidad hay más probabilidades de perder que de ganar. Para argumentar este razonamiento; se recurre a los principios básicos del enfoque clásico de la probabilidad como la determinación del espacio muestral y la aplicación de la Regla de Laplace cuando se está en presencia de sucesos elementales equiprobables.

En este caso el espacio muestral está constituido por todos los posibles resultados al hacer girar ambas ruletas al mismo tiempo. Esto significa que el espacio muestral está conformado por el conjunto S= {(s, s); (s, ns), (ns, s), (ns, ns)}; donde s significa que la aguja cae en la región sombreada y ns significa que la región cae fuera del área sombreada.

Como se puede apreciar, la posibilidad de ganar se reduce solamente al evento elemental (s,s) mientras que tiene como posibilidades para perder a los eventos elementales (s, ns); (ns, ns) y (ns, s). En consecuencia, el juego no es equitativo en virtud de que P(Ganar)=1/4 mientras que la P(Perder)=3/4

En este ítem se analizan nuevamente los aspectos temáticos vinculados al estudio de algunas ideas estocásticas fundamentales relacionados con la teoría combinatoria, la determinación del espacio muestral, el cálculo de probabilidad y el sesgo de equiprobabilidad.

Análisis de las Respuestas de los sujetos al problema 5

En el Cuadro 12 se aprecia el comportamiento de las respuestas proporcionadas por los sujetos de estudio. Tan solo el 30% de los sujetos de estudio contestan correctamente ante el problema planteado; pero nada más dos sujetos emiten argumentos del todo correctos para justificar sus respuestas; mientras que el restante 70% contesta de manera incorrecta o no se considera capaz de responder ante tal cuestionamiento. De hecho este ítem es el que cuanta con mayor número de respuestas incorrectas- 8 en total- lo que representa un 40% de los sujetos. A continuación se analizan en profundidad las respuestas emitidas por los sujetos de estudio en cada una de las categorías propuestas.

Cuadro 12

Categorización de respuestas al problema 5

Categoría de las Respuestas	Participantes	Total	%
Respuesta correcta de baja calidad explicativa	P5,P6,P15	3	15%
Respuesta Correcta	P1,P8,P20	3	15%
Respuesta incorrecta	P2,P4,P7,P9,P11,P14,P16,P19	8	40%
Respuesta incodificable	P10	1	5%
No contesta	P3,P12,P13,P17,P18	5	25%
Total		20	100%

En relación con los tres sujetos que emiten las respuestas correctas; dos de estos – los sujetos P8 y P20- recurren a los mismos argumentos. Por ejemplo, en el caso del sujeto P8, y En relación con si el juego es o no equitativo, el mismo refiere que "*No. En el juego está la posibilidad de que ambas flechas caigan en el lado blanco, que la flecha de la primera ruleta caiga en el lado sombreado y la otra no y viceversa, y que ambas caigan en el lado sombreado que es la opción ganadora. Es decir de 4 posibilidades solo una es ganadora por lo tanto no es equitativo*."

De manera análoga el sujeto P20 utiliza este mismo tipo de argumentación para justificar si respuesta, la cual afirma que "*No parece equitativo pues hay más oportunidades de perder que de ganar ya que para ganar debe caer en las dos zonas sombreadas pero pierde si cae en las dos zonas blancas o en una blanca y una sombreada (lo que puede pasar de dos formas distintas)*."

Se puede inferir que en ambos casos se aprecia de manera implícita el espacio muestral y el número de elementos que lo constituyen; así mismo, se reconoce la diferencia entre los eventos simples (s,ns) y (sn,s); sin embargo y a pesar de estos argumentos contundentes y correctos; ninguno recurre de manera explícita al uso de la Regla de Laplace para confirmar sus hallazgos, aún y cuando si es posible reconocer en sus respuestas los casos posibles y los casos favorables.

El otro sujeto, el participante P1 considera que la probabilidad de caer en el área sombreada en cada ruleta es igual a 1/2; lo cual es cierto; pero entonces concluye que la probabilidad de ganar el juego es 1/4, es decir, el producto de ambas probabilidades de los eventos elementales; lo cual es válido debido al hecho de la presunción de la independencia de eventos, lo cual es usual suponer en el caso de los juegos de azar como lo es el de la ruleta. En este caso en particular si se hace uso de la Regla de Laplace pero no sobre en atención al experimento de las dos ruletas sino que se considera cada una por separado; por lo tanto no se trabaja sobre la base del espacio muestral compuesto y la respuesta se da en función de la teoría axiomática de la probabilidad.

En relación con los 3 sujetos que emiten una respuesta correcta pero de baja calidad explicativa, entran en esta categoría aquellos que efectivamente afirman que el juego tal y como está planteado no es equitativo; pero los argumentos empleados no son suficientes para afirmar ciertamente esta conclusión o; por otro lado, utilizan argumentos falaces a pesar de obtener una respuesta correcta. Un caso de una respuesta correcta pero obtenida a través de un razonamiento incorrecto es el planteado por el participante P6 afirma que "*El juego no es equitativo porque la ubicación de la flecha no están a la mitad del área sombreada y no sombreada, aparte las dos flechas tienen que caer en la parte sombreada*." Obviamente la ubicación de la flecha en una de las zonas de la ruleta nada tiene que ver con la manera en como está planteado el juego y a si es justo o no el mismo. Además el sujeto hace el análisis basado en la figura propuesta en el planteamiento del problema y no en la realidad del experimento en sí.

También el participante P15 hace referencia a la figura y no a la naturaleza y condiciones del juego planteado y hace mención al hecho aparente de que no lo considera equitativo "…*ya que según la figura el área sombreada no está en la mitad de la figura, y para que la equidad exista debe existir igualdad de condiciones, es decir, 50% de ganar, 50% de perder*". Este razonamiento no es correcto a pesar de serlo la respuesta plasmada por el sujeto. Por ejemplo el hecho de que las zonas sean o no sean idénticas en relación a las proporciones sombreadas y no sombreadas no es impedimento para hacer planteamientos similares. Este argumento de las aparentes diferencias entre las áreas cubiertas por la zona sombreada también es empleado por el sujeto P5 quien esgrime que "*el jugador debe girar de tal manera que ambas queden en el área sombreada para poder ganar un premio sin la garantía de que el área sombreada en ambas ruletas tenga la misma dimensión*".

Con respecto al grupo de sujetos que contestan de manera incorrecta, los participantes P2,P7,P9,P11,P14,P16 y P19 coinciden en afirmar que el juego si es equitativo debido al hecho de que en ambas ruletas la mitad está sombreada y la otra mitad no, lo que les pudiese hacer pensar que esto conlleva inmediatamente a la idea errónea de un juego justo puesto que hay la misma posibilidad de caer en una o en otra zona; lo que se traduce en un desconocimiento o la no consideración de los distintos casos posibles que se pueden presentar independientemente de si las zonas están distribuidas o no de forma similar.

Por ejemplo, el informante P2 reseña que "*Claro que es equitativo porque es la misma posibilidad, porque la ruleta está a mitad*"; así mismo el sujeto el sujeto P9 responde ante este cuestionamiento que "*Para ambas figuras las dos áreas, sombreada y en blanco se pueden percibir que son de la misma proporción, por lo tanto existe la misma probabilidad caer tanto en el área blanca como en la sombreada. Esto quiere decir que como el juego se gana si ambas flechas de la ruleta caen en el área sombreada, y existe igual probabilidad para ambas áreas, el juego puede considerarse como equitativo*".

Lo anterior evidencia la presencia del sesgo de equiprobabilidad puesto que no se diferencia entre los resultados de cada ruleta por separado y el resultado conjunto producto de hacer girar ambas ruletas; debido a que se confunde la equiprobabilidad de caer en la zona sombreada o no sombreada en cada ruleta y automáticamente se le atribuye esta misma cualidad o característica al evento compuesto de caer en ambas zonas sombreadas.

En relación con el cálculo del espacio muestral; en ninguno de los 20 informantes se describe de manera explícita el mismo, recurriendo a la notación conjuntista o determinan el cardinal de dicho conjunto. Únicamente los participantes

P8 y P20 hacen mención de los casos posibles. En ambos, indican de manera correcta las distintas alternativas que hay En relación conl lugar donde puede caer la flecha en ambas ruletas al mismo tiempo y distingue el orden en la obtención de los resultados cuando las zonas no son las mismas. Por ejemplo P8 afirma "…*que la flecha de la primera ruleta caiga en el lado sombreado y la otra no y viceversa…*" y explicita que se trata de 4 casos exactamente. Mientras que en el caso del sujeto P20 "… *pierde si cae en las dos zonas blancas o en una blanca y una sombreada (lo que puede pasar de dos formas distintas)*."

En relación con el uso de la teoría combinatoria; ninguno de los 20 informantes recurre a su uso para obtener una respuesta. No se hacen representaciones gráficas como diagramas de árbol ni se hace uso del principio de la multiplicación para determinar los resultados posibles, por lo que nuevamente parece inferirse las serias dificultades que confrontan los sujetos para analizar y resolver problemas de probabilidad bajo un enfoque clásico en el cual es necesario recurrir a técnicas combinatorias.

Análisis Grupal de Ítems y Problemas

En este apartado, se realizó un análisis grupal de todos los reactivos descritos en las dos partes del cuestionario. Tanto los ítems como los problemas fueron asociados y organizados en función de las temáticas que se pretendieron analizar y relacionadas con el enfoque clásico de probabilidad, a saber (a) Comparación de probabilidades (razonamiento proporcional), (b) Presencia del sesgo de equiprobabilidad, (c) Razonamiento combinatorio, (d) Determinación del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, y (e) Regla de Laplace.

En el Cuadro 13 se presenta la distribución de ítems y problemas según temáticas abordadas, lo cual fue el primer paso para proceder a analizar el desempeño de los sujetos de estudio en torno a cada tópico.

Cuadro 13

Distribución de ítems y problemas según temáticas abordadas

Temáticas que abordan	Ítems					Problemas				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Comparación de Probabilidades	x	x	x				x			
Sesgo de Equiprobabilidad				x	x	x				x
Razonamiento Combinatorio				x	x			x	x	x
Espacio Muestral				x	x			x	x	x
Regla de Laplace	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Análisis de Ítems y Problemas de Comparación de Probabilidades

En relación al primer grupo de preguntas, las cuales están asociadas a la comparación de probabilidades; se estudiará inicialmente cuáles han sido las estrategias empleadas en cada ítem, para lo cual se remite al Cuadro 14, donde se aprecia la relación entre las estrategias y los enunciados en el cuestionario.

Cuadro 14

Estrategias de comparación de probabilidades más utilizadas

Comparación de Probabilidades Estrategias empleadas	Ítems			Problemas
	1	2	3	2
Estrategias de comparación de una variable				
Comparación del número de casos favorables			x	
Estrategias de comparación de dos variable				
Estrategias de correspondencia		x		
Estrategias multiplicativas	x			x

De los cuatro enunciados planteados en el cuestionario, dos de ellos son resueltos empleando estrategias multiplicativas, en el ítem 1 es empleada el 55% de los sujetos; mientras que en el problema 2 ésta estrategia es utilizada por el 40% de los participantes en el estudio. Se aprecia una tímida tendencia al uso de este tipo de estrategias, la cual bien empleada generará siempre una respuesta correcta, pero sin embargo no se puede hablar de una preferencia hacia alguna estrategia en particular, ya que por ejemplo en el ítem 1 y 2, la estrategia más empleada se corresponde al 55%, poco más de la mitad de los informantes clave.

Ahora bien, el hecho de que una estrategia haya sido la más empleada en un enunciado determinado, no significa que esté correctamente utilizada. Con respecto al uso correcto de estas estrategias, prácticamente la totalidad de los sujetos las emplean de forma adecuada. Tan sólo en el ítem 1 y 3, un participante, el P10, hace uso de una estrategia correcta pero emplea un razonamiento erróneo, lo que en el primer caso le permite aún obtener una respuesta correcta, pero no así en el segundo ítem.

En relación a las respuestas correctas obtenidas en cada reactivo, independientemente de la estrategia puesta en juego; se evidencia un adecuado razonamiento proporcional en los sujetos participantes de la investigación. En los ítem 1 y 2, el 95% de los sujetos responde de manera acertada los enunciados, mientras que en el ítem 3 y el problema 2 la respuesta apropiada es proporcionada por el 90% de los informantes clave.

De lo anterior se puede inferir un adecuado razonamiento proporcional por parte de los futuros docentes para profesores de Matemática, lo cual era de esperarse debido a la formación matemática con la cual cuentan los sujetos, entre el tercer y octavo semestre de la carrera de profesores en la especialidad de Matemática.

Por otra parte, se observa empleo múltiple de estrategias a la hora de resolver los planteamientos, con leve predominio a las de tipo multiplicativas, lo que podría sugerir que los sujetos no tienen una única manera de abordar este tipo de problemas y que aparentemente depende del contexto del enunciado.

Así mismo, hay un predominio de las estrategias de comparación de dos variables por encima de las de una sola variable, lo cual era de esperarse debido a que tal y como refieren Ortiz *et al*. (2006), el empleo de este tipo de estrategias está en correspondencia a un mayor razonamiento proporcional.

Análisis de Ítems y Problemas Relacionados al Sesgo de Equiprobabilidad

Ahora se estudiará el grupo de enunciados relacionados con el sesgo de equiprobabilidad, estos son los ítems 4 y 5 de la primera parte del cuestionario y los problemas 1 y 5 de la segunda parte del mismo. Con respecto al primer enunciado, éste fue el que obtuvo mayor número de respuestas asociadas con la presencia de este sesgo, con un total de 14, es decir, el 70% de los sujetos; en el segundo ítem hay 11 respuestas relacionadas con el uso del sesgo en el razonamiento, pero además 5 participantes no contestan alegando que no tienen ninguna forma de abordar los planteamientos propuestos en el cuestionario.

Del desempeño en el problema 1 del cuestionario, aunque 11 respuestas hacen inferir nuevamente la presencia del sesgo de equiprobabilidad en los informantes claves, se sospecha que tal vez el número podría ser mayor debido a que 4 sujetos no contestan y el resto de las respuestas no son correctas puesto que emplean justificaciones causales o alegan razones sin ningún basamento; y con relación al problema 5, hay 8 respuestas que ponen en evidencia errores sistemáticos y recurrentes a la hora de analizar cierto tipo de situaciones donde se asume la igualdad de ocurrencia de los eventos cuando no hay razones que avalen tal situación; o cuando se confunde la equiprobabilidad del evento simple con la del evento compuesto, como es el caso de este problema en particular.

En función de las respuestas develadas por los informantes clave, se puede concluir que en general, existe importante predominancia de este sesgo en los estudiantes para profesores de Matemática de la UPEL Maracay, con base en el número de respuestas asociadas a identificar el mismo. Además, se comprueba el hecho de que no solo se asigna de manera discrecional la cualidad de ser equiprobable a un suceso determinado, sino que se pudo constatar por medio de las respuestas, que es un error reiterativo el confundir el hecho de que un evento simple tiene la misma probabilidad que el resto de los eventos simples asociados a aun cierto experimento aleatorio, pero que a la hora de estudiar eventos compuestos, la equiprobabilidad no es “heredada” por estos últimos.

Análisis de Ítems y Problemas vinculados a la Combinatoria y Espacio Muestral

Otras de las temáticas abordadas en la investigación, están relacionadas con el empleo del razonamiento combinatorio mediante el uso de técnicas y argumentos propios de esta rama de la matemática discreta, y el apoyo en éstas para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio, así como el número de casos favorables. Por esta relación intrínseca entre la combinatoria y su empleo en el cálculo de los dos valores asociados al uso de la Regla de Laplace, se harán el análisis de manera conjunta, sobre todo considerando que de hecho se trata de los mismos ítems en cada caso.

Los ítems donde se analiza el uso de la combinatoria y el espacio muestral son 4 y 5; mientras que los problemas asociados son el 3, 4 y 5. Con relación a los ítems 4 y 5, se trata de planteamientos con una naturaleza similar ya que desde el punto de vista combinatorio se trata de la formación de ternas de número naturales utilizando artefactos lúdicos empleados en juegos de envite y azar como los son el dado y la ruleta. En líneas anteriores se expuso que desde el punto de vista normativo, el espacio muestral podría determinarse inequívocamente mediante la aplicación de la regla de la multiplicación o del producto, o mediante alguna representación pictórica como lo es un diagrama de árbol. Sin embargo, el empleo de estas técnicas ha sido muy restringido, y prácticamente nulo en ambos planteamientos.

En el ítem 4, tan sólo tres sujetos, P8, P9 y P20, hacen uso de la regla del producto para determinar el espacio muestral; y en ningún caso se hace referencia a diagramas de árbol, y de hecho son los únicos que determinan de manera correcta el espacio muestral asociado, lo que habla de la dificultad que presenta este ítem y de que como consecuencia de no reconocer adecuadamente este último, el cálculo de probabilidad no estaría correcto. Panorama similar se aprecia en el ítem 5, donde tan sólo P20 hace un cálculo explícito del número de elementos del espacio muestral, ya que P8 da una respuesta correcta pero analizando el hecho de cómo afecta la repetición de los elementos en la conformación de los posibles resultados.

En atención a lo postulado por Roa (2000), la mayoría de los sujetos no reconocen en realidad el grupo de objetos que se debe enumerar; y además no parece haber conciencia acerca de la relevancia del orden de los objetos y la posibilidad de repetición o no de los mismos. Por otra parte, hay una ausencia casi absoluta de lenguaje, escrito y verbal, característico del empleo de la combinatoria, lo que hace inferir que la mayoría de los participantes tienen serias dificultades en reconocer el tipo de arreglo u ordenamiento está inmerso en los planteamientos, y carecen de las técnicas y razonamientos necesarios para este propósito.

Así mismo, en la construcción del cuestionario se tomó en consideración lo señalado por Roa (Ob. Cit.) con relación a convenimientos implícitos que posiblemente no son claros a los sujetos, ocasionado un cálculo erróneo, por lo que en ambos ítems se dejaron ciertas pistas claves que deberían hacer entender al participante que el orden era importante en ambos experimentos a los que se alude en los enunciados, así como a la repetición de los dígitos. Sin embargo esto no fue suficiente; y ambos ítems presentan un alto nivel de respuestas erróneas, poca evidencia del empleo de técnicas combinatorias, y pocas respuestas donde se deje de manera, al menos implícita, de la determinación adecuada del espacio muestral o del número de elementos que los conforman.

Con relación a los problemas 3, 4 y 5; el 3 es similar a los ítems 4 y 5, con la diferencia de que en este caso se trata del lanzamiento de dos dados, lo que podría suponer que sería de más fácil comprensión. Sin embargo, esto no fue cierto. En ningún caso se explicita el espacio muestral correspondiente a los 36 resultados posibles al lanzar dos dados de manera simultánea, aunque sujetos como P11 y P15 hacen referencia a este número sin explicar de dónde fue obtenido, tampoco se describe el espacio muestral como conjunto, ni ha evidencias de razonamiento combinatorio explícito, aunque los sujetos P8, P16 y P20 distinguen de manera correcta que el evento *obtener un 5 y un 6 de alguna manera* es una evento compuesto formado por dos resultados simples; con lo cual evidencian que el orden es relevante.

El problema 4 hace referencia a la determinación del espacio muestral y al número de elementos que lo conforman y tan sólo 4 contestan acertadamente (P1, P8, P19 y P20), en todas las respuestas restantes se hacen ciertos procedimientos aritméticos sin justificación aparente o al menos no descrita por los sujetos en su hoja de trabajo. Es el único planteamiento en todo el cuestionario donde se hace referencia al empleo de los diagramas de árbol, el cual es elaborado por el participante P1, lo cual le permite efectivamente alcanzar la opción correcta. También es el único enunciado donde se trata de describir por extensión a los elementos del espacio muestral, lo cual intenta hacer el informante P9, sin embargo el conjunto de los casos posibles no es adecuado puesto que por alguna razón el sujeto no considera los casos donde se repiten dos o más dígitos, por lo que el espacio muestral resultante está incompleto. Además, el sujeto P19 hace representaciones pictóricas semejantes al modelo de urnas para establecer, de manera correcta, el número de elementos del espacio muestral. Aparece uso del lenguaje combinatorio al utilizarse expresiones como *"permutaciones"*, "*formulación de triples*", "*factorial*", pero estas ideas o nociones no son suficientes para obtener una respuesta correcta y apenas se reduce este lenguaje a tan sólo unos sujetos.

El problema 5, pone en evidencia nuevamente las dificultades y errores que afrontan los sujetos de la investigación al intentar determinar el espacio muestral, para lo cual se requiere de principios combinatorios. Tan sólo los sujetos P8 y P20 están conscientes de la existencia de los 4 casos posibles; mientras que el resto de los que intenta contestar este apartado, reconocen que los casos posibles son "*caer en la zona sombreada*" o "*caer en la zona no sombreada*". Del resto de los informantes no existen indicios del uso de combinatoria para referenciar a los casos posibles y favorables.

Del desempeño de los sujetos en torno a los planteamientos asociados al uso de la combinatoria como herramienta para la determinación del espacio muestral, así como de los casos favorables, se puede inferir que los participantes tienen un razonamiento combinatorio inadecuado, de hecho, incipiente y muy primitivo, lo cual no se debería corresponder con sujetos con las características de la muestra en estudio. En todos los apartados hay una prácticamente nula utilización de diagramas de árbol o del uso correcto del principio de multiplicación, así como el hecho de no detectar el tipo de arreglo o disposición o de considerar los criterios de repetición o no de los elementos dentro de un mismo arreglo.

El hecho de no poder describir adecuadamente el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y por ende el cardinal de dicho conjunto, que se supone coincidiría con el número de casos posibles, dificulta el empleo de la Regla de Laplace, en virtud de que se trata precisamente del denominador de la fracción resultante de la aplicación del principio laplaciano, además de dificultar también la obtención de los casos favorables al no distinguir de manera efectiva la forma de los eventos, que en el caso particular de los enunciados presentes, se corresponde con arreglos o disposiciones, confirmando de esta manera las dificultades mencionadas por Roa (2000) al estudiar el razonamiento combinatorio en estudiantes universitarios.

Análisis de Ítems y Problemas en torno al uso de la Regla de Laplace

El último tema a considerar en este análisis grupal de los ítems y problemas, es el relativo al uso explícito de la Regla de Laplace como medio de justificación de las respuestas esgrimidas por los informantes clave. Con este fin se hizo una revisión de las respuestas a cada uno de los planteamientos propuestos en el cuestionario en sus dos partes, para identificar con qué frecuencia se empleó esta regla para justificar los razonamientos empleados por cada participantes. Dicha revisión permite inferir que hay un uso limitado de la concepción clásica de la Probabilidad, y entre las razones que podrían justificar este hecho, se encuentran precisamente las dificultades que confrontan los sujetos a la hora de describir los casos posibles y favorables mediante el uso de herramientas propias de la teoría combinatoria, lo cual incide sobre la determinación del espacio muestral, clave fundamental para aplicar la Regla.

Se ha detectados así mismo, que un número importante de sujetos aplican más un razonamiento proporcional, regla de tres simple, para dar respuesta a muchos de las preguntas propuestas, y que las mismas vienen expresadas de manera porcentual. Es claro que el empleo de este razonamiento es correcto pero no hace referencia directa a la relación casos posibles y casos favorables, sino que se llega a ella de manera indirecta mediante relaciones proporcionales del tipo todo-parte.

En el Cuadro 15 se aprecia la relación entre los ítems y el número de respuestas que hacen uso manifiesto de la Regla de Laplace para argumentarla, se descarta el problema 4, puesto que en este no se hace referencia alguna al cálculo de probabilidad, sino que está destinado para el estudio del espacio muestral y la combinatoria.

Cuadro 15

Uso de la Regla de Laplace como medio de argumentación.

	Ítems					Problemas			
	1	2	3	4	5	1	2	3	5
Empleo explícito de la Regla de Laplace como argumento	7	7	6	3	3	11	7	2	1

Solamente se han computado aquellos casos donde se han calculado directamente las probabilidades y han sido empleados sus resultados para argumentar una respuesta. Pero en algunos casos la regla ha sido mal utilizada, o en otros tantos, se describe de manera verbal el empleo de tal fórmula pero los sujetos consideran que era suficiente con esa explicación para responder a los cuestionamientos. Otro asunto relacionado con la fórmula empleada para calcular la probabilidad bajo el enfoque clásico es el manejo del lenguaje escrito, esto es, la notación empleada, la cual es bastante ingenua si se quiere y en algunos casos inadecuada, quizás hasta intuitiva.

Análisis general del desempeño de los participantes en el estudio

En esta parte final de los análisis y resultados, se estudiaron tanto el desempeño individual de cada uno de los sujetos participantes en la investigación, tomando como criterio si la respuesta emitida a cada ítem es correcta y basada en argumentos correctos; como el comportamiento de los dos subgrupos constitutivos de la muestra tomando como criterio si tenían o no algún tipo de formación universitaria en el área de Probabilidad. En el Cuadro 16 se puede apreciar esta relación entre el número de respuestas correctas, basadas en razonamientos correctos, para cada uno de los informantes clave. Se ha marcado con una equis la respuesta correcta de cada sujeto a una pregunta en particular.

Cuadro 16

Relación de respuestas correctas por cada participante

	Sujetos																			
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20
I1	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
I2	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
I3	x	x	x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
I4								x									x			x
I5								x									x			x
P1																				
P2	x				x	x	x	x	x		x	x	x	x		x	x	x	x	x
P3				x	x			x	x							x				x
P4	x							x											x	x
P5								x												x
T_{ot}	5	2	3	3	5	4	4	9	5	1	4	4	4	4	3	5	6	4	5	9

Nota. I_i y P_i representa el ítem i y el problema i respectivamente (i=1,2,3,4,5)

Del total de 20 sujetos participantes en la investigación, tan sólo dos, P8 y P20, evidencian un razonamiento probabilístico adecuado en función del número de respuestas correctas obtenido. Ambos contestan incorrectamente el problema 1, asociado al sesgo de equiprobabilidad, sin embargo contestan de manera adecuada los otros ítems donde también se puede estudiar la presencia del sesgo, se infiere que la diferencia estriba en el hecho de que el problema 1 pone en evidencia el tal error es cuando se le asigna sin ninguna razón lógica una misma probabilidad a un conjunto de eventos; mientras que los otros planteamientos más tienen que ver con diferencias entre la equiprobabilidad de los eventos elementos y la no equiprobabilidad de los eventos compuestos.

Nótese que el número de respuestas correctas por participante ronda las 4, lo que parece ser bastante bajo. Además, algo que vale la pena resaltar es el hecho de que este promedio de respuestas correctas en realidad está concentrado en torno a los planteamientos referidos al razonamiento proporcional subyacente a la comparación de probabilidades; lo que permite inferir importantes dificultades a la hora de analizar problemas que involucran el enfoque clásico de probabilidad. Los participantes con el menor número de respuestas correctas son P2, P3, P4, P10 y P15, quienes sólo logran acertar entre 1 y 3 respuestas correctas; lo que constituye el 25% de los sujetos que intervienen en el estudio.

El mejor desempeño lo han tenido en torno a la comparación de probabilidades, mientras que con relación al razonamiento combinatorio, determinación del espacio muestral, la regla de Laplace y el sesgo de equiprobabilidad, el razonamiento empleado por los participantes ha sido muy limitado.

Finalmente se hace una comparación entre el desempeño de aquellos sujetos que recibieron formación en Probabilidad, de aquellos que no la recibieron. Los participantes P2, P3, P4, P5, P12, P13, P14, P15, P16, P17 y P18 no recibieron instrucción en torno a la teoría de Probabilidad en ninguno de los cursos impartidos dentro de la especialidad de Matemática, a saber, Estadística Aplicada a la educación y el curso de Probabilidad y Estadística Inferencial, el número promedio de respuestas correctas en este grupo es de 4; mientras que en el grupo de los que sí recibieron instrucción formal, el número promedio de respuestas acertadas es de 5; lo que hace inferir que no hay mucha diferencia entre ambos grupos.

De hecho sorprende por ejemplo que el sujeto con el menor número de respuestas correctas esté dentro de los que recibieron instrucción formal (aprobando el curso al final del período académico correspondiente); pero también es de resaltar que los dos sujetos con el mayor porcentaje de respuestas correctas pertenece a este grupo. Pero en definitiva se puede inferir que en ambos grupos persisten dificultades y errores sistemáticos en el empleo del razonamiento probabilístico.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

A raíz del estudio de las respuestas proporcionadas en los cuestionarios; por parte de los futuros docentes de la especialidad de Matemática de la UPEL; se puede concluir de manera general que el razonamiento probabilístico de los mismos a la hora de abordar situaciones donde es requerido el uso del enfoque clásico de Probabilidad, presenta limitaciones y evidentes dificultades. Los resultados advierten entonces sobre el hecho de que los temas asociados al manejo del enfoque clásico de la Probabilidad representan un elevado componente de complejidad para los futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay

Con relación al primer objetivo específico que era *identificar la presencia del sesgo de equiprobabilidad en el razonamiento que hacen los futuros docentes de Matemáticas de la UPEL Maracay, cuando resuelven problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad*, se puede concluir que la presencia de error es recurrente y persistente, ya que incluso aquellos estudiantes para profesores de Matemática que recibieron formación en Probabilidad evidencian la presencia del sesgo. De hecho, de todos los enunciados del cuestionario, el problema número 1, que estaba directamente relacionado con el estudio de dicho sesgo, no obtuvo respuestas correctas. En este caso se determinó que el sesgo de equiprobabilidad se reflejaba al asignar, de manera a priori pero irracional, la misma probabilidad a diferentes eventos, aún y cuando no existen razones aparentes que hagan suponer que tal asignación es correcta.

Pero no es la única forma en la cual dicho sesgo es exteriorizado por los sujetos de la investigación. Otra forma, tiene que ver con la aparente confusión entre la equiprobabilidad de los eventos o sucesos elementales, característica de los juegos de azar, con la no equiprobabilidad de los eventos compuestos asociados a un cierto experimento aleatorio y en conjunto los planteamientos asociados al estudio de este sesgo en los futuros docentes fueron los que más respuestas incorrectas tuvieron.

La falta de reconocimiento de esta diferencia es vital para la correcta aplicación del enfoque clásico de la Probabilidad a través de la Regla de Laplace, en la cual además intervienen algunas ideas estocásticas fundamentales como la de espacio muestral y combinatoria, lo cual conduce a las conclusiones relacionadas con el segundo objetivo específico que era *determinar el dominio tienen los futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay en relación a las ideas estocásticas fundamentales vinculadas al cálculo de probabilidad bajo el enfoque clásico.*

Con relación al razonamiento combinatorio, se concluye que el mismo es insuficiente, endeble y limitado; cuestión que repercute de manera directa en el cálculo de probabilidad bajo el enfoque clásico. Por ejemplo la prácticamente nula utilización de representaciones gráficas como diagramas de ven, diagramas de árbol u otras representaciones pictóricas que sirvan como una posible vía de apoyo al conteo de casos posibles y favorables necesarios para el uso de la Regla de Laplace, se convierte en un obstáculo, así como la no diferenciación del orden en la disposición de arreglos, o la consideración de si el experimento se realiza con o sin reemplazo.

El razonamiento combinatorio necesario para calcular probabilidades desde el enfoque clásico mostró ser muy superficial, al incurrir en diversos errores de identificación del espacio muestral y falta de uso de representaciones adecuadas. Por ejemplo, el estudio de las respuestas de los sujetos evidencian que los mismos tienen dificultades a la hora de distinguir el tipo de arreglo (permutación, variación, combinación) identificar si todos los objetos son diferentes o no, o si el muestreo es con reemplazo o sin reemplazo, y si es o no determinante el orden en la disposición de los elementos. Por la estrecha relación que parece existir entre el razonamiento combinatorio y la determinación del espacio muestral, un bajo rendimiento en el primero afecta notablemente el estudio del número de los casos posibles, con lo cual el cálculo de la probabilidad a través de la Regla de Laplace, se ve reducido.

Así mismo se confirma la existencia de dificultades inherentes al uso de la combinatoria, como la i*dentificación del grupo de sucesos u objetos que se pide* *enumerar o contar*, según la cual, en algunas oportunidades los sujetos al intentar resolver problemas de combinatoria no reconocen a los elementos correctos del conjunto de objetos que se espera enumerar o disponer, lo que conduce en general, a una percepción incoherente de dicho conjunto, ocasionando ordenamientos errados de tales objetos; y cuando dicho conjunto se corresponde al espacio muestral asociado a un experimento aleatorio particular, las dificultades para hacer uso explícito del principio laplaciano para calcular probabilidades se incrementan notablemente.

Tomando en consideración el hecho de que muchas oportunidades en el enunciado de los problemas combinatorios hay convenios implícitos que no quedan claros para el alumno, lo cual conlleva a ordenamientos erróneos, que no necesariamente obedezcan a la falta de comprensión de la teoría combinatoria, sino a esas convenciones implícitas, se fue muy cuidado en las adaptaciones hechas a los enunciados de los cuestionarios, para tratar de hacer lo más claras posibles las situaciones. Sin embargo, esto no fue suficiente para que los sujetos llegasen a respuestas correctas, lo que hace pensar que muy a pesar del carácter elemental de los problemas combinatorios seleccionados, los estudiantes tienen dificultades importantes para resolverlos debido a la estructura compleja de los procesos de resolución requeridos.

Con relación al tercer objetivo específico de *describir las características de las dificultades de los futuros docentes de Matemática al resolver situaciones de comparación de probabilidades, donde está involucrado el enfoque clásico de Probabilidad*, se observa un razonamiento adecuado, en particular por la población donde se aplicó el estudio, pues se trataba de futuros profesionales de la educación, por lo que pertenecían a una institución universitaria, además ya habían al menos aprobado uno o dos cursos relacionados con el cálculo y el álgebra; donde se abordan contenidos relacionados con las proporciones y las fracciones.

En general, las estrategias erróneas empleadas en la comparación de probabilidades pueden ser una derivación del desconocimiento de parte de los datos del problema como podría serlo simplemente considerar a los numeradores. Por otro lado, también se ha evidenciado que no existe preferencia por las estrategias multiplicativas, la cual arroja una respuesta correcta en todos los casos donde se aplica, sino que existe variedad a la hora del empleo de tales estrategias, ya que un individuo puede usar diferentes estrategias según la naturaleza del planteamiento y que a veces trata de resolver un problema más complejo con una estrategia sencilla.

Sí mismo, el que los sujetos empleen diversas estrategias a la hora de comparar probabilidades, hace necesario profundizar acerca de qué influencias tiene el tipo de enunciado para que los sujetos aparentemente apliquen diversas estrategias, cuando las de tipo multiplicativas siempre garantizarían una respuesta adecuada.

Se deriva de la investigación realizada que las dificultades de aprendizaje en del enfoque clásico de la probabilidad no parece ser un problema sencillo de resolver, debido a que las creencias y concepciones erróneas, así como al poco desarrollo del razonamiento combinatorio para la determinación de la determinación del espacio muestral afectan significativamente el uso de la Regla de Laplace, al igual que la presunción sin ningún argumento lógico de la hipótesis de equiprobabilidad.

De hecho los resultados arrojan que no existen diferencias significativas entre el razonamiento probabilístico empleado por sujetos que no han recibido formación en temas de probabilidad y aquellos si recibieron instrucción en el área. Esto conduce a revisarla práctica pedagógica y la metodología de la enseñanza para procurar profundizar en este tipo de razonamiento, por demás complejo pero necesario en la sociedad actual. Las mayores dificultades se concentran a la hora del razonamiento combinatorio, el estudio del espacio muestral y el empleo limitado y restringido de la Regla de Laplace; pero estos aspecto debieron ser temas recurrentes en el proceso educativo de aquellos quienes cursaron asignaturas de estadística y probabilidad, por lo que se esperaría un mejor desempeño en este grupo por encima del que no tiene conocimientos normativos al respecto.

RECOMENDACIONES

A continuación se enuncian una serie de recomendaciones a partir de los resultados y conclusiones derivados de la investigación.

1. Realizar investigaciones en torno al razonamiento probabilístico bajo otras concepciones de la Probabilidad como la frecuencial y la axiomática
2. Estudiar la presencia de otros sesgos probabilísticos que pudiesen dificultar la comprensión de aspectos vinculados a área de conocimiento
3. Desarrollar investigaciones acerca del razonamiento combinatorio, el cual tal y como quedó demostrado en la investigación, se configura como un elemento clave para el estudio de algunos conceptos vinculados al cálculo de probabilidad
4. Incorporar en el proceso formativo de los estudiantes para profesores de Matemática actividades previas que reflejen concepciones erróneas, sesgos, intuiciones y creencias para hacerlos consientes de su existencia y modificarlas de ser necesario.
5. Promover el diseño de materiales instruccionales que involucren aspectos teóricos-prácticos de la Teoría de Probabilidad bajo su concepción clásica, pero que también hagan referencia a las dificultades cognitivas que afrontan los estudiantes en su abordaje y se ofrezcan estrategias metodológicas adecuadas para su enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (2007). ¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad? [Documento en línea]. En P. Flores, R. Roa y R. Pozuelo (Comp.), *Actas de XII Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar.* (pp.45-72).Granada.Disponible:http://www.earlyinstatistics.net/templates/files/Azcarate_pilar_thales2006_Conferencia.doc [Consulta: 2012, Febrero 10]

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias* [Revista en Línea], 16(1) ,85-97. Disponible: http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v16n1p85.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Barragués, J. I, Guisasola, J. y Morais, A. (2005). Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la probabilidad. *Educación Matemática* [Revista en línea], 17 (001), 55-85. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40517103.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Barragués, J. I y Guisasola, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de textos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias* [Revista en línea], 24 (2), 241-256. Disponible: http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v24n2p241.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística [Artículo en línea]. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/BLAIX.htm [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. (2001a). Presente y futuro de la Educación Estadística [Documento en línea]. En *Jornades europees d'estadística. L'ensenyament i la difusó de l'estadística* (pp. 431-442). Palma de Mayorca. Disponible: http://ibestat.caib.es/ibfiles//content/files/publicaciones/jornades_europees.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. (2001b). *Didáctica de la Estadística* [Libro en línea]. Grupo de Investigación en Educación Estadística del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/libros/didacticaestadistica [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. (2002, Octubre). *Los retos de la cultura Estadística.* [Documento en línea]. Conferencia presentada Primeras Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué contenidos se deben enseñar en la clase de Probabilidad? [Documento en línea]. En J.A Fernández, M. V Sousa y S.A Ribeiro (Orgs.), *Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola. Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística.* (9-30).Braga.Disponible:http://www.uv.mx/eib/curso_pre/videoconferencia/52Ideas EstocasticasFundamentales.pdf [Consulta: 2012, Abril 15]

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* [Revista en línea], 8 (003), 247-263. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33508302.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. (2006) Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo [Documento en línea]. En P. Flores y J. Lupiañez (Comp.), *Actas de XI Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas*. *Estadística y azar*. Granada.Disponible:http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/ConferenciaThal es2006.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. y Serrano, L. (1996). La Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Revista UNO*, 5, 15-28.

Batanero, C., Garfield, J., Ottaviani, M. G. y Truran, J. (2000). Investigación en Educación Estadística: Algunas cuestiones prioritarias. *Statistical Education Research Newsletter* [Revista en línea], 1 (2). Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Investiga.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C., Ortíz, J.J., Serrano, L. y Cañizares, M.J. (2001). Una perspectiva de síntesis de las tendencias actuales en la Educación Estadística. En P. Gómez y L. Rico (Comp.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* [Libro en línea]. Universidad de Granada, Granada. Disponible: http://cumbia.ath.cx/ugr/phmc/PDF/Bataneroetal.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros [Libro en línea]. En J. Godino (Dir.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 692-766). Granada, España. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Batanero, C., Godino, J. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education* [Revista en línea], 12(1). Disponible: http://www.amstat.org/publications/jse/batanero.html [Consulta: 2012, Agosto 12]

Batanero, C. y Díaz, C. (2007, Julio). *Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje* [Documento en línea]. Conferencia presentada en las XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada, Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/PonenciaJAEM.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Belfiori, L. (2011). Análisis combinatorio: dificultades en alumnos de ingeniería. [Documento en línea]. En M. R Otero, I. Elichiribehety, y M. Fanaro (Comp.), *Acta I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática*, (pp. 122-127).Tandil, Argentina.Disponible:http://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/html/pdfs/Formacion_continua/Seminarios_y_congresos/ActaArg2011.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2010). Research and Developments in Probability Education Internationally [Documento en línea]. En M. Joubert y P. Andrews. (Comp.), Proceedings of the British Congress for Mathematics Education. (pp. 41-48). Disponible: http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Cantoral, R. y Farfán R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME* [Revista en línea], 6(1), 27-40. Disponible: http://www.clame.org.mx/relime/200302ar.html [Consulta: 2012, Agosto 10]

Castro, J. (2007). La investigación en Educación Matemática: Una hipótesis de trabajo. Educere, (11) 38, 519-531

Cañizares, M deJ. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* [Versión completa en línea], Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/tesis/CANIZARE.pdf [Consulta: 2012, Octubre 22]

Cañizares, M de J. y Batanero, C. (2005). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *Revista UNO* [Revista en línea], 14, 99-114. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/comparacion.htm [Consulta: 2012, Febrero 10]

Corbetta, P. (2003). *Metodología y técnicas de investigación social*. Madrid: McGraw-Hill

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children.

[Libro en línea]. Reidel Publishing Company. Disponible: http://books.google.co.ve/books?id=FNp-XgzUvpcC&source=gbs_navlinks_s. [Consulta: 2011, Noviembre 10]

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics* [Revista en línea], 15(1), 1-24. Disponible: http://math.edu/math/en/Fischbein_and_Gazit.pdf [Consulta: 2011, Noviembre 10]

Freund, J. y Walpole, R. (1990). *Estadística Matemática con aplicaciones*. México, D.F: Prentice-Hall Hispanoamericana

Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in Probability and Statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education* [Revista en línea], 19 (1), 44-63. Disponible: http://www.stat.ucla.edu/~rakhee/attachments/garfieldahlgren.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

González, F. (2000, Enero). Programa ALIEM XXI: Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el siglo XXI. Ponencia presentada en la V Reunión de didáctica matemática del Cono Sur, Santiago de Chile.

González, F. y Villegas, M. (2009). Fundamentos epistemológicos en la construcción de una metódica de investigación. *Atos de Pesquisa em Educacao*. 4(1), 89-121

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M de J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years [Documento en línea] En D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G.M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Sheffield, U.K. Disponible: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots/Green1.pdf [Consulta: 2011, Febrero 10]

Guzmán, M. e Insunza, S. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación Matemática* [Revista en línea], 23 (1), 63-95. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=405211273 [Consulta: 2012, Marzo 7]

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics* [Revista en línea], 6 187-205. Disponible: http://fplfachdidaktik.univie.ac.at/fileadmin/contributiongoetzrevisedj.pdf [Consulta: 2012, Abril 8]

Jiménez, L. y Jiménez, J. (2005). Enseñar probabilidad en primeria y secundaria? ¿Para qué y por qué? *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet* [Revista en línea], 6(1). Disponible: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/contribuciones-v6-n1-may2005/artilconsultaal-aleat/index.html [Consulta: 2012, Febrero, 10]

Kahneman, D., Tversky, A. y Slovic, P. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* [Libro en línea]. Cambridge University Press. Disponible: http://books.google.co.ve/books?id=_0H8gwj4a1MC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false [Consulta: 2012, Marzo 7]

Landín, P. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa* [Revista en línea], 12(3), 598-618. Disponible: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842 [Consulta: 2012, Febrero 12]

León, N. (1998, Marzo). *Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior*. Ponencia presentada en III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Caracas.

León, N. (2006). La probabilidad en los textos de Matemática de 7° grado de Educación Básica. *Investigación y Postgrado*, 21 (2), 177-200.

León, N. (2007). Un recorrido de lo certero a lo probable por los caminos de la ciencia y de nuestra acción ciudadana. *Enseñanza de la Matemática* [Revista en línea], 12-16 (número extraordinario), 19-34 Disponible: http://asocolme.org/documento/revista.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Meyer, P. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. México, D.F: Addison-Wesley Iberoamericana.

Nuñez, F., Sanabria, G. y García, P. (2004). Sobre la probabilidad, lo aleatorio y su pedagogía. *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet.* [Revista en línea], 5(1).Disponible:http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Contribuciones V5n1Jun2004/FelixSanabriaGarcia/index.htm [Consulta: 2012, Marzo 7]

Ortíz, J.J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. [Documento en línea]. En M. Bolea, M. Moreno y M. González (Comp.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (pp. 267-276). Huesca. Disponible: http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2766163.pdf [Consulta: 2012, Marzo 7]

Ortiz, J.J., Serrano, L., y Mohamed, N. (2009). Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad [Documento en línea]. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 95-116). España: Universidad de Granada, Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULO/libroluis.pdf [Consulta: 2012, Junio 20]

Ortíz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2009). Asignación de probabilidades en profesores en formación. [Documento en línea]. En P. Lestón (Comp.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 22* (pp. 1545-1554). México, Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf [Consulta: 2012, Junio 20]

Ortíz, J.J., Mohamed, N. y Contreras, J. (2011). Significado personal del enfoque frecuencias de la probabilidad en profesores en formación [Documento en línea]. En P. Lestón (Comp.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 24* (pp. 988-997). México, DF. Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf [Consulta: 2012, Junio 20]

Pajares, A. (2009). Enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en secundaria: Experimentos y Materiales [Documento en línea]. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación, XIII Simposio de la SEIEM.* Santander,España.Disponible:http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIII/GrupoDidEstProbComb/Pajares_Tomeo_R.pdf [Consulta: 2012, Junio 20]

Pérez Echeverria, M. P. (1998, Mayo). *Influencia de la instrucción en el razonamiento probabilístico* [Documento en línea]. Ponencia presentada en la I Jornadas de Psicología del pensamiento, Santiago de Compostela. Disponible: http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2520864.pdf [Consulta: 2012, Agosto 15]

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *The Origen of the idea of chance in children* [Libro en Línea]. Routledge and Kegan Paul, London. Disponible: http://books.google.co.ve/books?id=IcE9AAAAIAAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false [Consulta: 2012, Marzo 23]

Ramírez, G. y Ballestero, E. (2007). La centración en problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional. [Documento en línea]. En C. Crespo (Comp.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 20* (pp. 102-107). México, Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme20.pdf [Consulta: 2012, Junio 20]

Ramírez, G., Vásquez, M. y Fernández, A. (2011). *Teoría de la Probabilidad: Nociones fundamentales* [Documento en línea]. Universidad Central de Venezuela,Caracas.Disponible:http://saber.ucv.ve/xmlui/bitstream/123456789/96

6/1/Capitulo1Probabilidad.pdf [Consulta: 2012, Enero 17]

Reyes, P. y Hernández, A. El estudio de caso en el contexto de la crisis de la modernidad. *Cinta Moebio* [Revista en línea], 32, 70-89. Disponible: www.moebio.uchile.cl/32/reyes.html [Consulta: 2013, Febrero 17]

Rico, L. (1.999). Educación Matemática, Investigación y Calidad. [Documento en línea]. Disponible: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/rico.doc. [Consulta: 2012, Marzo 25]

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada* [Versión completa en línea]. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/tesis/TesisRoa.pdf [Consulta: 2012, Febrero 11]

Rodríguez, M. (2004). Dificultades en el significado y la comprensión de conceptos estadísticos elementales y de probabilidad. *Revista premisa* [Revista en línea], 6 (22), 13-22. Disponible: http://www.soarem.org.ar/Documentos/22%20Rodriguez.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Rodríguez, M y Agnelli, H. (2009). Concepciones de los alumnos acerca de la probabilidad Documento en línea]. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 22* (pp. 489-498). Panamá. Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf 2011, Junio 20]

Saenz de Castro, C. (1998). Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental. *SUMA*, 28, 37-52.

Saenz de Castro, C. (2002). *Materiales para la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad: Propuesta de un modelo teórico* [Libro en línea]. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. Disponible: http://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/capitulo%203.doc [Consulta: 2012, Mayo 10]

Salcedo, A. (2006a, Julio). *Statistics education in Venezuela: the case of elementary and middle school* [Documento en línea]. Ponencia presentada en el 7th International Conference on Teaching Statistics. Salvador, Brasil. Disponible: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/C125.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Salcedo, A. (2006b). *Didáctica de la estocástica*. Caracas: Universidad Nacional Abierta. Vicerrectorado Académico.

Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática* [Revista en línea], 21 (2), 39-77.

Disponible: http://scielo.unam.mx/pdf/ed/v21n2/v21n2a3.pdf [Consulta: 2012, Marzo 7]

Sánchez, E. y Hernández, R. (2000). Exploración de Problemas Asociados a la Regla del Producto en Probabilidad [Documento en línea]. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 14* (pp. 386-395). Panamá. Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2014.pdf [Consulta: 2012, Junio 20]

Sanoja, J. y De Sales, E. (2006). *Programa didáctico de Estadística aplicada a la Educación*. Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador-IPMAR

Sanoja, J, y Suárez, Y. (2009). *Programa de Probabilidad y Estadística Inferencial*. Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay

Serradó, A., Cardeñoso, J.M. y Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal* [Revista en línea], 4(2), 59-81. Disponible: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf [Consulta: 2012, Febrero 10]

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J.J. y Cañizarez, M. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. Educación Matemática [Revista en línea], 10(1), 7-25. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/heuristicas.htm [Consulta: 2012, Junio 20]

Suárez, Y. (2012). *Enseñanza de la Probabilidad. Análisis de su producción científica en la RELME.* Trabajo de ascenso no publicado Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", Maracay.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (1999). Material de apoyo de iniciación universitaria. (Folleto). Maracay: FEDEUPEL

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (2011). Manual de Trabajos de Grado, Especialización, Maestría y Tesis Doctorales. Maracay: Autor

Urrea, M. (2005). Razonamiento probabilístico en estudiantes del nivel superior. [Documento en línea]. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Comp.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 18* (pp. 207-214). México, Disponible: http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2018.pdf [Consulta: 2012, Junio 20]

Venturiello, V. (2008). *¿Cómo resuelven problemas de probabilidad los estudiantes universitarios? Heurísticas y sesgos que intervienen en el razonamiento probabilístico* [Resumen en línea]. Trabajo de Maestría no publicado, Universidad de San Andrés. Disponible: http://www.udesa.edu.ar/files//MaeEducacion/VenturielloVer%C3%B3nica.pdf [Consulta: 2012, Septiembre 03]

ANEXOS

ANEXO A

CUESTIONARIO APLICADO

[ANEXO A-1]

[Cuestionario Aplicado]

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
MARACAY – ESTADO ARAGUA

CUESTIONARIO

El siguiente cuestionario tiene como propósito recolectar información relacionada con una investigación titulada COMPRENSIÓN Y DIFICULTADES DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA. CASO: UPEL-MARACAY cuyo **objetivo General es a**nalizar el razonamiento probabilístico presentes en futuros docentes de Matemática de la UPEL Maracay, cuando resuelven problemas asociados al enfoque clásico de la probabilidad, en cuanto a las ideas estocásticas fundamentales, criterios de comparación de probabilidades y la presencia del sesgo de equiprobabilidad.

INDICACIONES

1. La información proporcionada es estrictamente confidencial, por lo que no es necesario que incorpore datos personales.
2. El cuestionario consta de dos partes, la primera de selección simple, donde se le presentan 5 enunciados, cada uno de los cuales tiene 4 alternativas, de las cuales solo una es correcta. Ud. Deberá marcar la que a su criterio sea la acertada y justifica en las hojas blancas adjuntas al presente cuestionario.
3. La segunda parte del cuestionario consta de una hoja con 5 problemas que Ud. Deberá resolver de forma individual y sin recurrir a ningún medio de ayuda y escribirá sus respuestas y argumentos en las hojas anexas.
4. Procure contestar todas y cada una de las preguntas del cuestionario.

CUESTIONARIO. Primera parte

Preguntas de selección simple: A continuación se presentan 5 preguntas. Cada una de ellas con 4 opciones. Sólo una de estas opciones es la correcta. Encierre en un círculo la alternativa que Ud. considera como la correcta y justifique en las hojas adicionales el porqué de su elección.

1.- En la caja A se han introducido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han colocado 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si para ganar un premio debes sacar una ficha negra (sin ver dentro de la caja), ¿Cuál caja escogerías para realizar la extracción?

(a) La caja A da mayores posibilidades de obtener la ficha negra
(b) La caja B da mayores posibilidades de obtener la ficha negra
(c) Las dos cajas dan la misma posibilidad
(d) No se puede concluir nada al respecto

2.- Dos cajas contienen bolas negras y blancas de la siguiente manera: La caja T: 2 negras y 2 blancas y la caja P: 4 negras y 4 blancas. ¿Cuál de estas dos cajas (T o P) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola negra

(a) La caja T
(b) La caja P
(c) La misma posibilidad
(d) No se puede concluir nada al respecto

3.- Una clase tiene 29 estudiantes de los cuales 13 son chicos y 16 son chicas. Se escribe el nombre de cada estudiante en un trozo de papel. Se colocan los papeles en un sombrero. El profesor toma uno de los papeles sin ver. Si el profesor pregunta a qué sexo corresponde el nombre del papel, ¿cuál de las siguientes opciones responderías?

(a). Es más probable que se trate de un CHICO que de una chica
(b). Es más probable que se trate de una CHICA que de un chico

(c). Es igual de probable que se trate de una chica que de un chico

(d). No se puede concluir nada al respecto

4.- Cuando se lanzan simultáneamente 3 dados ¿Cuáles de los siguientes resultados es más fácil que ocurra?

(a). Obtener de alguna forma 5, 3 y 6

(b). Obtener de alguna forma dos veces el 5 y una vez el 3

(c). Obtener 3 veces el 5

(d). Todos estos resultados son igualmente probables

5.- Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales, numeradas del 1 al 5 ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra al girar la ruleta tres veces

(a). Obtener exactamente 2, 1 y 5 (en ese estricto orden)

(b). Obtener 2, 1 y 5

(c). Obtener de alguna forma dos veces el 1, y una vez el 5

(d). Las opciones (a), (b) y (c) son igual de probables

CUESTIONARIO. Segunda parte

(Hoja de Problemas).

Instrucciones: A continuación se le plantean 6 situaciones relacionadas con el cálculo de probabilidades. Para cada una de ellas justifique de manera escrita su respuesta a cada una de las preguntas que se le plantean en cada situación.

Problema 1

Hay un semáforo que regula el tráfico en cierto cruce y que puede encontrarse en uno de los siguientes estados: ROJO, VERDE y AMARILLO. ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea ROJO o VERDE?

Problema 2

Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión?

Problema 3

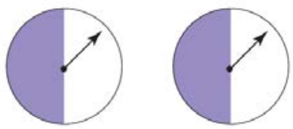
Suponga que participa en un juego que consiste en lanzar dos dados de simultánea, ¿Cuales de los siguientes eventos consideras tú que es más probable que suceda: Obtener de alguna manera un 5 y un 6; u obtener 6 en los dos dados.

Problema 4

Santiago tiene una bolsa negra que contiene cuatro canicas, cada una de ellas está etiquetada con los siguientes dígitos: 4, 6, 8 y 1. El pide a un compañero que seleccione una canica de la bolsa y anote el número, y después regresa la canica a la bolsa. Este procedimiento se repite hasta completar 3 dígitos. ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos se espera que puedan obtener el amigo de Santiago?

Problema 5

Un juego de la feria consta de dos ruletas como las que se muestran en la figura. Un jugador gana un premio sólo si ambas flechas caen en el área sombreada, cuando se hace girar una vez cada una de las flechas. ¿Consideras que el juego anterior es equitativo?



ANEXO B

TRANSCRIPCIÓN DE RESPUESTAS

[ANEXO B-1]

[Respuestas a la Pregunta 1]

Pregunta 1

En la caja A se han introducido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han colocado 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si para ganar un premio debes sacar una ficha negra (sin ver dentro de la caja), ¿Cuál caja escogerías para realizar la extracción?

(e) La caja A da mayores posibilidades de obtener la ficha negra
(f) La caja B da mayores posibilidades de obtener la ficha negra
(g) Las dos cajas dan la misma posibilidad
(h) No se puede concluir nada al respecto

Sujeto	Opc.	Respuesta
P1	a	Ya que si en la caja A tenemos 3 negras y 1 blanca, la probabilidad de que salga negra es ¾, y en la caja B teniendo 2 negras y una blanca la probabilidad de que sea negra es 2/3. Así la caja que elegiría sería la A pues tengo un 75% de mayor posibilidad.
P2	a	Puesto que hay 3 fichas negras y sólo 1 blanca, pues existe más posibilidades que en la otra caja que tan solo hay 2 fichas. Aunque no se puede ver la ficha sino al momento que se sacó, considero que la posibilidad de la caja A es mayor.
P3	a	Creo que la caja A da mayores posibilidades porque, si bien en ambas cajas hay una posibilidad para equivocarse, la caja A da una opción más para aceptar.
P4	a	Elegí la opción a debido a que en la caja A hay más fichas negras para extraer y tiene más posibilidades
P5	a	Porque al tener más fichas negras, existe la posibilidad de sacar una de dicho color
P6	a	Elegiría la caja A ya que hay un 75% de obtener un ficha negra mientras que en la B hay un 66.6% de obtener una negra
P7	a	La opción correcta es la a ya que entre las dos cajas la caja A. ya que ¾ representa una probabilidad mayor que 2/3 que están en la caja B
P8	a	En caja A hay 4 fichas de las cuales 3 son negras, hay 3 casos de 4 en los que se puede sacar una negra y en la B solo 2 de 3
P9	a	En la caja A se han metido 3 fichas negras y una ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negra y 1 ficha blanca Se sabe que se tienen 2 cajas: Caja A: 3 fichas negras y 1 blanca Caja B: 2 fichas negras y 1 blanca Si se tiene que escoger una ficha negra para sacar un premio, sin mirar dentro de la caja y se busca elegir una de las dos cajas para hacer la extracción, partimos de lo siguiente: Caja A: 3 fichas negras y 1 blanca. Así si se desea sacar una ficha negra para ganar llamemos N: Sacar una negra P(N)= ¾ P(N)= 0,75 Caja B: s fichas negras y una blanca P(N)=2/3 P(N)=0,66 Por lo tanto la caja A da más probabilidades de obtener una ficha negra.
P10	a	Aunque no recuerdo bien la teoría de Probabilidad, puedo recordar que esta se resuelve por un principio de adición; es decir: Se tiene un total en la caja A = 4 fichas Se tiene un total en la caja B=3 fichas Caja A: 3 fichas negras y 1 ficha blanca Caja B: 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Esto es Caja A Caja B Negra 3/4 2/3 Blanca 1/4 1/3 Efectuamos las operaciones de fracciones, simplificación de los números:

		3/4 . 2/3 =6/12=3/4=0,75 1/4 . 1/3 = 1/12 = 0,08 Ahora sumamos los resultados 0,75 + 0,08 = 0,83 Pero en razón a la pregunta más probabilidad tiene la caja A que es igual a 0,75
P11	a	Porque ofrece un 75% de éxito para extraer una bola negra P_A = 3/4 = 0,75
P12	a	Caja A hay 3 fichas negras y 1 F blanca Caja B 2 fichas negras y 1 F blanca Caja A total de fichas 4 3 F negras 75% 1 F blanca 25 % Caja B total de fichas 3 2 F negras 66,6% 1 F blanca 33,3% Por lo tanto el porcentaje más alto de fichas negras la tiene la caja A con un 75% Respuesta A
P13	a	Por el hecho de que la ficha negra está en proporción 3 a 1
P14	a	4---------> 3 3---------> 2 100%--------> ? 100%--------> ? 3x100=300 2x100=200 300/4=75% 200/3=66,6% De lo anterior se puede notar que la respuesta (a) tiene un 75% de posibilidad para obtener la ficha negra
P15	a	Elegiría la caja A, ya que tiene más posibilidades de salir la ficha buscada, porque su probabilidad es de 0,75 mayor que la otra.
P16	a	Considero por lógica que en la caja “A” hay mayor probabilidad de sacar una ficha negra, debido a que en esa caja se encuentra mayor cantidad de fichas negras en comparación con la caja “B”
P17	a	Escogería la caja A ya que tiene 3 posibilidades de ganar y una sola de perder
P18	a	La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra, pues tengo como tres chances u opciones de sacar una ficha negra, mientras que en la caja B solo tengo dos
P19	a	Opción A, ya que al calcular la probabilidad de ambas cajas obtenemos los siguientes resultados: $P(a) = \frac{Casos\ Favorables}{casos\ posibles}$ $P(a) = \frac{3}{4} = 0,75$ $P(b) = \frac{2}{3} = 0,66$ Lo quiere decir que existe el 75% de posibilidad de sacar una ficha negra en la caja A.
P20	a	Tomaría la caja A puesto que tiene más fichas negras que en la caja B, pues en la primera caja hay una probabilidad de 3/4=0,75 y en la caja B hay 2/3=0,66

[ANEXO B-2]

[Respuestas a la Pregunta 2]

Sujeto	Opc.	Respuesta
Pregunta 2 *Dos cajas contienen bolas negras y blancas de la siguiente manera: La caja T: 2 negras y 2 blancas y la caja P: 4 negras y 4 blancas. ¿Cuál de estas dos cajas (T o P) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola negra* *(a) La caja T* *(b) La caja P* *(c) La misma posibilidad* **(d)** *No se puede concluir nada al respecto*		
P1	c	Opción c, es la misma posibilidad la que me ofrece la cja T o la P ya que $P_T = 2/4$ y $P_P = 4/8$
P2	b	Pues como hay más bolas negras y blancas, la posibilidad es mayor porque le lleva 2 bolas de diferencia a la otra caja
P3	c	Porque en cada una de las cajas hay igual de posibilidades de extraer una bola negra
P4	c	Elegí la c, debido a que ambas cajas tienen la misma cantidad de bolas negras y blancas, en una hay dos de cada color y la otra 4. Por tal razón, al momento de extraer una bola negra ambas ofrecen la misma posibilidad
P5	c	Tanto la caja T como la Caja P ofrecen la misma posibilidad de extraer una bola negra porque los eventos son proporcionales
P6	c	Ambas ofrecen la misma posibilidad de extraer una bola negra el 50% en ambas cajas
P7	c	La opción correcta en este caso en la C ya que ambas cajas tienen las mismas posibilidades, en las dos hay una probabilidad de 50%
P8	c	Tienen la misma posibilidad porque ambas cajas tienen las mitad de las bolas negras y mitad de bolas blancas, es decir, ambas tienen 1/2 de posibilidades
P9	c	Para ver cual posee más probabilidad de extraer una bola negra, hacemos de nuevo estudio de casos Caso T P(N)=2/4=1/2=0,5 Caso P P(N)=4/8=1/2=0,5 Así ambas tienen la misma posibilidad
P10	c	El total de bolas de la caja T es de 4 bolas 2 negras y 2 blancas El total de bolas de la caja P es de 8, 4 negras y 4 blancas Así, operando tenesmos que 2/4=1/2 bolas negras Caja T 2/4=1/2 bolas blancas Caja T 4/8=2/4=1/2 bolas negras Caja P 4/8=2/4=1/2 bolas blancas Caja P Ahora tenemos que 1/2 . 1/2 = 1/4 = 1/2 = 0,5 1/2 . 1/2 = 1/4 = 1/2 = 0,5 Tienen la misma posibilidad
P11	c	Las dos cajas ofrecen la misma posibilidad ya que $P_T = 2/4$ $P_P = 4/8$ = 1/2 = 1/2 = 0, 5 = 0,5 Esto es 50% y 50% de probabilidad en la extracción de una bola negra
P12	c	Caja T con 2 bolas negras y 2 bolas blancas Caja P con 4 bolas negras Caja T tiene 50% bolas negras 50% bolas blancas Caja P tiene 50% bolas negras 50% bolas blancas Por lo tanto se observa que tienen la misma posibilidad ambas (Caja T=P en posibilidades)

P13	c	Porque ambas tienen la misma probabilidad de salir seleccionada
P14	c	La caja T 2/4 (Cantidad de bolas negra/Cantidad de bolas) Caja P (4/8 (Cantidad de bolas negras/Cantidad de bolas) Se tiene la probabilidad del 50% de obtener una bola negra en cualquiera de las dos cajas
P15	c	La opción c es la respuestas correcta ya que su porcentaje de posibilidad es de 50% en ambas
P16	c	Pienso que la misma posibilidad porque en ambas cajas se presentan contenidos de bolas, correspondiendo por cada cantidad de blancas el mismo número de negras
P17	c	Ya que las dos cajas poseen igualdad, entonces tenemos las mismas posibilidades
P18	c	Las dos cajas me dan la misma posibilidad de obtener una bola negra porque contienen el mismo porcentaje de bolas negras y blancas. 50% y 50%
P19	c	Ambas tienen la misma posibilidad a la hora de la extracción, a pesar de que una caja tiene en total más bolas que otras, ambas tienen la misma cantidad de bolas blancas y negras en las respectivas cajas. Por otra parte hagamos los respectivos cálculos de probabilidad para amabas cajas y así dar veracidad en la respuesta. $P(t) = \frac{2}{4} = 0{,}50$ $P(p) = \frac{4}{8} = 0{,}50$ Como ha de notarse con los cálculos ambas tienen el 50% de posibilidad.
P20	c	Es indiferente, en cada caso hay un 50% de posibilidades. Pues se trata de P(T)= 2/4=1/2 y P(P)= 4/8= 1/2, aunque pareciera más fácil en la caja P porque hay más negras pero también hay más fichas en total.

[ANEXO B-3]

[Respuestas a la Pregunta 3]

Pregunta 3

Una clase tiene 29 estudiantes de los cuales 13 son chicos y 16 son chicas. Se escribe el nombre de cada estudiante en un trozo de papel. Se colocan los papeles en un sombrero. El profesor toma uno de los papeles sin ver. Si el profesor pregunta a qué sexo corresponde el nombre del papel, ¿cuál de las siguientes opciones responderías?

(a). Es más probable que se trate de un CHICO que de una chica
(b). Es más probable que se trate de una CHICA que de un chico
(c). Es igual de probable que se trate de una chica que de un chico
(d). No se puede concluir nada al respecto

Sujeto	Opc.	Respuesta
P1	b	La opción b ya que si tenemos 29 estudiantes, donde 13 chicos (A) y 16 chicas (B), la probabilidad es mayor en B P(A)= 13/39=0,33 33% P(B)=16/39=0,42 42% 33% <42%
P2	b	Donde hay mayor cantidad es donde existe mayor posibilidad
P3	b	Por haber tres chicas más que la cantidad total de chicos, hay tres oportunidades más de sacar el nombre de una chica del sombrero
P4	c	Elegí la opción C, porque considero que ambos tanto chicos como chicas tienen la misma ´probabilidad de ser seleccionados, a pesar de haber más chicas que chicos, pero al momento de tomar un papel sin ver no se puede asegurar que sexo corresponde.
P5	b	Porque son más chicas que chicos
P6	b	Es más probable que se trate de una chica ya que la probabilidad es 55% y hay más chicas que chicos en clase
P7	b	Yo elegiría la opción b, ya que es más probable que salga una chica que un chico dado la cantidad de estudiantes de sexo femenino en la cantidad total de estudiante
P8	b	Hay mayor cantidad de chicas que de chicos en la clase
P9	b	A: Obtener Chico, así P(A)=13/29 P(A)=0,44 B: Obtener Chic, así P(B)=16/29 P(B)=0,55 Por lo tanto, hay más posibilidades de obtener una chica y por ende ante la pregunta del profesor, respondería la opción B. Es más probable que se trate de una chica que de un chico
P10	a	En esta pregunta si más no recuerdo la teoría tenemos tres conjuntos es decir A = { se selcciona un chico} B = { se selecciona una chica} C = que es el espacio muestral Ahora bien yo sé por axioma que el espacio muestral es igual a 1. Ahora P(A) = (La probabilidad de A es) = 0, 13 (13/100) P(A)= 1-0, 13 = 0,87 La probabilidad de que ocurra es 0, 87 % Ahora con B P(B) = 0, 16 (16/100) P(B) = 1- 0,16 P(B) = 0,84 Existe la probabilidad de que se trate de un chico que de una chica.
P11	b	La opción b, ya que hay más chicas que chicos en el aula y además Probabilidad de chicos (P_v) P_v = 13/29 y probabilidad de chicas (P_c) P_c = 16/ 29 Luego $P_v < P_c$

P12	b	39 papeles equivale a un 100%, 16 son mujeres, 13 son chicos Por lo lógico hay más probabilidad que saque más el de las chicas ya que hay más papeles que de la de los chicos.
P13	b	Es por el hecho de que hay más chicas del total del grupo
P14	b	Chicos Chicas 20--------> 13 20-------->16 100%----->44,82% 100%---->55,7%
P15	b	Respondería la opción b, ya que la probabilidad es de 0,55 y la otra es de 0,44, por lo que es más probable que ocurra que salga chica
P16	b	Es más probable que se trate de una chica ya que hay mayor cantidad de papeles con nombres femeninos
P17	b	Ya que hay mayor cantidad de chicas que de chicos y la probabilidad es mayor
P18	b	Es más probable que se trate de una chica que de un chico porque hay mayor cantidad de chicas que de chicos
P19	b	Opción B, al igual que en las respuestas anteriores se llega a esta elección después de realizar los cálculos necesarios que avalan tal respuesta. Nota: Sea P(m) = probabilidad de las chicas y P(h) = probabilidad de los hombres. $P(m) = \frac{16}{29} = 0,55$ $P(h) = \frac{13}{29} = 0,44$ De acuerdo a estos resultados existe un 55% de posibilidad de que se trate de una chica
P20	b	Es más fácil obtener una chica pues hay mas chicas que chicos en el grupo

[ANEXO B-4]

[Respuestas a la Pregunta 4]

Pregunta 4

Cuando se lanzan simultáneamente 3 dados ¿Cuáles de los siguientes resultados es más fácil que ocurra?

(a). Obtener de alguna forma 5, 3 y 6
(b). Obtener de alguna forma dos veces el 5 y una vez el 3
(c). Obtener 3 veces el 5
(d). Todos estos resultados son igualmente probables

Sujeto	Opc	Respuesta
P1	d	Luego de razonar cada una de las opciones llegaría a tomar como respuesta la opción D ya que todos los resultados son posibles (No estoy seguro de la respuesta y tampoco sé explicarlo matemáticamente)
P2	d	Sería muy remoto poder decir que las opciones anteriores serían las correctas pues cada dado tiene 6 caras y se pudiese decir 6 caras por 3 dados serían 18 posibilidades que podría salir.
P3	--	No lo sé
P4	d	La opción d me parece la más acertada, ya que al lanzar tres dados simultáneamente no se puede saber a ciertas cual es el resultado a obtener, motivo por el cual todos tienen la misma probabilidad
P5	d	Todos estos resultados son igualmente probables porque se está considerando el mismo espacio muestral, es decir, las 6 caras de los dados.
P6	d	Al lanzar tres dados es posible que ocurra cualquier resultado, por lo tanto todos son probables
P7	d	Creo que todos los resultados son igualmente probables ya que un dado solo hay 6 números pero ninguno se repite
P8	a	Hay 6x6x6=216 posibles resultados. Se elige la opción A porque como no hay repeticiones tiene más posibilidades de que suceda ya que el 5, el 3 y el 6 pueden variar en cualquiera de los tres dados. En la B el 3 es el único que puede variar ya que el 5 se repite dos veces y en la C hay un solo caso porque el 5 se repite en los tres dados por lo tanto no varía
P9	c	Por principio de la multiplicación cada uno de los dados tiene 6 posibilidades, así que tenemos 6.6.6=216 Estudiemos cada uno de los resultados que se presentan (A) Obtener 5, 3 y 6 P(A)= 1/6 . 1/6 . 1/6 =1/216 (B) Obtener el número 5 tres veces P(B)= 1/6 . 1/6 . 1/6 (C) Obtener dos veces el 5 y una vez el 3 Si V= obtener 5 y T=obtener 3 tenemos que $P(C) = P(V) \cap P(V) \cap P(T) \cup P(V) \cap P(T) \cap P(V) \cup P(T) \cap P(V) \cap P(V)$ $=1/6 . 1/6 . 1/6 + 1/6 . 1/6 . 1/6 + 1/6 . 1/6 . 1/6 = = 1/216 + 1/216 + 1/216 = 3/216= 1/72$ Por lo tanto es más fácil que ocurra la opción c
P10	b	Aquí se debe construir un espacio muestral S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24} No recuerdo bien este procedimiento, es por evento asociado, es decir, si formamos un conjunto con los número impares, obtendría S_1 = {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23} no estoy segura pero puede ser la opción b
P11	d	Se pueden obtener 2160 resultados, ya que un dado tiene 6 caras, es decir 6 opciones diferentes y aplicarle el factorial 6¡ = 6.5.4.3.2.1=720 Entonces como son tres dados simultáneos 720 x 3 = 2160
P12	d	No tengo idea de cómo resolver estos ejercicios
P13	d	Existen las mismas posibilidades que cualquiera de los eventos ocurra

P14	---	No sé, creo que ambos son posibles
P15	d	Todas las combinaciones son posibles porque son eventos mutuamente excluyentes, la opción D es la correcta
P16	d	Todos estos resultados son igualmente probables al considerar que los dados poseen una misma forma cuadrada y son rodados al mismo tiempo, tropezando entre ellos o con cualquier objeto, además de tomar en cuenta el roce por el arrastre al rodarse sobre alguna superficie, cualquier resultado sería probable
P17	a	Es más probable que todas sean diferentes a que todas sean parecidas
P18	d	Todos estos resultados son igualmente probables, pues si hablamos de dados nos referimos a una figura geométrica que es el cubo que tiene la característica de tener todos sus lados iguales, al momento de lanzarlo no se va a inclinar hacia un lado especial por poseer sus lados iguales.
P19	d	Opción D. ya que este evento es equiprobable, puesto que cada dado tiene 6 lados lo que quiere decir que en total contamos con 18 caras (6 caras x 3 dados que tenemos). Por lo tanto al calcular la probabilidad de (a), (b) y (c) es resultado que obtendríamos seria el mismo. Obsérvese $P(a) = \frac{3}{18} = 0{,}16$
P20	a	Es más fácil obtener a. Con 3 dados hay un espacio muestral de 6.6.6= 216 posibles resultados, el espacio muestral en este caso. Como el 5, el 3 y el 6 se pueden obtener en cualquier manera, entonces hay 6 posibilidades como por ejemplo 536, 635, 365, 563, 653, 365 y así. Tres veces 5 pasa de una sola forma y en el otro caso hay solo tres opciones 553, 355, 535, entonces las probabilidades son 6/216; 3/216 y 1/216. Es mejor la opción a

[ANEXO B-5]

[Respuestas a la Pregunta 5]

Pregunta 5

Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales, numeradas del 1 al 5 ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra al girar la ruleta tres veces

(a). Obtener exactamente 2, 1 y 5 (en ese estricto orden)
(b). Obtener 2, 1 y 5
(c). Obtener de alguna forma dos veces el 1, y una vez el 5
(d). Las opciones (a), (b) y (c) son igual de probables

Sujeto	Opc	Respuesta
P1	d	La opción A, B y C son igual de probables
P2	d	Todos pueden ser probables porque están girando la ruleta tres veces y hay 5 áreas iguales entonces en cada giro la probabilidad sería igual en cada área.
P3	---	En realidad no lo sé
P4	d	Al igual que la anterior todas las opciones tienen la misma probabilidad de salir. Porque al girar la ruleta uno no sabe cual resultado que saldría
P5	d	Ya que se establecen eventos que involucran los mismos elementos atendiendo a situaciones distintas
P6	d	-------
P7	----	Ni idea, esto es muy complejo para mí.
P8	b	Se elige esta ya que no hay repeticiones (al contrario de la opción c) y el 2, el 1 y el 5 pueden variar de ocurrencia (a diferencia de la opción a)
P9		Evaluamos las diferentes opciones, sin embargo se hace la aclaratoria, de que las áreas correspondientes a los números numerados del 1 al 5 son iguales por lo que existe la misma probabilidad por cada número. A. 2, 1 y 5 En este orden exactamente Sean A= Obtener 2, 1 y 5 en ese orden exacto D= obtener 2 U=Obtener 1 C= Obtener 5 $P(A)=P(D)\cap P(U)\cap P(C)=1/5 . 1/5 . 1/5 = 1/125=0,008$ B. 2, 1 y 5 en cualquier orden Sean B=Obtener 2,1 y 5 en cualquier orden $P(B)= P(D).P(U).P(C)\binom{5}{3}= 1/125 . 60 = 60/125=0,48$ C. 1,1 y 5 en cualquier orden Sea V=Obtener 1, 1 y 5 en cualquier orden $P(V)= P(D).P(U).P(C)\binom{5}{2}= 1/125 . 10 = 10/125=0,08$ Así, existe más probabilidad de obtener un 2,1, 5 en cualquier orden, lo cual corresponde con la opción (b)
P10	----	Al igual que el problema anterior no recuerdo el procedimiento, me parece que son eventos asociados.
P11	d	Las opciones A y B tienen la misma probabilidad ya que no están condicionadas por el orden de obtención de los números P(A)=3/5 y P(B)= 3/5
P12	----	No tengo idea de cómo resolver este ejercicio
P13	----	No lo sé
P14	d	Porque está dividida en 5 áreas iguales, entonces todas poseen el mismo porcentaje o la misma probabilidad
P15	d	Como son eventos mutuamente excluyentes todas las opciones presentadas tienen la misma posibilidad de ocurrencia
P16	d	Cualquier resultado en realidad es probable, tomando en cuenta de rodarse al azar
P17	b	La B ya que las probabilidades son parecidas pero el orden no es probable.
P18	d	Son igual de probables creo que eso viene dado por la cantidad de fuerza que se le aplique

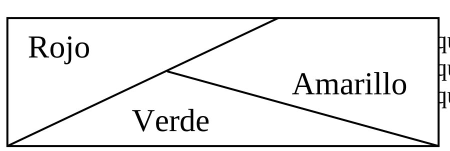
<table>
<tr><td></td><td></td><td>a la ruleta al momento de girarla</td></tr>
<tr><td>P19</td><td>d</td><td>De igual manera que en la pregunta anterior, la opción es la D; ya que este evento también es equiprobable</td></tr>
<tr><td>P20</td><td>b</td><td>Es igual que en la pregunta anterior. Pero en este caso el espacio muestral es de $5^3=125$ casos posibles.
<table><tr><td>5 opciones</td><td>5 opciones</td><td>5 opciones</td></tr></table>Entre la opción a y b hay diferencia es en el orden, en la primera se trata de una sola opción y en la segunda es 3!=6 porque es de cualquier forma y la opción solamente son los casos 115, 511 y 151
Así al dividir 6/125 y 3/125, se ve la opción es la b</td></tr>
</table>

[ANEXO B-6]

[Respuestas al Problema 1]

Problema 1

El semáforo que regula el tráfico en cierto cruce puede encontrarse en uno de los siguientes estados: ROJO, VERDE y AMARILLO. ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea ROJO o VERDE?

Sujeto	Respuesta
P1	La probabilidad de que sea ROJO o VERDE es ROJO=P(R)=1/3 VERDE=P(V)=1/3 P(R)+P(V)=1/3 + 1/3 = 2/3=66,67%
P2	Existe tiempo específico que regulan el cambio de las luces en los semáforos, la probabilidad de que cambie de un estado a otro es tan sólo en cuestión de segundos
P3	Yo diría que rojo, porque es la luz que más tiempo tarda en cambiar
P4	La probabilidad es la misma porque en cualquier segundo la luz puede cambiar
P5	Como los estados del semáforo Rojo o Verde no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, son mutuamente excluyentes, la probabilidad es 1/3
P6	El semáforo puede encontrarse en uno de los 3 estados, por lo tanto la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea rojo es 1 de 3 por lo tanto su probabilidad es 33,33% e igualmente si es verde su probabilidad es 1 de 3 por lo tanto hay 33,33% de probabilidad también que el semáforo sea verde
P7	Los tres eventos probabilísticos de este caso son A={semáforo en rojo} P(A)=1/3 B={Semáforo en Verde} P(B)=1/3 C={Semáforo en Amarillo} P(C)=1/3 La probabilidad cuando el semáforo sea Rojo o verde, se puede escribir de la forma $P(A\cup B)$ de manera que: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/3 = 2/3$ por teoremas fundamentales de cálculo probabilístico
P8	Hay tres casos, en los casos del instante determinado mencionan 2 Rojo o Verde. De 3 casos la posibilidad que sucedan estos 2 es de 2/3 ya que son 2 de tres casos.
P9	Sea R=Obtener Rojo, V=Obtener Verde, A=Obtener Amarillo Que tiene que P(R)=P(V)=P(A)=1/3 Así que $P(R \cup V) = P(R) \cup P(V) - P(R\cap V)$ Sin embargo no existe punto de intersección entre obtener rojo y verde, por lo cual $P(R\cap V) = \varnothing$, así $P(R \cup V) = 1/3 + 1/3 = 2/3$. La probabilidad de obtener rojo o verde es 2/3
P10	Tenemos la probabilidad de que ocurren tres eventos pero nos piden dos de estos tres. El evento A: que el semáforo esté en rojo El evento B: que el semáforo esté en verde El evento C: que el semáforo esté en amarillo El conjunto llamado semáforo quedaría particionado así  que el semáforo esté amarillo} que el semáforo esté rojo} que el semáforo esté verde} También tengo amarillo P(A), Rojo P(R), Verde P(V) No recuerdo con exactitud el procedimiento completo de este ejercicio

P11	S= { R, V, A} R=Rojo, V=Verde, A=Amarillo S_1 ={ Sea rojo o verde el estado del semáforo} $P(R \cup V) = P(R) + P(V) = 1/3 + 1/3 = 2/3$
P12	Semáforo: Rojo, Verde, Amarillo. Posibilidad tres cambios Rojo es 1/3 Amarillo es 1/3 Verde es 1/3
P13	------
P14	El semáforo sólo tiene 3 posibilidades, y la probabilidad de que este se encuentre ya sa en rojo o verde es de 1/3
P15	Definimos los eventos y el espacio muestral S = { Amarillo, Verde, Rojo} N° S = 3 A={Rojo} N° A = 1, B={Verde} N° B = 1, C={Amarillo} N° C = 1 P(A) = 1/3, P(B) = 1/3 Entonces por teorema de probabilidad clásica, ya que los eventos son mutuamente excluyentes, tenemos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/3 = 0,6$
P16	Considero que en este caso la probabilidad más bien estaría regida por un tiempo determinado, ya que por cada cambio de luz se ha sistematizado un tiempo preciso.
P17	No sé
P18	----------
P19	No sé, no entiendo
P20	La probabilidad es de 2/3, ya que solamente hay 3 casos posibles: Rojo (R), Verde (V) y Amarillo (A); y 2 casos favorables que son el Rojo y el Verde, por lo tanto P=2/3=0,67

[ANEXO B-7]

[Respuestas al Problema 2]

Problema 2 *Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión? Argumente la misma apoyándose en sus conocimientos acerca de Probabilidad*	
Sujeto	**Respuesta**
P1	Pienso que Rosa no tiene razón en lo que dice ya que primero el hecho de que sea mayor y por más inteligente no quiere decir que tenga mayor probabilidad de extraer una bola blanca, y además si Pilar Rosa 40B + 20N 30B + 15N P(P)= 40/60 P(R) = 30/45 4/6 6/9 2/3 2/3 0,67 0,67 67% 67%
P2	Considero que la edad no influye, en tal caso Rosa tendría que considerar es la cantidad de bolas que Pilar tiene y que tanta diferencia existe entre las de ella.
P3	La edad de las chicas no tiene nada que ver con la probabilidad de sacar una bola blanca. Todo es de la cantidad de bolas en cada caja
P4	Considero que Pilar tiene más posibilidades de sacar una bola blanca porque tiene mayores número de ellas
P5	La probabilidad de sacar una bola blanca o no de la caja no depende de la edad, ni de la inteligencia del individuo, sino del espacio muestral y los eventos que se estén considerando. En este caso ambas tienen la misma posibilidad porque los eventos son proporcionales.
P6	Por casos favorables entre casos posibles ambas tienen la misma probabilidad de extraer una bola blanca, la edad no importa en cuanto a la probabilidad porque tanto pilar como rosa tienen el 66% de probabilidad de obtener una bola blanca
P7	Rosa está equivocada, ambas tienen la misma probabilidad, que es de 2/3, la edad de Pilar no afecta la probabilidad de sacar una bola blanca. Al dividir los casos favorables entre los posibles en ambos casos da lo mismo 2/3
P8	Opino que Rosa está equivocada. La verdad es que las dos tienen la misma posibilidad de sacar una bola blanca ya que existe una proporción entre ambas, ya que Pilar tiene 60 bolas de las cuales 40 son blancas, es decir, un 66% y Rosa tiene 45 bolas de las cuales 30 son blancas es decir un 66% por lo tanto tienen la misma probabilidad
P9	Tenemos que en la caja de Pilar hay 40 bolas blancas y 20 negras. Se define B= Obtener una blanca Así P(B)=40/60=2/3 P(B)=0,66 Por otro lado En la caja de Rosa hay 30 bolas blancas y 15 negras. Se define B = Obtener bola Blanca Así P(B)= 30/45=6/9=2/3 P(B)=0,66 Por lo tanto sin importar el número de años que posea cada una, existe la misma probabilidad de obtener una bola blanca para las dos.
P10	Considero empíricamente que no es que Pilar saque más porque sea mayor o más inteligente sino porque según el comportamiento de la función, o sea según el rango en que

	se desarrolle es que va a dar el resultado; obviamente al tener más bolas Rosa que Pilar habrá mayor oportunidad a que esta ocurra
P11	Pilar (10 años) 40 bolas blancas (B) 20 bolas negras (N) P_B = 40/60 = 2/3 Rosa (8 años) 30 bolas blancas (B) 15 bolas negras (N) P_B = 30/45 = 2/3 Mi opinión es que la edad no tiene que ver con la posibilidad de extraer una bola blanca; esto ya es cuestión de azar y como se puede observar arriba, las dos tienen las misma probabilidad
P12	Pilar 10 años. Caja 40 bolas blanca y 20 bolas negras Rosa 8 años. Caja 30 bolas blanca y 15 bolas negras Pilar 40 B blancas 66,6% y 20 B negras 33,3% 60=100% Rosa 30 B blancas 66,6% y 15 B negras 33,3% 45=100% Con lo observado tienen la misma probabilidad de sacar una bola blanca
P13	No tiene nada que ver con la inteligencia pues aquí está presente es el azar y por la cantidad de bolas ambas tienen la misma posibilidad.
P14	En este caso no importa si Pilar es mayor o más inteligente que Rosa. Aunque Pilar posee 60 bolas de las cuales 40 son blancas, Rosa posee 45 bolas de las cuales 30 son blancas Pilar Rosa 60------>40 45--------->30 100%-----> 100%-------> 40x100 / 60 = 66,6 30x100 / 45 = 66,6 Ambas chicas en sus casos tienen 66,6 % de probabilidad de sacar una bola blanca
P15	La niña está errada ya que la posibilidad de extraer una bola blanca, no está en la edad de su oponente ni en la inteligencia que ´pueda poseer, sino en el porcentaje de ocurrencia del evento, que en este caso es el 66,6% en la caja de pilar
P16	Pienso que la misma posibilidad porque en ambas cajas se presentan contenidos de bolas, correspondiendo por cada cantidad de blancas el mismo número (la mitad) de negras.
P17	Ambas tienen posibilidad de sacar una bola blanca, pero no porque sea mayor, sino porque Pilar de 40 bolas blancas, tiene 66% de probabilidad igual que Rosa P=66% 40/60=0,66 R=66% 30/45=0,66
P18	Las dos tienen la misma posibilidad. Pilar aunque tiene 40 bolas blancas, también tiene 20 negras que es la mitad de sus bolas blancas, al igual que Rosa que tiene 30 bolas blancas y 15 negras que es la mitad de sus bolas blancas. No tiene nada que ver que Pilar sea mayor que Rosa ni mucho menos que una sea más inteligente que la otra.
P19	Ambas tienen la misma posibilidad de extraer una bola blanca, indistintamente de quien sea mayor y más inteligente, puesto que al calcular la probabilidad que tienen ambas observamos que son iguales. A continuación se presentan los resultados de dichos cálculos. $P(p) = \frac{40}{60} = 0{,}66$ $P(r) = \frac{30}{45} = 0{,}66$ Así ambas tienen el 66% de posibilidad de extraer una bola blanca.
P20	La inteligencia ni la edad tienen que ver, pues se trata de la suerte en este caso. Rosa no tiene razón en lo que dice. De hecho las dos tienen la misma probabilidad pues que Pilar saque una blanca es 40/60=2/3 y que Rosa saque una balnca es 30/45=2/3 así que no ha ventajas.

[ANEXO B-8]

[Respuestas al Problema 3]

Participante	Respuesta
Problema 3 *Cuando se lanzan dos dados simultáneamente, ¿Cuál de los siguientes eventos consideras que es más probable: Obtener de alguna manera un 5 y un 6; u obtener 6 en los dos dados.*	
Participante	**Respuesta**
P1	Los dos tienen la misma probabilidad (a simple inspección)
P2	Dos dados suman 12 caras y 12 posibilidades no considero que las 2 alternativas sean probables
P3	No lo sé
P4	Obtener un 5 y un 6 ya que es más difícil sacar en ambos dados
P5	De acuerdo con mi noción de probabilidad, es más probable obtener un 5 y un 6 que 6 en ambos dados simultáneamente, pues en el primer evento se consideran 2 opciones y en cambio en el segundo sólo se estable una opción
P6	Los eventos son igual de probables ya que no es posible determinar a ciencia cierta que saldrá de primero si un 5 o un 6 o dos 6
P7	Ambos eventos tienen la misma probabilidad, ya que, ninguno de los dos eventos interfiere en la recurrencia del otro
P8	Obtener un 5 y un 6, ya que hay dos opciones de que salga, que salga primero el 5 y después el 6 o viceversa. En cambio que salgan dos 6 solo tiene una sola manera
P9	Sean P=Obtener un 5 y un 6 C=Obtener 5 S=Obtener seis P(P)=1/6 . 1/6 + 1/6 . 1/6 = 1/36 + 1/36= 2/36= 1/18 = 0,05 Por otro lado, sea F= Obtener 6 en los dos dados s=Obtener 6 P(F)=1/6 . 1/6 =1 /36=0,02 Así, es más probable obtener un 5 y un 6
P10	Formamos el conjunto que a través de suma me da el resultado buscado P(A) ={(2,3); (4,1)} y P(B)={(5,1), (4,2), (3,3)} 2/5= 0,4 3/6 = 0,5 Al parecer hay más probabilidad de que salga el número 6
P11	Para mí, por mi experiencia en juegos, es más fácil obtener un 5 y un 6. Sin embargo al calcular la probabilidad de ambos eventos, presentan la misma posibilidad de obtención. 1/36
P12	No tengo idea de cómo resolver este problema
P13	Los dos eventos son posibles. Tienen las mismas posibilidades, una cada uno
P14	No sé, Cualquiera de los dos puede pasar
P15	Ambos son probables, obtener un 5 y un 6 y obtener un 6 en ambos; ya que un dado sólo posee 6 caras, y como se trata de 2, por combinatoria tiene la misma posibilidad; 1 de 36
P16	Obtener un 5 y un 6 de cualquier manera, debido a que por la cantidad diversa de números contenidos por los dados se da la posibilidad de que salgan varios, 5 y 6 o 6 y 5, en vez del mismo para los dos.
P17	No entiendo, no lo sé
P18	No contesta
P19	Ambos eventos pueden ocurrir, tienen la misma posibilidad de obtener alguno de los dos resultados; porque esto es un evento equiprobable
P20	Como el 5 y el 6 se pueden obtener de dos manera 5-6 y 6-5 pero no con el 6-6, entonces es más fácil obtener 5 y 6 que dos veces el 6.

[ANEXO B-9]

[Respuestas al Problema 4]

Problema 4

Santiago tiene una bolsa negra que contiene cuatro canicas, cada una de ellas está etiquetada con los siguientes dígitos: 4, 6, 8 y 1. El pide a un compañero que seleccione una canica de la bolsa y anote el número, y después regresa la canica a la bolsa. Este procedimiento se repite hasta completar 3 dígitos. ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos se espera que puedan obtener el amigo de Santiago? Explique

Participante	Respuesta
P1	Se esperan 64 números diferentes de 3 dígitos. Eso creo porque son 4 números pero se escogen sólo tres de esos cuatro siempre, pues se valen números con las mismas cifras. Ver imagen (Diagrama de árbol)
P2	No entiendo mucho la formulación de la pregunta, pero creo que está relacionado con la formulación de triples.
P3	No lo sé
P4	Puede obtener 8 por haber 4 canicas
P5	No comprendo bien el planteamiento. Sin embargo, dando respuesta a la interrogante en función de que pude entender, creo que se espera obtenga 24=4.3.2.1 números diferentes de tres dígitos, de acuerdo con mi noción de permutación
P6	El amigo de Santiago puede obtener 16 números de 3 dígitos con esas 4 cifras.
P7	Ni idea
P8	Como el proceso es con devolución de la canica, en cada una de las tres veces tendrá 4 posibilidades por lo tanto habrá 64 posibles número de 3 dígitos
P9	Como la extracción se da con reemplazo, puede darse el caso de obtener números de una misma cifra como 1, 1, 1; 4, 4, 4; 6, 6, 6 y 888. Sin embargo excluimos estos resultados del espacio muestral Así tenemos que podemos obtener los siguientes números diferentes de 3 cifras S = { (1, 4, 6); (1, 6, 4); (6, 4, 1); (4, 6, 1); (6, 1, 4); (4, 1, 6) (1, 4, 8); (1, 8, 4); (4, 1, 8); (4, 8, 1); (8, 1, 4); (8, 4, 1) (1, 6, 8); (1, 8, 6); (6, 8, 1); (6, 1, 8); (8, 1, 6); (8, 6, 1) (8, 6, 4); (8, 4, 6); (6, 8, 4); (6, 4, 8); (4, 6, 8); (4, 8, 6)} Así se pueden obtener 24 números de tres diferentes dígitos.
P10	Aquí tenemos una permutación pero no recuerdo si es con repetición o sin ella; creo que es 4,6,8,1 8641 1864 6481 4 posibles números.
P11	Santiago 4 6 8 1
P12	No tengo idea de cómo resolver este problema
P13	No lo sé exactamente pero está relacionado a mi parecer con armar tripletas
P14	No lo sé
P15	No contesta
P16	En mi opinión en impredecible, pueden ser dos diferentes, o tal vez uno. Se da la existencia de varias probabilidades
P17	Se obtienen 16 número diferentes de 3 dígitos contando todos los casos
P18	No contesta
P19	1. En total tenemos 4 dígitos (4, 6, 8, 1) con reemplazo, lo que quiere decir que siempre vamos a contar con estos 4 dígitos.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
2. Queremos formar números de 3 cifras solamente. Por ello realizaré la siguiente tabla

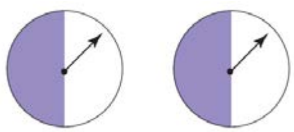
En la primera casilla podemos contar con los 4 dígitos
<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>
Lo mismo va a ocurrir en las casillas dos y tres, ya que el evento es con reemplazo
<table><tr><td>(4, 6, 8, 1)
4</td><td>(4, 6, 8, 1)
4</td><td>(4, 6, 8, 1)
4</td></tr></table>
<table><tr><td>(4, 6, 8, 1)
4</td><td></td><td></td></tr></table>
Por último, para saber cuántos números de 3 cifras podemos formar. Solamente se debe multiplicar por la cantidad de dígitos que contamos en cada casilla, esto es $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$
Así el amigo de Santiago puede obtener hasta 64 números de tres cifras
</td>
</tr>
<tr>
<td>P20</td>
<td>Se supone que para escoger cada uno de los tres dígitos hay siempre 4 alternativas por lo que hay un total de $4.4.4=4^3=64$ números distintos de tres cífras</td>
</tr>
</table>

[ANEXO B-10]

[Respuestas al Problema 5]

Problema 5

Un juego de la feria consta de dos ruletas como las que se muestran en la figura. Un jugador gana un premio sólo si ambas flechas caen en el área sombreada, cuando se hace girar una vez cada una de las flechas. ¿Consideras que el juego anterior es equitativo? Justifica tu respuesta



Participante	Respuesta
P1	Opino que el juego no es equitativo ya que es menor la probabilidad de que ambas flechas caigan en el área sombreada A B P(A)=1/2=50% P(B)=1/2=50% P(S)=1/4=25%
P2	Claro que es equitativo porque es la misma posibilidad, porque la ruleta está a mitad
P3	No lo sé
P4	Sí porque ambas fleches tienen que girarlas a la vez.
P5	No es equitativo, porque el jugador debe girar de tal manera que ambas queden en el área sombreada para poder ganar un premio sin la garantía de que el área sombreada en ambas ruletas tenga la misma dimensión.
P6	El juego no es equitativo porque la ubicación de la flecha no están a la mitad del área sombreada y no sombreada, aparte las dos flechas tienen que caer en la parte sombreada.
P7	Si es equitativo, ya que en ambas ruletas está dividido a la mitad y al ser dos ruletas no se ve afectado el porcentaje entre ambos lados tanto del claro como el oscuro.
P8	No. En el juego está la posibilidad de que ambas flechas caigan en el lado blanco, que la flecha de la primera ruleta caiga en el lado sombreado y la otra no y viceversa, y que ambas caigan en el lado sombreado que es la opción ganadora. Es decir de 4 posibilidades solo una es ganadora por lo tanto no es equitativo.
P9	Para ambas figures las dos áreas, sombreada y en blanco se pueden percibir que son de la misma proporción, por lo tanto existe la misma probabilidad caer tanto en el área blanca como en la sombreada. Esto quiere decir que como el juego se gana si ambas flechas de la ruleta caen en el área sombreada, y existe igual probabilidad para ambas áreas, el juego puede considerarse como equitativo.
P10	Tanto como equitativo no es, porque para que ambas flechas coincidan, es como el caso de dos reloj para que ambos coincidan a la misma hora
P11	Si lo considero equitativo, ya que se tendría un 50% de posibilidades de ganar
P12	No tengo idea de cómo resolver este problema.
P13	No lo sé
P14	Si el área es la misma, en el área sombreada, que en la que no está, entonces las posibilidades son 50 y 50, entonces el juego sí es equitativo.
P15	No lo considero equitativo, ya que según la figura el área sombreada no está en la mitad de la figura, y para que la equidad exista debe existir igualdad de condiciones, es decir, 50% de ganar, 50% de perder
P16	Considero que si es equitativo, debido a que ambas ruletas poseen las mismas colocaciones y al dar vuelta a cada una se está haciendo algo similar a lo de meter la mano en la bolsa de canicas de forma repetitiva en el uso de los números que habían desde un principio
P17	No Contesta
P18	No Contesta

P19	Si, el juego es equitativo puesto que en la figura se observa que el 50% esta sombreado y el otro 50 % no. Si ocurriese lo contrario el juego no es equitativo
P20	No parece equitativo pues hay más oportunidades de perder que de ganar ya que para ganar debe caer en las dos zonas sombreadas pero pierde si cae en las dos zonas blancas o en una blanca y una sombreada *(lo que puede pasar de dos formas distintas)*.

RESUMEN CURRICULAR

Yerikson Suárez Huz, V- 14.786.553, fecha de nacimiento 22/06/1979, Profesor Especialista en Matemática, actividades académicas realizadas: Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría (Facilitador), Aplicación de la Tecnología en el aula. (Participante), Enseñanza de la Geometría a través de recursos cotidianos. (Facilitador), La cotidianidad en la Educación Matemática, Funciones Matemáticas (Facilitador), Métodos de Demostración con Software de Geometría Dinámica, Estrategias lúdicas para la enseñanza de la Geometría, Los cuadrados mágicos y la enseñanza de la Matemática, Resolución de Problemas en Matemática. Iniciación al Algebra, Curso de Multiculturalidad y Etnomatemáticas, Curso de Multiculturalidad y Etnomatemáticas. (Organizador), IV Jornada de Investigación En Educación Matemática y IV Jornada de Investigación del Departamento de Matemática de la Upel Maracay. (Organizador), IV Jornada de Investigación En Educación Matemática y IV Jornada de Investigación del Departamento de Matemática de la Upel Maracay. (Organizador), XIII Jornada de Investigación. Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Organizador), V Jornada de Investigación del Departamento de Matemática de la Upel Maracay. (Organizador), Cargos académicos y profesionales: Profesor de cátedras del área matemática UPEL-Maracay, Profesor Contratado cátedras del área del Matemática UNEFA-Maracay, Profesor Contratado curso Propedéutico. Cátedra de Matemática. Facultad de Agronomía. UCV-Maracay, Profesor Contratado cátedras del área Matemática. Instituto de formación pre-universitaria.