REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ESCOBAR LARA”

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA FUNCIÓN AFÍN EN CIENCIAS ECONÓMICAS. IMPLICACIONES DIDÁCTICAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE.

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al grado de Magister en Educación, mención: Enseñanza de la Matemática

Autor: José Noguera
Tutor: Yerikson Suárez

Maracay, noviembre de 2020

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor del Trabajo presentado por el ciudadano Frenlui José Tovar Vanegas, para optar al grado de Magister en Educación, mención: Enseñanza de la Matemática, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En la ciudad de Maracay a los veinte (20) días del mes de noviembre de 2020.

Yerikson Suárez
CI: 14.786.553

INDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO **pp.**

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO "RAFAEL ESCOBAR LARA" MARACAY
Maestría en Educación. Mención: Enseñanza de la Matemática
Línea de Investigación: TIC, Innovación y Educación Matemática

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA FUNCIÓN AFÍN EN CIENCIAS ECONÓMICAS. IMPLICACIONES DIDÁCTICAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE.

Autor: José Noguera
Tutor: Yerikson Suárez
Fecha: Noviembre 2020

RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivo realizar un análisis histórico y epistemológico de la función afín, considerando sus posibles implicaciones didácticas en la enseñanza de la Matemática en las ciencias económicas, al hacer uso de las tecnologías digitales. Como referentes teóricos se consideraron los obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1998); el uso didáctico de la Historia de la Matemática (Anaconda, 2003; Sierra, 1997); y las TIC en Educación Matemática (Suárez, 2018), específicamente, la elaboración de objetos virtuales de aprendizaje (OVA). Se trató de un estudio enmarcado en el paradigma postpositivista, con un enfoque cualitativo, de tipo documental, por lo que se apoyó en la revisión de fuentes bibliográficas y electrónicas, para lo que se recurrió a la técnica del fichaje para la recolección y registro de la información, y al análisis e interpretación del contenido. El procedimiento se sustentó en el método hermenéutico (circulo hermenéutico, Gadamer 1988). Al develar la cronogénesis del de la función afín en ciencias económicas, se ubicaron cuatro periodos-etapas (civilizaciones antiguas, edad media y el renacimiento, era moderna; y la contemporánea). Así mismo, se identificaron cinco obstáculos epistemológicos: (a) distorsiones en la conceptualización e interpretaciones, (b) limitaciones en el manejo sistemas de representación, (c) manejo superficial de la proporcionalidad, (d) desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos, y (e) las leyes económicas, y confusiones entre ecuación lineal y función afín. Finalmente, se presenta un (OVA) elaborado según los aportes dados por el estudio histórico-epistemológico, el cual podrá ser empleado en la enseñanza de la Matemática en el contexto de las ciencias económicas.

Descriptores: Análisis Histórico-Epistemológico, ciencias económicas, función afín, obstáculos epistemológicos, objeto virtual de aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

La creciente y cada vez más constante contribución de la matemática al cultura mundo moderno, y su importancia como parte fundamental de la formación matemática de los profesionales del área de las ciencias económicas en especial, han hecho necesario que la matemática que se enseña en las universidades deba ser revisada en cuanto a su forma de impartirla; tomando como referente, establecer un vínculo indisoluble entre matemática y aplicaciones a la economía y áreas afines.

Dentro de este panorama, de toda la matemática que se estudia en el campo de las ciencias económicas, el concepto de función, es clave, por servir de base a la construcción de modelos económicos, ya que prácticamente cualquier estudio que se refiere a la aplicación de la matemática a problemas prácticos o que requieran el análisis de datos empíricos, propios de las áreas económicas, financieras, gerenciales, y administrativas, emplean este concepto matemático.

Una de las tareas de los profesionales del área de las ciencias económicas, es la describir y resumir las relaciones complejas que ocurren en el comportamiento económico de los hombres; y a partir de ellas, formular hipótesis sobre las relaciones de comportamiento, con la idea de hacer predicciones, inferencias, y recomendaciones que faciliten la toma de decisiones gerenciales.

Esto, se puede hacer desde una postura cuantitativa y matemática. Y es que, ciertamente, diversos conceptos, ideas, nociones y conocimientos en el área de las ciencias económicas y afines son de naturaleza cuantitativa; como por ejemplo, el precio de un producto o servicio, el costo de producción o de materia prima, los sueldos y salarios, las inversiones, los impuestos, las ganancias y pérdidas de operaciones financieras. Todos estos constructos, tienen en común su naturaleza cuantitativa, y por ende, su tratamiento suele ser matemático. Además, muchos de ellos tienen una naturaleza funcional. Así, es común hablar de la función demanda, la función oferta, la función costos, y la función beneficios, entre otros.

Quizás, el modelo de función más sencillo para modelar situaciones reales, es la función afín $f:R\rightarrow R:y=f(x)=mx+b$,con m,b no nulos. De hecho, en economía, muchos fenómenos tienen un comportamiento que fácilmente puede ser explicado mediante esta función. Sin embargo, la literatura especializada en el campo de la Educación Matemática, hace mención al hecho de las dificultades que confrontan los estudiantes universitarios del área de las ciencias económicas, a la hora de estudiar matemática.

Entre otras razones, debido a la descontextualización de las ideas matemáticas y su separación de los conceptos económicos a los que están asociados. Frente a este panorama, dos tendencias sobre didáctica, han permitido crear un material educativo de apoyo al estudio de la función afín en las ciencias económicas. La primera de estas directrices es, el uso de la historia de la matemática con fines educativos; y la segunda, el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para el estudio de la matemática, ya que facilita, tanto la modelización de situaciones y fenómenos reales, como la posibilidad de explorar, y simular.

Es por ello que, se planteó una investigación cuyo propósito fundamental fue *analizar desde el punto de vista histórico-epistemológico el concepto matemático de función afín y sus implicaciones didácticas en el contexto de la enseñanza de la Matemática en las ciencias económicas, mediante el uso de las TIC*.

Para ello, en el CAPÍTULO I, se hace el planteamiento de la situación de estudio y construcción del problema de investigación. En el CAPÍTULO II, se desarrollan los antecedentes y bases teóricas, tomando como referentes los obstáculos epistemológicos de Brousseau; el papel que juega la historia de la matemática en la enseñanza de esta disciplina; y el uso de las TIC como elemento innovador de las clases de matemática en el área de las ciencias económicas; mientras que en el CAPÍTULO III describe la ruta metodología seguida para llevar a cabo el estudio. En el CAPÍTULO IV se presenta el análisis histórico-epistemológico de la función afín dentro de las ciencias económicas y sociales; en el CAPÍTULO V se describen los obstáculos epistemológicos detectados a partir de dicho análisis histórico y evolutivo; mientras que, en el CAPÍTULO VI, se exponen algunas reflexiones en torno al diseño de una Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) para la enseñanza del tema de función afín en ciencias económicas, tomando en consideración elementos históricos, los obstáculos epistemológicos; y el uso de la tecnología.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

La matemática a lo largo de la historia de la humanidad ha estado presente como una herramienta de gran importancia que ha sido desarrollada por el hombre en diferentes campos. También ha sido objeto de estudio y pasión a lo largo de diversas civilizaciones; por ejemplo, en una de las primeras, la egipcia, se puede hacer referencia a su método para calcular o predecir las crecidas del Río Nilo, cálculo que permitió el desarrollo cultural y un gran en avance en su agricultura.

Ahora bien, la matemática desde sus inicios ha sido considerada bajo el enfoque de *ciencia instrumental***,** es decir, se asocia a la matemática con otras ciencias u otras disciplinas, pero, tomando en consideración su carácter de resolución de problemas y como apoyo a áreas como la Biología, Química, Física y las Ciencias Sociales, entre otras; a las cuales les elabora modelos y fórmulas para acercarse a la realidad de una situación en estudio y así poder explicarlos.

Tomando como referencia la necesidad de la Matemática, la misma conduce a ver esta disciplina también como un lenguaje que se usa para describir el mundo natural. Esto puede ser considerado como una de las causas por las cuales se pretende definir a la matemática como instrumento. Sin embargo, no se debe ser categórico en este enfoque, ya que también hay los que se preguntan por los fundamentos axiológicos y la teoría del conocimiento matemático en sí, pero la característica más importante de la matemática es su uso en casi todas las áreas del quehacer del ser humano, no solo en las actividades cotidianas del hombre sino como la base fundacional del desarrollo científico.

Es por ello que, nace la necesidad de entender la matemática como ciencia, ya que permite analizar, comprender e interpretar el mundo. De allí, la importancia de que esta rama sea abordada, estudiada comprendida e investigada en los diferentes niveles educativos para generar la universalización del lenguaje matemático, lo que a su vez está dando pie a lo que conocemos en el ámbito de educación como *la Educación Matemática*. En este sentido, González (1995) expone que:

> La Educación Matemática constituye una disciplina que tiene como campo de estudio la problemática específica de la transmisión y adquisición de contenidos, conceptos, teorías, y operaciones matemáticas en el contexto de las diversas instituciones escolares y otras instancias educativas (formalizadas o no), y que se expresa en forma de conocimientos teóricos y prácticos, relativos a dicha problemática, generados por el que hacer académico que, en conferencias, grupos de estudio, ponencias, congresos y exposiciones, llevan a cabo aprendizaje de esta disciplina y que se materializa, tanto en los informes, libros y artículos que son publicados en revistas u otros medios especializados que le sirven de soporte, como en las expresiones orales y en los artefactos producidos por diferentes comunidades (p. 05).

De lo anterior, se establece que la Educación Matemática es aquella que se encarga de estudiar el fenómeno, el comportamiento y las líneas que deben seguir los individuos en el desenvolvimiento de la formación académica y en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Lupiáñez, Rico, Segovia y Ruiz-Hidalgo (2015) vienen a considerar a la educación matemática como “el conjunto de conceptos, destrezas, competencias, convenciones, actitudes y valores matemáticos que se transmiten por medio del sistema escolar y cuya finalidad es organizar y estructurar el conocimiento matemático” (p. 99).

Por ello, es un elemento importante de la cultura humana, y el educador debe influenciar decisivamente en el proceso de su enseñanza ya que es una actividad específica, intencional y planificada para incidir de forma directa en la adquisición de aprendizajes significativos del estudiante.

Los estudios e investigaciones realizados en el campo de la enseñanza de la matemática, han generado reflexiones dirigidas no sólo al bajo rendimiento que se aprecia en los estudiantes en todos los niveles, sino también por la necesidad de generar métodos y técnicas que permitan una mejor asimilación y uso de los contenidos que componen esta área del saber, apartado que ha preocupado a docentes e investigadores y ha llevado a realizar mejoras directas e indirectas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

El Centro Nacional para el Mejoramiento de la Ciencia (CENAMEC, 1998) establece que “la enseñanza de la matemática surge como una necesidad en el desarrollo integral de nuestra sociedad, la posibilidad de que se produzca este desarrollo, está relacionado con el aprendizaje matemático, la cual precisa individuos con una sólida formación matemática” (p. 4)

En este mismo orden de ideas, la enseñanza de la matemática forma parte del proyecto educativo de la sociedad y es esencial que el docente deba facilitar los conocimientos para que así pueda el estudiante comprender mejor los contenidos, planificarlos y transmitirlos.

Además también hay un número importante de expertos que tienen como área de investigación dentro de la educación matemática, el desarrollo histórico de esta disciplina y sus implicaciones didácticas; puesto que la consideran como una importante herramienta para la enseñanza y el aprendizaje, y como eje fundamental de la cultura. En este sentido, Sierra (1997) sostiene que:

> La exploración de la historia por parte del profesor le ayuda igualmente a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos (que a veces se reproducen en los alumnos), así como la visión de la actividad matemática como actividad humana con sus glorias y miserias. Para los alumnos prepara un terreno donde las matemáticas dejan de jugar el papel de edificio acabado, restableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje. Además facilita conocer la génesis de los conceptos y los problemas que han pretendido resolver y ayudar a su comprensión. (pp. 04-05)

Siguiendo el mismo orden de ideas, la historia da a conocer la Matemática como fenómeno natural de la actividad humana y no como algo desconectado de la realidad, lo cual ayuda a la familiarización con su origen llevado por la necesidad humana. Por su parte, González (2004) expone que la Historia de la Matemática permite reconocer los aspectos que “dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucran, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban"(p. 17).

Lo antes mencionado conlleva a un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos, y así identificar lo que generó la necesidad y el proceso de gestación del conocimiento matemático y cómo se llegó a su entendimiento. Lo anterior es apoyado por Anacona (2003), quien reafirma que "la Historia de las Matemáticas ofrece la posibilidad de mostrar los lazos que existen entre las matemáticas como construcción histórica y otras producciones culturales de la humanidad" (p. 43).

De tal manera que, lo antes mencionado sugiere que se puede dar un acercamiento hacia las Matemáticas en los estudiantes por medio de su desarrollo histórico, de tal manera que estos encuentren una mayor vinculación de esta área del saber con otras manifestaciones humanas y conciban a la Matemática como un constructo social en constante evolución y no como un cuerpo acabado e inamovible de conceptos y de procesos por memorizar; lo que hace poner la mirada en las revisiones históricas y epistemológicas en la matemática, y su efecto en la enseñanza.

En palabras de Muñoz (2015), los estudios histórico-epistemológicos en un contexto escolar son importantes en la medida que "permiten observar la génesis, evolución y consolidación de los conceptos en el marco de unas condiciones socioculturales, formando en el docente, como en el estudiante, una visión profunda de las matemáticas y su finalidad, utilidad y sus relaciones con el entorno" (p. 9).

Por otro lado, dentro de la amplitud de temas y conceptos matemáticos, el concepto de función es uno de los más importantes que se pueden encontrar en la Matemática, y se le pueden asociar múltiples aplicaciones en distintas disciplinas científicas como la Ingeniería, y ciencias sociales como la administración y la Economía. Respecto a esta última rama del saber, la función afín es sumamente considerada, tal y como lo señala Rodríguez (2011), al destacar que, "...las funciones y en general el análisis funcional desempeñó un papel primordial en la formulación matemática de ciertos modelos económicos, particularmente la función afín" (p. 28).

Por ello, las funciones vienen a interrelacionarse con las ciencias sociales, y la función afín en particular genera modelos importantes para el uso en las ciencias económicas, entre otras razones porque desde el punto de vista histórico "se destaca la utilización de un lenguaje verbal, gráfico y notacional. En cuanto a lo situacional surge de la realidad para responder a las preguntas: valor de cambio, relación entre el precio y las cantidades" (Ob. cit., p. 28).

Y es que, si a través de la historia se han podido identificar serias dificultades y obstáculos en el estudio y comprensión del concepto de función afín, se podría inferir que lo mismo podría suceder en los estudiantes cuando se enfrenten a este tema, y más si no se ha pasado por un proceso de revisión epistémica de la naturaleza de este concepto.

Algunas evidencias en torno a la problemática de la comprensión y el uso de la función afín en el campo de las ciencias sociales, específicamente en las ciencias económicas, hacen referencia a la diferencia entre el objeto matemático y sus representaciones asociadas. En este orden de ideas Zúniga (2009) expone que "no se plantean situaciones didácticas orientadas a la construcción paso a paso de numerosos conceptos relacionados con las funciones y al manejo simultáneo de distintos lenguaje de representación de una función" (p. 14).

Estas representaciones pueden ser empleadas como vía para llegar a la asimilación del conocimiento sobre el objeto; y una forma de comprender las múltiples representaciones de la función lineal en el ámbito gerencial es precisamente explorando su génesis y evolución a los largo del tiempo.

En opinión de quien desarrolla esta investigación, es de suma importancia que los estudiantes de cualquier nivel educativo reconozcan el papel de las funciones reales de variable real en general, por ser un constructo transversal a toda la formación matemática de cualquier individuo, y de la función afín en particular; y evitar así terminar en un abismo entre el manejo de este tema y su formación académica y profesional.

Así mismo, el investigador plantea que, la comprensión del concepto función afín no puede limitarse a la mera reproducción de su definición, descontextualizada, y sin tomar en consideración sus diversos modos de representación y su aplicación. Tampoco debe limitarse a la ejecución y repetición de una serie de procedimientos para evaluar la función dado un argumento, o para estudiar su comportamiento mediante propiedades o definiciones, sin que prive el verdadero significado de lo que se hace.

Tanto en Matemática, como en cualquier otra disciplina que se sirva de ella, como es el caso de las ciencias economías, el concepto función es uno de los más básicos y esenciales; por lo que resulta prioritario su estudio, y en especial, debe ser abordado el tema de la función afín, dado su gran aplicación a situaciones económicas (Fernández, 2017).

Una de las áreas más relevantes en la formación matemática universitaria orientada hacia la preparación de profesionales en el área de las ciencias económicas, administrativas o empresariales, es la representación matemática adecuada de las diferentes funciones ligadas a la producción y al consumo de un bien o servicio; funciones como los costos totales, la de oferta del bien que produce una planta, o la función de demanda.

Sin embargo, en opinión del investigador, la introducción de algunos de estos elementos matemáticos en las ciencias económicas suele hacerse desde un punto de vista prefijado en los libros de textos -y usualmente seguido por los docentes- obviándose en ellos la construcción y evolución de tales objetos matemáticos y el modo en que fueron fijados en el área de la economía.

Para el autor antes citado, la función afín debe ser abordada desde la interpretación económica de sus parámetros, como lo son la pendiente y la intersección con los ejes, ya que ellos tienen significados económicos en conceptos como la oferta, demanda, ingresos, costos, ganancia o beneficios, producción, y punto de equilibrio, entre otros.

En el caso particular de la preparación universitaria de profesionales en Ciencias de la Administración (contaduría, economía, actuaría, y administración comercial, entre otras), el poco dominio del objeto matemático función lineal, además de dificultar el acto educativo por la ausencia y/o debilidad en la formación previa de los educandos, hace complicado que estos vean las utilidades del manejo de las funciones en general, y en especial el de la función afín, la cual en el campo de las económicas sirve para modelar procesos de cambio en el manejo de costos y ganancias, entre otros temas.

Existen una variedad de dificultades en la enseñanza de la función en general, y de la función afín, en particular. Ya se ha hecho mención a una de ellas, y que está asociada a la forma de representar tales funciones; y a la poca importancia de los diferentes tipos de representaciones de éstas en el proceso enseñanza y aprendizaje; así como al significado de sus parámetros (coeficientes).

Algunos sistemas de representación pueden ser, gráfico (sistema coordenado), numérico (tabla de valores), o algebraico (simbólico). Por ejemplo, cuando los libros de textos escolares o universitarios refieren que una función afín es de la forma $y = ax + b$ pero no establecen condición alguna sobre a y b; o cuando no hacen ver la influencia que tienen en la representación gráfica; se infiere que la asimilación y aprendizaje es insuficiente.

Esto a su vez, está muy vinculado a una posible algebraización exacerbada de este objeto matemático. Al respecto, para Roldán (2013), en la enseñanza de este tema se:

> …centra su interés en mostrar el aspecto algebraico del concepto dejando de lado en muchas ocasiones un análisis profundo y detallado sobre los elementos propios que permitan consolidar un concepto con suficiente significado para ser aprendido convenientemente. Consecuencia de esto es que los estudiantes en muchos casos terminan teniendo la posibilidad de repetir rutinas sobre objetos algebraicos que poco sentido tienen para ellos (p. 47).

Omitir otros sistemas de representación o visiones; o enfocarse en uno, dejando de lado otras perspectivas; podría entonces generar vacíos en el aprendizaje; y promover una visión limitada y restringida del objeto matemático. Agrega Roldán (2013) que:

> La importancia de las representaciones radica en que la capacidad de reconocerlas e interpretarlas es una de las formas que tiene el ser humano de adquirir un concepto. Generalmente los conceptos matemáticos no están aislados; por el contrario tienen una red de nociones y elementos interrelacionados que en conjunto “forman” el concepto (p. 48).

Esta situación parece no escapar de la enseñanza de la función afín, a nivel universitario. Para Contreras (2013), “el tratamiento del concepto solo se remite al uso de tablas y algoritmos con poca significancia para los estudiantes…lamentablemente, este concepto se limita a ser representado a través de una fórmula y no representa aprendizajes significativos para el estudiante” (p. 1151). De igual manera, en relación al concepto de función afín, afirma la autora antes citada que, “este concepto aún se traduce a la enseñanza de una fórmula y trazados que representan su gráfica” (p. 1152).

Para ilustrar estas ideas, es común ubicar en textos universitarios de matemática, ejercicios relacionados con hallar la gráfica de $\mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ para un cierto a y b dados, por ejemplo, representar gráficamente la funcióny $= 5\mathrm{x} - 3$. Se espera con este tipo de trabajo, que el estudiante construya una tabla de valores y represente los puntos obtenidos en el plano cartesiano, para luego construir la gráfica correspondiente. En este caso, se privilegia lo procedimental y el trazado, pero “la reiteración de este tipo de ejercicios desencadena aprendizajes mecánicos sin mucha comprensión y poca interpretación, conduciendo al estudiante a una serie de concepciones erróneas” (Roldán, 2013; p. 49). Continúa el autor antes citado, mencionado una serie de elementos a considerar en la comprensión, enseñanza y aprendizaje de la función afín:

1. *Interpretación de funciones representadas por gráficas*: Es necesario fomentar el análisis global de este tipo de funciones, partiendo de información explícita, pero avanzando hacia interpretaciones más complejas y profundas que consideren factores como la influencia de los parámetros.
2. *Descripción de situaciones, fórmulas y tablas*: Utilizar el lenguaje verbal habitual para manifestar propiedades y patrones, mediante la observación de las representaciones gráficas o algebraicas; encontrando diversas relaciones entre ellas.
3. *Modelación de situaciones del mundo real*: Utilizar la modelización, implica conectar la matemática con la realidad; interpretar el contexto; experimentar, interpretar, conjeturar y/o ajustar; y encontrar soluciones a problemas reales; así

como también darle sentido a los parámetros de las funciones lineales o afines. Por ejemplo, en la curva de costos (asociada a la función costo C = a+bQ); a representa el costo fijo y b el costo marginal). En palabras de Suárez (2008), todas aquellas prácticas que hacen de la matemática una herramienta para modelar, son esenciales en la construcción del conocimiento matemático.

4. *Transferencia entre las múltiples representaciones*: Es necesaria una forma de traducción – bidireccional- entre sistemas de representación; y determinar cuál se ajuste mejor a determinadas situaciones; pero que también sea posible ir de un sistema a otro.
5. *Análisis de los efectos de cambio en los elementos o parámetros de la función*. Es importante reconocer el efecto que ocasiona en la gráfica, por ejemplo, la pendiente de la recta en la función lineal, o el término independiente de una función afín.

Todo lo anterior implica entonces, considerar la correcta comprensión del concepto de función; incorporar el concepto de función afín mediante situaciones prácticas, vinculadas con el entorno y contexto de los estudiantes; manejar de manera equilibrada, los distintos modos de representación – y como ir de un sistema a otro-; e introducir elementos históricos asociados a la evolución del concepto y a la relevancia del mismo

En este sentido, y basado en la experiencia del autor como docente universitario del área de Matemática, se ha podido constatar que los estudiantes que cursan la asignatura matemática I en el segundo semestre de la facultad de ciencias económicas y sociales de la Universidad de Carabobo (FACES-UC) presentan dificultades en cuanto a la comprensión del concepto de función afín, dejando a un lado su relevancia como lo es la utilidad en su área de desarrollo profesional. Al respecto, Roldán (2013) refiere que este tipo de función:

> se constituye en excelente herramienta para estudiar y modelar problemas de variación. Las cantidades empleadas varían en tiempo, espacio, con otras cantidades, esta variación puede ser más rápida o más lenta, creciente o decreciente, sin embargo mantiene tal ritmo de variación ante lo cual son fácilmente identificables patrones y regularidades en ella.

Estos aspectos desarrollan significativamente el llamado pensamiento variacional (p. 95).

Roldán (2013) afirma que, desde el punto de vista didáctico, existe cierta ambigüedad en el manejo y presentación del concepto de función afín y lineal en diferentes textos. A veces se define la función lineal como una función $f: R \to R$ tal que$f(x) = mx$; y a veces como una función $f: R \to R$ tal que $f(x) = mx + b$. Otros tanto, esta última expresión es denominada como función afín.

Así que esta dualidad e inconsistencia en el manejo de las terminologías, trae consigo una serie de conflictos a la hora de su enseñanza; en especial en contextos como la formación en el área de las ciencias económicas; donde la matemática tiene un carácter mucho más utilitario que formal y riguroso. Y más allá, estas discrepancias podrían tener su origen en el desarrollo histórico y evolutivo de este objeto matemático.

Es por esto que, es necesario considerar el papel de la historia y evolución epistemológica de la función afín con el propósito de reflexionar acerca de un abordaje didáctico de este tema y de la elaboración de actividades de enseñanza que ayuden a los aprendices a reconstruir su conocimiento de un concepto tan importante para las ciencias económicas, apropiándose así del concepto de la función afín vinculándolo directamente con su campo de formación profesional, ya que tradicionalmente su enseñanza limitada al estudio formal y riguroso no logra establecer relaciones con la utilidad del mismo ya que se le presenta como algo terminado y no vinculado a estas diferentes áreas y contextos. Es importante destacar, que el logro de la creación de una cultura matemática debe sortear toda clase de dificultades, especialmente cuando la didáctica del aula de clases se enfrenta a problemas de divulgación y de comprensión.

Quizás uno de los factores que más dificulta la acción docente en el área de la matemática es la existencia de los obstáculos para comprender el aspecto epistemológico inherente a la disciplina; tanto es así que se les conoce con el nombre específico de obstáculos epistemológicos, para este referente se tomará en consideración las teorías de Brousseau (1998) y Bachelard (2000), autores que serán considerados como referencias para el análisis del objeto de estudio planteado en esta investigación.

Los obstáculos epistemológicos pueden ser considerados como conocimientos, ideas, y creencias que ocasionan dificultades cognitivas que no permiten una correcta apropiación y asimilación del conocimiento; esto es, un conjunto de factores que se oponen al aprendizaje y que interfieren en el acto educativo. En palabras de D'Amore y Fandiño (2002) los obstáculos epistemológicos "son aquellos cuya causa está en la misma matemática, esto es en el concepto matemático que en ese momento es objeto de aprendizaje" (p.8).

Es así como, la evolución histórica de un concepto matemático, suele tener distintos obstáculos epistemológicos, dados los cambios de paradigma, épocas, interpretaciones, enfoques y concepciones que pueden privar y prevalecer en un período de tiempo determinado, en torno a dicho concepto; lo que a su vez implicaría cambios, adaptaciones y dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del mismo.

Otro elemento a considerar en la actualidad, a la hora de abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de función, en general, y función afín en particular, es el uso de las Tecnologías Digitales (TD). Sobre el papel que juegan las TD en la Educación Matemática, Suárez (2018) sostiene que:

> con el progreso constante y acelerado de la tecnología, y su influencia en la sociedad actual, se han producido cambios específicos en el ámbito educativo debido a la incorporación de las TIC al proceso de enseñanza y aprendizaje. Particularmente en el caso de la Matemática, se ha evidenciado una transformación en la práctica pedagógica para el estudio y comprensión de esta disciplina (p. 176).

Es así como, gracias al uso de las TIC, Internet y los dispositivos digitales; ha habido grandes avances en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Por ejemplo, facilitan desplazarse entre distintos modos de representación de un objeto matemático, amplían la posibilidad de explorar, simular y experimentar; facilidad de trabajar con muchos datos, hacer gran cantidad de cálculos de forma veloz, y en general, ampliar modos de interacción entre el aprendiz y la Matemática, mediante el uso de las herramientas y plataformas digitales con fines educativos.

Gracias a la aparición de la Web Social (Suárez, 2019), el campo de la educación Matemática confronta importantes cambios y enfoques metodológicos en lo que a la enseñanza y aprendizaje se refiere. En particular, la interactividad que ofrecen hoy día muchas herramientas digitales, ha servido para la construcción del conocimiento matemático de modo colaborativo.

Es por ello que, ha surgido un movimiento digital con propósito educativo, sustentado en el diseño, creación y divulgación de materiales escolares que son compartidos a través de Internet; denominados Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA).

Los OVA pueden ser considerados como recursos digitales interactivos, y abiertos, creados fines didácticos de apoyo al proceso educativo; que por lo general, están conformados por (a) Contenidos, (b) actividades de aprendizaje y (c) elementos de contextualización, (Wiley, 2000).

En los últimos años, han proliferado este tipo de recursos tecnológicos como apoyo al aprendizaje – tanto presencial, como virtual o combinado- dado que ofrece a quienes lo utilizan, conocimientos, actividades interactivas, así como la posibilidad de autoevaluarse; y de poder disponer en un mismo espacio, de contenidos presentados en diversos formatos multimedia.

Cabe entonces cuestionarse acerca de cómo integrar la historia de la Matemática, las TD, representadas en este caso, por los OVA; y la enseñanza de la Matemática en el contexto de las ciencias económicas, específicamente en el tema de la función afín.

En este sentido, por lo antes expuesto y tomando en cuenta la importancia de la función afín en el ámbito de las ciencias económicas, surgen las siguientes interrogantes de esta investigación.

¿Cómo ha sido la evolución histórica del concepto de función afín, en relación a su origen, desarrollo, etapas, personajes; y aplicaciones a las ciencias económicas?

¿Cuáles son los obstáculos epistemológicos relacionados al surgimiento del concepto de función afín en el ámbito de las ciencias económicas?

¿De qué manera el desarrollo histórico-epistemológico de la función afín podría ofrecer respuestas a una innovadora forma de abordar el tema en el contexto de las ciencias económicas, haciendo uso tecnologías digitales como los OVA?

Objetivos de la investigación

Objetivo General.

Analizar desde el punto de vista histórico-epistemológico el concepto matemático de función afín y sus implicaciones didácticas en el contexto de la enseñanza de la Matemática en las ciencias económicas, mediante el uso de las TIC.

Objetivos Específicos.

1. Describir la génesis y evolución histórica del concepto de función afín, reconociendo situaciones, problemas, personajes y épocas o momentos históricos que contribuyeron a su desarrollo, especialmente en el ámbito de las ciencias económicas.
2. Reconocer los obstáculos epistemológicos relacionados al surgimiento del concepto de función afín, especialmente en el ámbito de las ciencias económicas.
3. Reflexionar acerca de las implicaciones didácticas que conlleva la utilización de la historia de la Matemática en la enseñanza de la función afín en el ámbito de las ciencias económicas, en el diseño de un OVA.

Justificación de la Investigación

Dentro de la Matemática, el concepto de función es reconocido como uno de los más relevantes e importantes; entre otras razones, por estar presente en prácticamente cualquier rama de esta ciencia. Ya Spivak (2005) sostenía que “el concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones" (p. 74).

Efectivamente, en áreas como la geometría, el cálculo, el álgebra lineal y/o abstracta, análisis, topología, y la teoría de la probabilidad; el concepto de función es fundamental, y en muchos casos, hasta el eje central de los temas y sub-áreas que se derivan de ellas; por lo que Muñóz (2015) afirma que "se puede considerar al concepto de función como el pilar más importante de las matemáticas modernas…Así pues, es innegable el valor epistemológico que tiene la noción de función en las matemáticas" (p.6)

El estudio es importante ya que desde el punto de vista histórico brinda una visión del devenir y desarrollo de la noción de función afín, contribuyendo de esta manera al acervo de la Matemática como disciplina científica, divulgando la importancia del concepto de función en general y de función afín en particular.

Otro aspecto relevante del estudio, y que justificó el propósito de su ejecución, fue poder llevar a cabo su contribución a la Educación Matemática al ofrecer luces en cuanto a los obstáculos epistemológicos y su posible influencia en la enseñanza y aprendizaje de la función afín.

En este sentido, uno de los principales retos de esta investigación fue la mejora en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, especialmente en la formación de profesionales del área de las ciencias económicas, al ofrecer algunos lineamientos didácticos para su inclusión en su praxis educativa.

Desde el punto de vista teórico, constituyó un aporte considerable como antecedente a futuras investigaciones relacionadas con los estudios epistemológicos de esta temática, así como plasmar y reafirmar la importancia de la historia de la ciencia en el ambiente educativo, ayudado así el fortalecimiento significativo en el aprendizaje de la matemática como ciencia correlacionada con otras áreas, en este caso particular, con las ciencias sociales.

Finalmente, se trata de un estudio innovador, que podría no sólo intentar beneficiar a los estudiantes a través del estudio del episteme, sino también que pretende impulsar mejoras y avances en la calidad de la enseñanza de la función afín en el área de las ciencias económicas, al introducir adaptaciones y una nuevo enfoque a las exigencias del sistema educativo actual y a la integración de la historia, la matemática y el conocimiento económico. Igualmente, el estudio servirá de apoyo para otros contextos y dará aportes y sustento a futuros investigadores.

El primordial reto de este estudio comenzó por promover la importancia de la historia de la Matemática, la función afín y presentar los cimientos que hicieron dar la vinculación de ésta con el campo de las ciencias económicas, no son sólo para transmitir el conocimiento, sino para construir un patrimonio cultural de éste; el cual se encuentra presente tanto en la teoría como en la práctica.

Finalmente, una razón que justificó la realización de esta investigación fue la integración de la historia de la matemática y las tecnologías digitales en la creación de un objeto virtual de aprendizaje del tema de la función afín, en un contexto de ciencias económicas. Dicho OVA tomó en consideración tanto los aspectos históricos como los obstáculos epistemológicos encontrados en la investigación; y presenta un aporte disponible a todos aquellos interesados en enseñar y aprender este tema matemática.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Antecedentes

Para comenzar este capítulo, iniciaremos por establecer los estudios previos que servirán de antecedentes. En este particular, Tamayo (2003) menciona que

> Todo hecho anterior a la formulación del problema que sirve para aclarar, juzgar e interpretar el problema planteado, constituye los antecedentes del problema. Establecer los antecedentes del problema de ninguna manera es hacer un recuento histórico del problema, o presentar fuentes bibliográficas que se van a utilizar, o los datos recolectados que no sabemos en dónde ubicar, o la descripción de las causas del problema, a no ser que la investigación sea causal. (p. 146)

Es por ello que, los antecedentes implican una revisión de carácter documental de las investigaciones o trabajos previos relacionados al problema de investigación en desarrollo, para tener una idea de posibles aportes de estos estudios tomando en consideración las conclusiones previas referentes al problema, identificar teorías existentes sobre el problema, para guiar y estructurar el marco metodológico de la investigación.

En este orden de ideas, expone Arias (2006) que los antecedentes de la investigación son aquellos "trabajos y tesis de grado, trabajos de ascenso, artículos, informes científicos relacionados con el problema planteado, es decir, investigaciones realizadas anteriormente y que guardan alguna vinculación con nuestro proyecto, por lo que *no deben confundirse con la historia* del objeto" (p. 106)

Sumando lo expuesto, se puede establecer como los antecedentes de una investigación a todas aquellas que vienen a reforzar los fundamentos teóricos del trabajo a realizar, la revisión de estudios científicos previos referentes al problema desarrollado en la presente investigación. En este sentido, se describen a continuación algunos trabajos que sirven de antecedentes para la investigación que se pretende llevar a cabo, al considerarlos claves por su pertinencia, temática y abordaje.

En este referente se tomará la investigación de Sánchez (2016), titulada *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula.* Dicho trabajo estudió las dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión del objeto matemático función lineal y afín, orientada a mejorar el proceso de enseñanza y de aprendizaje; se enfocó en la complejidad de su interpretación, la dificultad para reconocer y articular las diferentes representaciones, así como también la no modelización de situaciones o fenómenos. Esta investigación fue de tipo cualitativa, enmarcada en la investigación-acción, y se consideró como uno de los referentes teóricos porque su enfoque fue semejante al de la indagación presente.

En ella, el autor demuestra a partir de la experiencia en el aula la importancia de la comprensión de la aplicabilidad de una función; esto facilita el aprendizaje de la disciplina entre los educandos. Se desarrolló con un grupo de 40 estudiantes de noveno grado, de una institución educativa ubicada en la ciudad de Bogotá, entre los meses de febrero y abril de 2016. El aporte al estudio que se pretende llevar a cabo, es que proporcionar información sobre algunas actividades que facilitan la comprensión del tema de función afín y que fueron susceptibles de adaptarse a referentes históricos encontrados como resultado de la investigación y contextualizadas en el área económica.

Acosta y Joya (2015) en su investigación titulada *Ingeniería didáctica para la enseñanza de la función lineal: análisis preliminar* tenía como objetivo desarrollar una ingeniería didáctica acerca del concepto de función lineal a estudiantes de sexto y séptimo grado, en el marco de la Teoría de las situaciones didácticas. Este trabajo posee la originalidad de crear las bases de una praxis para el docente de aula, pues se presentó con una metodología que incluye un análisis que considera tres dimensiones, la epistemológica asociada a las características del saber matemático, la cognitiva asociada a las características del pensamiento y razonamiento, y la didáctica asociada con el concepto de función lineal. El aporte de esta investigación al estudio que se llevó a cabo es que propone algunos elementos teóricos asociados a la evolución de la función lineal y a los obstáculos epistemológicos, que sirvieron para contrastar la información develada en este trabajo.

Rodríguez y Valdivé (2011) en su trabajo *Análisis histórico de la función afín y la ecuación lineal en la economía desde el enfoque ontosemiótico*. Plantean un estudio de carácter documental e histórico, la cual analizó el tema desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico (EOS). El estudio fue de tipo exploratorio y descriptivo. Asumió primordialmente el análisis de la evolución histórica de la función afín y la ecuación lineal (oferta, demanda) en la economía. Entre otras cosas, dicho estudio reveló que el análisis funcional desempeñó un papel primordial en la formulación matemática de ciertos modelos, y orientó acerca de fundamentos históricos referentes a la presencia y evolución del objeto matemático de esta investigación con el campo administrativo y económico. Esta investigación consideró en gran manera esta información de interés histórico, por lo cual este antecedente es un importante refuerzo a nivel teórico y conceptual.

Su aporte a la investigación que se desarrolló fue dar algunas orientaciones en cuanto a las ideas precursoras de los conceptos de la llamada función Demanda, función Oferta, curvas de Demanda, Oferta y punto de equilibrio, partiendo de los problemas que la originaron e identificando los diferentes campos, procedimientos, lenguaje y otros elementos que le permitan mostrar la evolución. Estos conceptos económicos, juntos con las nociones de ingresos, costos y beneficios, fueron los que se utilizaron para estudiar el tema de función afín en ciencias económicas.

Roldán (2013), por su parte, plantea un estudio acerca de la función lineal, y de los factores que influyen en su aprendizaje (histórico, disciplinar, pedagógico y didáctico), esto con el fin de generar una propuesta didáctica. Como resultado del análisis histórico, disciplinar y pedagógico se construyó una secuencia didáctica completamente original en la que se plantean tres tipos de actividades con las que se potencia la experimentación como vehículo de aprendizaje y la elaboración de modelos matemáticos, que en conjunto dan como resultado el aprendizaje de los elementos relacionados con la función lineal. Los aportes de este trabajo a la investigación que se desarrolló, implicaron aspectos teóricos asociados a los histórico, lo pedagógico y la revisión de estrategias y actividades didácticas que pudiesen contextualizarse en el ámbito de las ciencias económicas.

Bases Teóricas

Las presente líneas pretenden plasmar los cimientos que sirvieron para construir los fundamentos que constituyeron las guías de la presente investigación. Tal como lo expone Arias (2006) "las bases teóricas implican un desarrollo amplio de los conceptos y proposiciones que conforman el punto de vista o enfoque adoptado, para sustentar o explicar el problema planteado" (p. 107), y en este particular se presentan, luego de una indagación exhaustiva de la bibliografía existente, un selecto número de teorías y algunas de las diferentes posturas que se conformaron como pilares de la investigación.

Epistemología y educación en matemática.

Dado que el presente trabajo tiene como principal raíz la epistemología, se dará una definición de ella, la cual proveniente de Bunge (2002), quien sostiene que "La epistemología, o filosofía de la ciencia, es la rama de la filosofía que estudia la investigación científica y su producto, el conocimiento científico." (p. 21). En otras palabras la epistemología nos lleva al camino de generar teorías y cómo reflexionar para la investigación.

Su comienzo está ligado a la filosofía antigua donde se encuentran múltiples reflexiones epistemológicas aportadas por Platón y Aristóteles, y el conocimiento viene a ser una ilustración e interpretación filosófica del conocimiento humano. En este entorno, cabe la reflexión en el campo educativo, ya que este es el sistema social transmisor de la cultura y que busca propiciar el aprendizaje y la aplicabilidad de la Matemática entre las sucesivas generaciones. Los estudiantes deben comprender y utilizar conceptos a través de las teorías existente acordes, o mejor dicho, aceptadas por la comunidad científica.

Por ser la epistemología tan necesaria para la transmisión del conocimiento, es un factor elemental del hecho educativo; por ello, se considerará lo expuesto por Azocar (2015):

> Se entiende que la epistemología de la educación, es un espacio que *sirve* para analizar el hecho de modo crítico y reflexivo y para hacer un diagnóstico de avances y dificultades, en vistas a ahondar los primeros y superar los segundos, buscando constantemente lo cierto o verdadero. Se estudian todos los factores intra y extraescolares que influyen en el proceso, no con el objetivo de un análisis infructuoso sino para aportar soluciones. (p. 02)

Y como se refleja en lo anteriormente expuesto, la epistemología está presente en la educación ya que estudia el proceso de evolución del conocimiento en sí mismo y hace análisis continuos, generando respuestas a las dificultades que en ciertos momentos ella enfrenta. En el caso particular de la Educación Matemática vemos que son varias las teorías que se sustentan en la revisión histórica y epistémica de la Matemática.

En este sentido, la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1998) establece que “un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*.” (p. 15), en la cual se plantea que un elemento del *saber sabio*, que emerge de las sociedades y sus necesidades; y que es desarrollado por grupos científicos y es aceptado por ellas, por lo que debe ser revisada su génesis y evolución, pero que tiene que sufrir una adaptación y transformación para convertirlo en una versión didáctica del mismo.

Por su parte, el enfoque Ontosemiótico, entendido como un modelo teórico acerca del conocimiento y la instrucción matemática plantea la necesidad de estudiar los significados de referencia de un objeto matemático, lo que necesariamente implica un estudio histórico. Al respecto, Godino, Batanero y Font (2009) afirman que “La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico–

epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto." (p. 5).

En este orden de idea, Orellana (2002) propone organizar los contenidos de los temas matemáticos utilizando su propuesta de mapa enseñanza-aprendizaje (MEA), el cual puede ser presentado en cualquier nivel educativo por ser una herramienta que mejore el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que uno de los mayores problemas en la enseñanza de las ciencias está en la dificultad que se da en el momento de transferir el conocimiento. El MEA consiste de un conjunto de cuadros que indican lo que se debe enseñar de un tópico o tema matemático. Entre algunos de sus cuadros destaca el de la historia de la Matemática como herramienta de uso didáctico para el enseñanza-aprendizaje de un tópico matemático haciendo salvedad en no confundir la historia del matemático si no los aportes del mismo a los conceptos y hechos que dieron pie al desarrollo de la matemática.

Otro referente de la Educación Matemática que se apoya en la historia viene propuesto en palabras de Rico (1997) a través de los *organizadores del currículo de matemática* en cual plantea en el proceso didáctico de la enseñanza de la matemática incorporando la historia, y menciona que

> El séptimo organizador tiene por finalidad señalar algunos momentos a lo largo de la historia de la matemática en los que el conocimiento matemático considerado tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés. Hemos denominado desarrollo histórico del tópico a este organizador. La información histórica puede servir en la programación para motivaciones, ejemplos y también para proponer algún ejercicio curioso. Los alumnos se sienten especialmente interesados cuando se les proporciona información adecuada sobre historia de las matemáticas y los antecedentes de un contenido. Se trata de poner el énfasis en la dimensión cultural e histórica del conocimiento matemático, pero no se pretende hacer un estudio exhaustivo y completo de la evolución histórica de cada uno de los tópicos. La revisión de algunas dificultades históricas en la construcción de un determinado concepto puede servir de aliciente a los estudiantes para superar ellos mismos tales limitaciones. (p. 16)

Conocer la evolución histórica de los conocimientos matemáticos contribuye, en entendimiento de los diferentes niveles de obstáculos, como son las dificultades, creencias, esquemas de pensamiento y conocimientos que están estrechamente ligados al objeto matemático.

Historia de la matemática y su uso didáctico.

En la actualidad, y en realidad, desde hace muchos años, numerosas han sido las investigaciones, propuestas y documentos generados en torno a la Historia de la Matemática y sus posibles implicaciones didácticas, modos de abordarla e implementarla en el aula de clase.

Para Suárez (2014), desde una óptica holística, es importante partir de la premisa de que la Matemática es producto de la actividad humana a lo largo de muchos siglos, que involucra proceso complejos de interacción social, en la búsqueda de respuestas y soluciones a problemas reales, enmarcados temporal, cultural, social y geográficamente; y donde también es necesario considerar lo conceptual, lo teórico y lo formal en la génesis de los conceptos matemáticos, pero en el marco de un entorno muy particular.

De allí, que es necesario mantener este nexo o conexión entre la Matemática y la humanidad. En relación al papel que juega la historia de la matemática en la sociedad, Muñoz (2015) se refiere a ella como un

> puente de comunicación entre las matemáticas y la cultura; utilizar la historia de las matemáticas de esta forma permite un acercamiento más humano más cercano a las teorías matemáticas, pues encuentran vínculos con manifestaciones culturales de su entorno, tales como la música, la pintura, la literatura, la arquitectura o el arte en general. Además, promueve un cambio de actitud hacia la matemática; ayuda a explicar y superar obstáculos epistemológicos; incentiva la reflexión y una actitud crítica en el estudiante; y finalmente, se puede implementar como recurso integrador de las matemáticas con otras disciplinas, aumentando el interés y la motivación de los estudiantes hacia el conocimiento matemático. (p. 9)

Según Anacona (2003), existen algunos aportes de la Historia de las Matemáticas en la reflexión educativa, y ellas inciden directa e indirectamente en los procesos de enseñanza. En realidad, se parte de la consideración de que en los estudios históricos acerca del desarrollo de un concepto se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica; ello facilita el desarrollo de los procesos cognitivos por parte del docente, e incrementa las posibilidades de una elaboración más eficaz de la didáctica. Es conocido entre los educadores, que mientras más se conocen las interioridades de una disciplina, mejor es el proceso didáctico, y se tiende a una praxis de mayores alcances (Suárez, 2014). El conocimiento del docente desde el punto histórico, le otorga a su capacidad una mayor fortaleza, pues dichos conocimientos, posibilitan no sólo una mejor comprensión del concepto, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática de construcción, que merecen ser tenidos en cuenta por el docente en sus propuestas educativas.

De igual manera, los resultados observados en la investigación educativa apuntan a que estos estudios muestran que las matemáticas, como construcción humana, están ligadas a diferentes dinámicas sociales, y que resulta muy conveniente llevar los aspectos históricos al aula de clases para estimular la aparición y desarrollo de una cultura matemática en los campos profesionales afines. Desde esta perspectiva, se promueve una actitud diferente frente al conocimiento matemático y a su enseñanza, pues éste aparece en una interesante relación con otras formas de expresión de la cultura, tales como el arte y la filosofía.

En este sentido, se reafirma por lo dicho en palabras de Guzmán (1992), la relevancia de la historia como acercamiento a la matemática en el proceso educativo ayudando a humanizar la ciencia, en el cual hace ver que la misma ha evolucionado de la mano de grandes personas aportando al desarrollo de la humanidad en diferentes aspectos:

> La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico.(p. 11)

Ahora sí hay investigaciones que propone la historia de educación matemática como herramienta de carácter elemental para impartir el ejercicio educativo, en este particular Fauvel citado por Sierra (1997) propone algunas de las formas del uso de la historia de las matemáticas en el aula ayuda a mejorar el proceso educativo en las cuales son enumeradas a continuación de siguientes.

1. Mencionar anécdotas matemáticas del pasado
2. Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos
3. Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase
4. Impartir lecciones de historia de las matemáticas
5. Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado
6. Fomentar la creación de posters, exposiciones u otros proyectos con un tema histórico
7. Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado
8. Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos
9. Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje
10. Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico
11. Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico

Por su parte, Muñoz (2015) refiere que, “el estudio de la historia de las matemáticas aporta al docente herramientas de tipo metodológico, conceptuales, y epistemológicos que pueden tenerlos en cuenta en sus planeaciones y sus prácticas pedagógicas” (p.7); mencionando, además, algunas de las ventajas de su uso en la Educación Matemática, entre las que destacan:

- *La historia de las matemáticas como indicador de dificultades para la comprensión*. Si el docente conoce los errores, obstáculos y dificultades, así como las diferentes concepciones en el desarrollo de un concepto matemático, será capaz de promover estrategias de enseñanza y aprendizaje en el estudiante, considerando estos actores; además de identificarlos en los alumnos y ejecutar los correctivos necesarios.

- *Como elemento en la elaboración de un currículo*. Al considerar todas las vertientes, caminos y enfoques que conllevan a la construcción rigurosa y formal de un concepto matemático, se pueden organizar distintas trayectorias de enseñanza en función de las competencias a desarrollar en el estudiante, los objetivos curriculares y articularlos con los niveles educativos adecuados.

- *Historia de la Matemática como herramienta para diseños de actividades didácticas*. Desde la elaboración de proyectos de investigación, hasta el planteamiento de problemas históricos, o la discusión de múltiples soluciones a un mismo problema - tomando en consideración el contexto filosófico, social, geohistórico y cultural-, pasando por el diseño de experiencias lúdicas con fines didácticos, la construcción de líneas del tiempo, la elaboración de historietas, o la puesta en marcha de obras teatrales; la historia de la Matemática puede ser utilizada como una enriquecedora experiencia dentro y fuera del aula, que facilite y permita "entender en esencia cómo y por qué emerge y evoluciona un concepto en el transcurso de la historia que satisfacen necesidades dentro de las mismas matemáticas o incluso necesidades culturales" (Muñoz, 2015; p. 8).

- *Como agente de la reflexión acerca de la naturaleza de la matemática*. En este sentido, se aspira que a través de la historia, el docente reconozca los distintos modos de surgimiento y evolución de los conceptos matemáticos, y con ellos, comprenda los diversos modos de entender la matemática, las herramientas de desarrollo de esta disciplina, y las maneras como se investiga en matemática; asociando esto con la docencia; y e inclusive con la divulgación de esta ciencia.

Obstáculos epistemológicos.

Las limitaciones que se presentan en el proceso de construcción y aprendizaje de los conceptos matemáticos se pueden explicar tomando como sustento las propuestas presentadas por Brousseau (1998). Para este autor, el error o los conflictos cognitivos en el aprendizaje no son atribuibles solamente el efecto de la ignorancia o la incertidumbre, sino que también es considerado como el efecto de un conocimiento anterior que, a pesar de su interés o éxito para un momento determinado, ahora se exhibe como inadecuado.

Por lo tanto, no se trata de conocimiento erróneo per se, sino que se vuelve insuficiente o cuya visión obstaculiza reconocer, interpretar y comprender una nueva perspectiva y un nuevo saber. Barrantes (2006), refiere que, un obstáculo es un conocimiento que resiste y reaparece; y que además tiene un cierto *dominio de validez*. Afirma el autor antes citado que,

> Un obstáculo se manifiesta por los errores que no son debidos al azar. Son errores que aparecen una y otra vez, son reconocibles, se sabe que van a aparecer y que persisten. Además, estos errores en un mismo sujeto están ligados entre sí por una fuente común, básicamente una manera de aprender o una concepción característica, un conocimiento anterior que tiene que ver con todo un dominio de acción. (p. 4)

Quien propuso una *arqueología de los obstáculos*, donde plantea los diversos orígenes de los factores que dificultan la aparición de una cultura matemática, según el desarrollo del individuo, y que corresponden a la incursión en modelos culturales específicos:

1- *El ontogénico*, que tiene que ver con todo lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo.

2- *El didáctico*, que son todos los obstáculos que se adquieren y/ o aparecen por el modo de enseñar, por la escogencia de un tema o una axiomática en particular. El didáctico puede ser a su vez sociocultural.

3- *Los epistemológicos,* son los obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos, es propio del concepto. Por ejemplo la dificultad del concepto de conceptuar el cero, los números relativos, etc. Todos estos han sido problemas históricos en cuanto a su desarrollo conceptual; son obstáculos que también se pueden presentar en la enseñanza de la matemática.

Para Brousseau (1998), el estudio de los obstáculos epistemológicos pasa por describir de manera clara y explícita determinado conocimiento, tomando en consideración su uso, ventajas en relación a conocimientos previos, prácticas sociales a los que se vincula, y concepciones matemáticas subyacentes. Barrantes (2006) agrega a lo propuesto por Brousseau, que también es necesario abordar los siguientes aspectos, cuando el estudio de los obstáculos epistemológicos tiene implicaciones didácticas:

1. identificar cuáles concepciones ha sustituido el estudiante para comprender sus limitaciones

2. Reconocer el momento y las razones del equilibrio, es decir, el momento en el que se adquirió el concepto, se rompe con las dificultades que había, y se estudian las trazas de su resistencia

3. Pertinencia y adecuación de las prácticas del lenguaje

4. Buscar los posibles resurgimientos de algunos conceptos que se creían superados, u obstáculos que se creían pasados que bajo ciertas circunstancias, podrían volver a aparecer.

Así mismo, el autor antes citado menciona que, para fines didácticos, los obstáculos epistemológicos deben ser identificados en la historia; reconocidos en los estudiantes cuando aparezcan de manera espontánea en sus modos de pensamiento de y crear condiciones pedagógicas adecuadas que faciliten la superación de dicho obstáculo.

Otro planteamiento relacionado con los obstáculos es planteado por de Bachelard (2000) quien habla específicamente de los obstáculos epistemológicos, que a lo largo de la Historia se han presentado y superado a lo largo de muchos siglos, y que hoy en día son considerados en el proceso de enseñanza. Tomando en consideración las palabras de Naranjo (2011), se define como obstáculo epistemológico a:

> Las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir el conocimiento real o empírico. El individuo entonces se confunde por el efecto que ejercen sobre él algunos factores, lo que hace que los conocimientos científicos no se adquieran de una manera correcta, lo que obviamente afecta su aprendizaje. (p. 42)

En este referente se tendrán en consideración los establecido por Bachelard, (2000) que por su parte plantea las nociones para establecer los obstáculos epistemológicos los cuales darán explicación a la aparición de errores. Ellas no hacen referencia a los problemas desorganizados, emanados de la ausencia del conocimiento, sino de la dificultad directamente enlazada a la forma de considerar el conocimiento en su relación con los niveles a priori o posteriori de los conocimientos en sí, en este particular Bachelard propone como obstáculos epistemológicos lo siguiente:

> No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparece, por una especie de necesidad funcional, el entorpecimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta retroceso, es ahí donde discernimos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (p. 15)

En este sentido, el autor propone e identifica una serie de obstáculos epistemológicos que se presenta en el individuo al momento de estudiar en las ciencias en este referente se muestra la propuesta que menciona según sus características las enumera de la siguiente forma: (a) el obstáculo de la experiencia básica, (b) el conocimiento general como obstáculo para el conocimiento científico, (c) el obstáculo verbal, (d) el conocimiento unitario y pragmático como obstáculo para el conocimiento científico, (e) el obstáculo sustancialista, (f) psicoanálisis del realista, (g) el obstáculo animista, (h) mito de la digestión, (i) libido y conocimiento objetivo, (j) los obstáculos del conocimiento cuantitativo.

Para esta indagación que se centra en el estudio evolutivo de la función afín en el contexto de las ciencias económicas, el énfasis se hizo en los dos primeros obstáculos abordados por Bachelard; puesto que fueron los que surgieron en el análisis histórico-epistemológico.

Algunos elementos didácticos en el abordaje del tema de la función.

La conceptualización de función matemática que actualmente es manejada en el ámbito escolar, se obtiene después de un extenso proceso de evolución en la historia de la concepción de función. Durante esa historia, también se ha podido observar como esta evolución se debió, en principio, a que no fueron del todo aceptadas, debido a la persistencia de ciertos obstáculos epistemológicos que emergieron en el intento por entender estas nuevas concepciones. Esto mismo ocurre en la enseñanza de este tema en los distintos contextos escolares, donde se han podido identificar diversos modelos o esquemas de comprensión/concepción de la noción de función. Por ejemplo, para Trujillo, Castro y Delgado (2010), el concepto de función puede ser concebido

-*Función en términos de la variable*: relación entre dos variables, donde a cada valor de una de ellas (ubicada en el dominio) le corresponde un único valor.

- *Función en términos de conjunto de pares ordenados*: Una función es un conjunto de pares ordenados, no dos de los cuales tiene la misma primera componente.

- *Función en términos de regla de correspondencia*: Una función entre dos conjuntos es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento del primer conjunto, un elemento determinado de manera única en el otro conjunto.

Por su parte, para Azcárate y Deulofeu (1990), también identifican algunas concepciones de la función, que en esencia, coinciden con la de los autores citados anteriormente. En este caso, son identificadas las siguientes concepciones:

- *Correspondencia entre valores de variables*: el valor de una variable queda determinado a partir del valor de la otra.
- *Dependencia entre dos variables*. Existen variables dependientes e independientes, por ende, dominios y rangos. La función es la relación que establece cómo la variable dependiente en consideración de los valores que toma la variable independiente.

- *Correspondencia entre elementos de dos conjuntos*: una función f de un conjunto A hacia un conjunto B es una regla de correspondencia que asignan a cada elemento x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única f (x) de B.
- *Conjunto de pares ordenados:* una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares ordenados tienen tiene el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos rango de la función.

Otro aspecto relevante, está asociado a las diferentes formas de representación de una función matemática. Ugalde (2014) refiere que hay cinco formas de representación, las cuales se describen a continuación:

- *Descripción verbal*: Describe la relación funcional de tal forma que no requiere el uso de simbología. La función es descrita con lenguaje común (hablado o escrito). Por ejemplo, la función que le asigna a cada persona su número de identificación; o a cada automóvil su placa. Otro ejemplo conocido en matemática es la definición de la función de Dirichlet, definida en los reales, y cuya imagen es 0 para cada número irracional y 1 para cada número racional.
- *Diagramas*: Con un importante componente visualmente. Tiene una estrecha vinculación con los diagramas de Venn utilizados en teoría de conjuntos. Suelen ser adecuados para trabajar funciones con conjuntos finitos, o con fenómenos que no son necesariamente cuantificables. Sin embargo, acá también podrían entrar otros esquemas pictóricos de representación, como por ejemplo, las máquinas de transformación bajo el esquema de entrada y salida, usadas como ejemplo de función en muchos libros de textos.
- *Tabla de Valores*: Listado expresado en forma de tabular (horizontal o vertical) donde se emparejan los elementos del conjunto de partida y llegada. Suele usarse para identificar algunos elementos de la función, y describe mejor funciones entre conjuntos finitos, sin embargo, en el caso de conjuntos con cardinalidad alta, esta representación ofrece una visión parcial de la relación funcional. Adicionalmente. Se limita la noción de sobreyectividad - en aquellos casos donde la función lo sea –

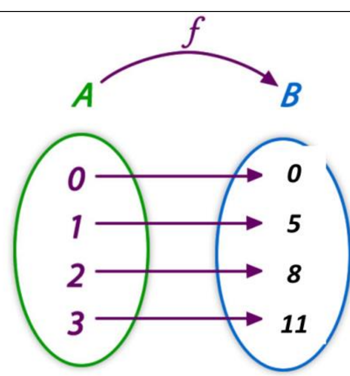
ya que puede persistir la idea errónea de que los emparejamientos presentes en la lista son los únicos existentes y posibles. A pesar de ello, es de las representaciones más usadas en forma cotidiana

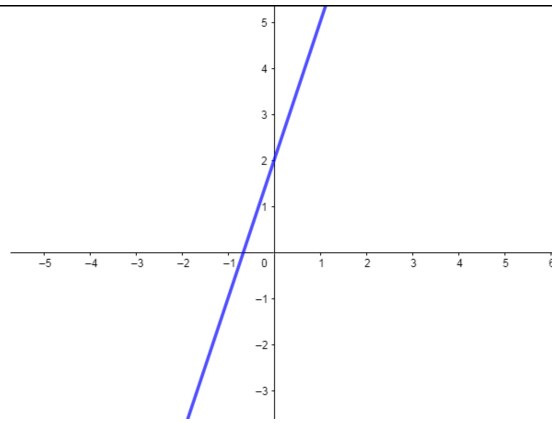
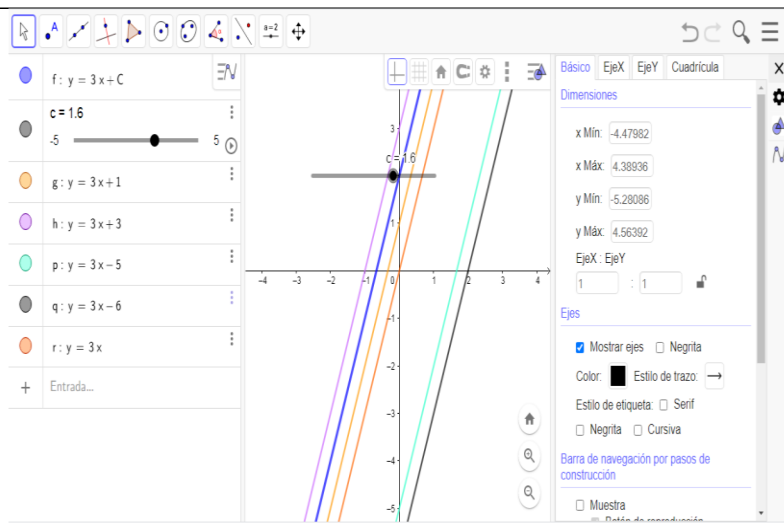
- *Gráfica*: Junto con la tabular, es la forma de representación más utilizada. Lo usual es la representación en el sistema de coordenadas cartesianas. Facilita la visualización de características globales que ostenta función.
- *Expresión* algebraica: A través de este modo, se busca representar una función mediante una expresión, fórmula o ecuación matemática (empleando símbolos algebraicos)

Otros autores, como Barajas, Fulano, Ríos, Salazar y Pinzón (2018), plantean como sistemas de representación, el pictórico, tabular, gráfico, numérico (pares ordenados), simbólico (expresiones algebraicas) y ejecutable (apoyado en las TIC y en la geometría dinámica). Como se puede apreciar, hay coincidencias con lo planteado con Ugalde, pero se agrega un aspecto vinculado al uso de las tecnologías digitales. A continuación, en el cuadro 1 podemos ver una función afín definida de $\Re$ en $\Re$ como $y = 3x + 2$ en sus distintos modos de representación.

Cuadro 1

Múltiples representaciones de una función afín

<table>
<tr><th>Tipo</th><th colspan="2">Representación</th></tr>
<tr><td>Verbal:</td><td colspan="2">La función se define como el triple de la variable independiente, aumentada en dos.</td></tr>
<tr><td>Diagrama (Pictórico)</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td>X</td><td>$\boldsymbol{y = 3x + 2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>(Numérico)</td><td><table><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>11</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Algebraico</td><td>$\boldsymbol{f: R \to R\ tal\ que\ f(x) = y = 3x + 2}$</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td></td></tr>
<tr><td>Dinámico
(Ejecutable)</td><td>
</td></tr>
</table>

Objetos Virtuales de Aprendizaje: Tecnologías digitales al alcance de la enseñanza de la Matemática.

Los *Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA)* son recursos digitales, creados con fines educativos, y pensados para la enseñanza y aprendizaje un concepto o temática en específico. Su elaboración se apoya en algún tipo de diseño instruccional predefinido, el uso de una plataforma digital disponible en internet para la creación de OVA e instrumentalmente se apoya en el uso de gráficos, ilustraciones, texto, animaciones, videos, audios, documentos digitales, e hipertexto, entre otros recursos.

Conceptualización de los OVA.

No es suficiente una nueva perspectiva sólo en la concepción del aprendizaje. Necesario es también enfocar en nuevas prácticas docentes, adecuadas a ellos, y los tiempos actuales donde la tecnología digital juega un papel cada vez más importante. Es aquí, donde, dentro de la amplia gama de herramientas, recursos, programas y plataformas disponibles en la Web para su uso en educación, surgen los Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) como un conjunto de recursos educativos interactivos digitales de apoyo al aprendizaje.

Dentro del ámbito de la tecnología educativa, y la búsqueda de nuevas vías para el desarrollo de una enseñanza centrada en el aprendizaje del estudiante, apoyada en medios y recursos digitales a ser implementados en educación virtual o híbrida, el concepto de Objeto Virtual de Aprendizaje ha venido captando cada vez más adeptos e interés dentro de la comunidad; ya que facilita la creación, distribución y reutilización de contenidos digitales educativos; adaptables a distintos contextos.

Autores como Wiley (2000) definen los OVA como una serie de recursos digitales, autocontenibles y reutilizables, diseñados con un fin educativo; y que al menos debe estar conformado por elementos claves: (a) contenidos, (b) actividades de aprendizaje y (c) elemento contextualizador. Así mismo, deben disponer de metadatos o elementos de información identificadora que faciliten su registro, recuperación, almacenamiento y reconocimiento (Petro, Salas, Puerta, y Berdella; 2018). Para el Ministerio de Educación de Colombia (2006), un OVA es

> un conjunto de recursos digitales, auto contenibles y reutilizables con un propósito educativo y constituido por al menos tres componentes internos: Contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización. El objeto de aprendizaje debe tener una estructura de información externa (metadatos) que facilite su almacenamiento,

identificación y recuperación (Tomado del sitio web Colombia Aprende: http://www.colombiaaprende.edu.co/)

Para Cernea y del Moral (2005), los OVA están dirigidos a la presentación de contenidos y de información con el fin de cumplir con los objetivos educativos propuestos en el curriculum escolar, por medio del desarrollo de unidades didácticas y que contemplan tanto la información o contenidos, como recursos para el aprendizaje, actividades formativas y estrategias de evaluación, convirtiéndose "en una unidad de información, relativamente pequeña, que tiene sentido por sí mismo en un contexto de aprendizaje…,por lo que es recomendable que se centre en un único objetivo educativo o desarrolle un solo concepto" (p. 2).

Por su parte, Stephens (2004), concibe a los OVA como elementos digitales de contenidos susceptibles de ser empleados en diversos contextos educativos; por lo que son considerados como una unidad digital significativa de aprendizaje; autosuficientes e independientes.

Características de los OVA

Los OVA, deben estar diseñados para permitir el logro de objetivos puntuales desplegados en torno a unidades didácticas; por lo que deben involucrar e incluir contenidos, actividades, diversidad de recursos de aprendizaje y evaluación. Además, deben procurar o garantizar la reusabilidad, compatibilidad con diversos dispositivos, adaptables a una amplia gama de necesidades y situaciones, y por tanto, flexibles. Petro, Salas, Puerta, y Berdella (2018) mencionan las siguientes características:

1. Deben ser extrapolables a otros contextos, es decir, se debe garantizar su reusabilidad.
2. Son relevantes al convertirse en verdaderas experiencias de aprendizaje significativo, permitiendo relacionarlos con otros conocimientos.
3. Técnicamente, se debe procurar que sean compatibles para ser visualizados de forma independiente en diversos formatos y dispositivos digitales.
4. Son identificable por medio de metadatos.

5. Deber ser adaptables y flexibles a distintas situaciones y necesidades particulares de los estudiantes.
6. Durables frente a los cambios tecnológicos sin que esto implique un constante rediseño o cambio de código importante.

Los OVA son diseñados y construidos con diversos programas o plataformas, que tenga formatos técnicos compatibles. Entre algunas plataformas, herramientas, recursos y programas que permiten la generación de OVA, se encuentran: eXelearning (https://exelearning.net/), Kahoot (https://kahoot.com/schools-u/), H5P (https://h5p.org/), Animatron (https://www.animatron.com/), Genial.ly (https://www.genial.ly/), así como programas de edición de video, y generación e integración de recursos multimediales.

Para Acuña (2017), las características de los OVA son (a) *reutilización*, es decir, ser usado en distintos contextos y con fines educativos diferentes; (b) *flexibilidad*, *versatilidad* y *funcionalidad*, adaptándose y combinándose en diferentes secuencias formativas; (c) *interoperabilidad*, lo que significa que deben integrarse a la mayoría de las plataformas y sistemas de gestión de aprendizaje, independientemente de sus estructuras; (d) durabilidad, puesto que deben perdurar en el tiempo, y evolucionar; y la (e) accesibilidad; ya que los OVA deben estar disponibles y ser usados por una gran cantidad de personas.

Para Stephens (2004), las propiedades más relevantes de los OVA son (a) su reutilización, (b) está formado por bloques independientes de contenidos, (c) se pueden ensamblar de formas distintas, (d) manejo de estándares para identificación y registro.

Lo relevante de los OVA es estos pueden ser adaptados, editados, reutilizados, integrados, ajustados y distribuidos en distintos sistemas y entornos de gestión de aprendizaje como Moodle, por ejemplo, para que puedan ser utilizados por todos, sin limitaciones como el dispositivo digital empleado o la modalidad de estudio.

Estructura de un OVA

La estructura de un Ova varía según una diversidad de factores tales como el tipo de contenido, el nivel educativo, las características de los estudiantes, las demandas curriculares, el tiempo, los recursos disponibles, el enfoque pedagógico y didáctico a seguir y la preparación del docente en el tema de las tecnologías digitales; entre otros. En palabras de Cernea y del Moral (2005), es importante que se le presente al estudiante el contenido de forma más o menos estructurada y esquematizada; y que en el caso de los OVA, éstos pueden constar de las siguientes partes (a) introducción, presentación o motivación del tema; (b) módulos de contenidos o temas (en concordancia con los objetivos de aprendizaje planteados); (c) actividades de aprendizaje, basadas en herramientas digitales y recursos de la Web Social (audio, video, pdf, simulaciones, juegos interactivos, etc.); (d) cierre o conclusiones de la unidad temática y (e) actividades de evaluación. Pero veamos en un poco más de detalle estos elementos. Los autores plantean que los OVA deben disponer como mínimo, de:

- *La introducción* enuncia claramente las habilidades y las competencias que se pretenden desarrollar en este OA, la tipología de las actividades y el mecanismo de evaluación. También enumera los requisitos mínimos necesarios para poder entender los módulos teóricos y llevar a cabo las actividades propuestas.
- Las *Micro-unidades didácticas* o módulos teóricos son las que presentan los contenidos a través de elementos multimedia interactivos.
- Las *actividades* relacionadas directamente con cada módulo teórico y basadas en los ejemplos tratados en los mismos.
- *Conclusiones*, que abarcan recordatorio de las ideas clave del OA y líneas futuras propuestas, como también aplicaciones y conexiones con otros dominios de conocimiento. Contextualización del OA a través de la bibliografía, sitios web recomendados y trabajos relacionados que vienen a profundizar, situar y conexionarlo.
- *Evaluación*, que responde a cada uno de los subobjetivos enunciados al principio, debe contemplar si el estudiante ha adquirido las competencias deseadas. (p. 3)

En todo caso, se apuesta a la flexibilidad de su diseño, su adaptabilidad y al hecho de que cada uno de los módulos temáticos que lo componen deben ser independientes entre sí con el fin de ser reutilizables.

Acuña (2017) en la misma tónica, utiliza la analogía de un rompecabeza para hablar de la estructura de un OVA. En efecto, se puede concebir en un OVA como una pieza de un rompecabezas, con una estructura pequeña que puede ser insertada, combinada e integrada con otras piezas para dar forma una pieza mayor, a una imagne más completa e incluso más compleja, pero también con mayor significado. A su vez, esta micro pieza, unida a otras forman un imagen nueva, pero esta imágen puede también formar parte de una paisaje más amplio.

Por lo tanto, la elaboración de un OVA no se basa en volcar el contenido de un tema o unidad de estudio en formato digital y electrónico, como lo demandan los lineamientos curriculares tradicionales. Se trata es de crear contenidos suficientemente flexibles, e independientes, de tal forma que puedan adaptarse a diversos programas, planes y modalidades de estudio, así como a distintas plataformas tecnologicas (los OVA deben ser, por tanto, multiplataformes). En el cuadro 2 podemos ver la estructura propuesta por Acuña (2017), la cual tiene puntos de encuentro con la Cernea y del Moral (2005).

Cuadro 2.

Estructura de los OVA

Objetivos claros: Los cuales deben diseñarse en base a lo que se requiere alcanzar con el uso del OVA.
Contenidos: Los contenidos pueden estructurarse en niveles e ir profundizando en la medida que el usuario lo requiera. Ser presentados en una estructura lógica, bajo el formato que mejor se adapte para el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Actividades de aprendizaje: Guiarán al estudiante para alcanzar los objetivos propuestos.
Actividades de interacción: Podrán usarse como espacios para construir conocimiento de manera colaborativa. Esta interacción puede ser virtual, presencial o combinada, según la modalidad empleada.
Evaluación o Autoevaluación: son herramientas que permitirán verificar el aprendizaje logrado. Por supuesto, **deben estar en concordancia con los objetivos propuestos** y por el tipo de contenido presentado.

Tomado de Acuña, M. (2017). Objetos Virtuales de Aprendizajes en línea. Recuperado de: evirtualplus.com/objetos-virtuales-de-aprendizajes-linea/

Dimensiones de un OVA

En una OVA se congregan tres dimensiones; a saber, (a) la dimensión pedagógica, (b) la dimensión tecnológica y (c) la dimensión interactiva (Acuña, 2017).

La *dimensión pedagógica* abarca todos los aspectos didácticos y curriculares que son inherentes a la parte educativa sobre la cual se soporta el OVA. Incluye tanto las teorías de aprendizaje que fundamentan el OVA, como el Diseño Instruccional para su construcción.

La *dimensión tecnológica*, se enfoca en los aspectos técnicos y digitales que concurren en la elaboración del OVA. Implica el manejo de los estándares técnicos para los metadatos, y facilitar su búsqueda, reutilización, distribución y almacenamiento.

La *dimensión interactiva*, ya que en todo OVA deben existir actividades de interacción entre el contenido y el estudiante; además de que debe adecuarse a las distintas plataformas de aprendizaje, de tal manera que también genere discusión, debate y colaboración en la construcción del conocimiento con los pares.

***Estándares técnicos y OVA*.**

Como ya hemos visto, tres de las características más resaltantes de los OVA son su accesibilidad, reusabilidad, y adaptabilidad de los contenidos y actividades, independientemente de la plataforma educativa en la cual estén diseñados y elaborados. Para Castrillón (2011)

> Reusabilidad es la flexibilidad que permite integrar componentes distintos dentro de múltiples contextos y aplicaciones; interoperabilidad es la capacidad de los objetos de utilizarse sobre distintas plataformas tecnológicas. Durabilidad es la capacidad del objeto para resistir a evoluciones tecnológicas, sin necesitar de reconfiguraciones estructurales. Por su parte, accesibilidad es la capacidad de acceder a los componentes de enseñanza desde sitios remotos a través de tecnologías web, así como la facilidad para distribuirlos a otros sitios. Además de lo anterior, los OA

> deben ser adaptables, o sea que se pueda personalizar la formación en función de las necesidades de las personas y organizaciones. (p. 123)

Es por ello que, estas características en particular, dependen de modelos basados en estándares comunes ya establecidos por diversas organizaciones, que trabajan en pro de una educación virtual de calidad. Al respecto, son varios los modelos de estándares existentes hasta la fecha y que procuran establecer una estructura más o menos homogénea en la gestión de los metadatos, los cuales son descriptores estructurados disponibles de forma pública y abierta; y que facilitan la localización e identificación de los OVA. Por ejemplo

- La Advanced Distributed Learning (ADL) estableció especificaciones para el desarrollo, empaquetamiento y distribución de material educativo, bajo la denominación del Shareble Content Object Reference Model (SCORM)
- El IEEE/LTSC diseñó también un conjunto bastante completo de metadatos, denominado Learning Object Metadata (IEEE-LOM)
- La Dublin Core Metadata Initiative (DCMI) elaboró un conjunto genérico de metadatos para los contenidos educativos.

El uso de estos estándares de identificación de los OVA, junto con la creación de repositorios de estos recursos, son aspectos esenciales para su gestión, búsqueda, clasificación, almacenamiento y difusión.

Herramientas digitales para el diseño de los OVA: Caso de EXelearning.

El proyecto eXelearning tiene sus inicios en Nueva Zelanda, específicamente de la mano de la universidad de Auckland, la universidad tecnológica de Auckland Technology y el Politécnico de Tairawhiti; quienes contaron con el apoyo y financiamiento del proyecto; el cual por ser abierto, cuenta con un amplio número de colaboradores a lo largo de todo el mundo.

Este software es una potente herramienta de código abierto, con una interfaz sencilla e intuitiva, que permite la creación de materiales educativos digitales. Si bien permite la elaboración de cursos completos, es especialmente útil para la creación de unidades de aprendizaje auto-contenidas y reutilizables. Los recursos desarrollados en eXeLearning permiten una amplia distribución, ya que una vez construidos pueden ser exportados con distintos formatos y ser publicados en la web, integrarse en entornos educativos como Moodle o distribuirse en soportes físicos (DVDs, Pendrives, tarjetas de memoria, etc.) para ser utilizados offline. Estas características lo hacen especialmente adecuado y flexible para la creación de OVA

Así, en el sitio web de la plataforma, definen a eXelearning como una herramienta de código abierto (open source) que facilita la creación de contenidos educativos sin necesidad de ser experto en programación. Se trata de una aplicación multiplataforma permite la utilización de árboles de contenido, elementos multimedia, y actividades interactivas, así como actividades de autoevaluación, y que por su estructura, facilita la exportación del contenido generado a múltiples formatos: HTML, SCORM, IMS, etc.

El uso del software eXeLearning se ha venido expandiendo poco a poco, debido a su potencial para generar OVA. Su expansión se debe, entre otras razones, que es de código abierto, maneja una sencilla e intuitiva interfaz; lo que facilita la creación de materiales educativos digitales; y en especial, aquellos de reutilizables y autocontenibles; facilitando su redistribución y publicación en la web; y permitiendo la exportación en diversidad de formatos, y su integración a diversas plataformas y entornos.

Entre las ventajas de su uso, se encuentran (a) su sencillez y simplicidad de su uso; y por ende, su facilidad para aprender a utilizarlo; (b) toma en consideración los estándares desarrollados hasta el momento (de hecho, tiene la opción de trabajar con varios), beneficiando así, la adaptabilidad e intercambio de los recursos educativos creados; (c) el hecho de que sea de código abierto, lo cual permite que su avance, evolución y desarrollo sea constante puesto que se puede tener acceso a su código fuente y modificarlo; y (d) tiene la posibilidad de personalizar el OVA creado a través de plantillas de estilos propias. Entre algunas debilidades, destacan el hecho de que quizás no sea la herramienta más completa del mercado, y la presencia de ciertos fallos en su funcionamiento (esto tiene que ver también con el hecho de ser open source) aunque son rápidamente solventados por los colaboradores.

La herramienta eXelearning tiene a su disposición los iDevice, que constituyen quizás uno de los recursos más poderosos con los que cuenta el programa. Los iDevices son instrumentos que permiten introducir diferentes recursos didácticos. Si bien la herramienta cuenta con una gran variedad de estos recursos, también es posible crear nuevos iDevices según las necesidades y manejo técnico de quien desarrolla el OVA. En el cuadro 3 podemos apreciar los iDevice disponibles en eXelearning. Para la Dirección General de Educación a Distancia y Tecnologías de la Universidad Nacional de La Plata o UNLP (2017),

> Estos iDevices permiten la incorporación de recursos externos, lo que transforma a eXeLearning en un instrumento particularmente rico en cuanto a la utilización de recursos multimedia. Los primeros cinco tipos son iDevices preconfigurados, de uso frecuente, pero la mayor ventaja de este tipo de recursos es la inserción de una numerosa cantidad de Applets gratuitos disponibles en la red, que brindan la posibilidad de incorporar, por ejemplo, rompecabezas, ejercicios de matemáticas, videos y mapas interactivos, etc. (p.1)

Cuadro 3.

Herramientas iDevice disponibles en eXelearning

iDevices de presentación de información de forma textual.

- Texto libre
- Objetivos
- Conocimiento previo

iDevices de presentación de información no textual (imágenes y páginas web).

- Galería de imágenes
- Lupa
- Sitio Web externo
- Artículo de la Wikipedia
- RSS (no dinámico)
- Applet de Java

iDevices de actividades no interactivas: proponen actividades que no se pueden contestar directamente.

- Actividad de lectura
- Caso práctico
- Reflexión

iDevices de actividades interactivas: permiten al alumno interactuar directamente con el objeto.

- Completar
- Pregunta de elección múltiple
- Pregunta de selección múltiple
- Pregunta verdadero-falso
- Cuestionario SCORM
- Actividad desplegable

Tomado y adaptado de: https://exelearning.net/html_manual/exe_es/idevices.html

Diseño instruccional: Modelo ASSURE

Hoy en día parece ser aceptado el hecho de que aprender es una de las actividades más relevantes y complejas que puede llevar a cabo un ser humano. De allí que, se recurra a modelos o enfoques que pretenden sistematizar, orientar y organizar el acto de enseñanza; dando pie a lo que algunos autores denominan como Diseño Instruccional (DI), utilizado en la creación de ambientes que promuevan y faciliten, los procesos educativos.

Es por ello que, en este apartado de las bases teóricas, se presenta un modelo de diseño instruccional en particular, el modelos ASSURE, el cual sirvió de sustento para la creación del OVA *la función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar*, elaborado siguiendo el análisis histórico-epistemológico presentado en los capítulos IV y V de esta investigación. Es importante mencionar que sólo se llegará hasta la fase cuatro del modelo ASSURE, que implica hasta la elaboración del OVA.

Conceptualizando el Diseño Instruccional

Para Benítez (2010), "el diseño instruccional en cualquier modalidad educativa ya sea presencial o a distancia, requiere de la revisión de los fundamentos pedagógicos, así como de cada una de las etapas que conducen a la realización de un diseño eficiente" (p. 5).

Una de las conceptualizaciones más aceptadas del DI es la aportada por Dorrego (2000), quien señala que es un proceso sistemático que consiente en analizar las necesidades e intenciones del acto de enseñanza, en el que se seleccionan, organizan y proponen un conjunto de estrategias, actividades, medios y recursos que facilitan alcanzar los objetivos trazados y finalmente, permite establecer procedimientos de evaluación del aprendizaje y de todo el acto pedagógico.

La construcción de modelos o propuestas de DI han ido evolucionando en función de las diversas teorías y enfoques en la concepción del aprendizaje; desde el conductismo, hasta aquellas nuevas posturas epistémicas que explican el acto de aprender desde las visión de la influencia de las tecnologías educativas.

Para Domínguez, Organista y López (2018) "El diseño instruccional es un proceso de planificación de resultados, selección de estrategias para la enseñanza-aprendizaje, elección de tecnologías relevantes, identificación de medios educativos y medición del desempeño" (p. 2)

Este proceso puede ser empleado para el diseño de actividades y/o planes de formación como de cursos, módulos, unidades didácticas, objetos virtuales de aprendiza o recursos educativos abiertos, ya que el DI se sustenta en teorías de aprendizaje. Además, señalan los autores antes citados que recurrir a un modelo de diseño instruccional "facilita la labor de los agentes involucrados en la producción, gestión y ejecución de los materiales, los cuales deberán adecuarse a las necesidades de la institución y de los estudiantes para asegurar la calidad del aprendizaje" (p. 2). De esta manera, el manejo de un modelo adecuado de diseño instruccional es un modo de crear de manera organizada, un OVA, atendiendo lineamientos educativos, pedagógicos, didácticos y tecnológicos.

Es así como se puede considerar al diseño instruccional como un proceso organizado que expone el accionar educativo, lo que su vez implica, entre otras cosas, la selección de medios y recursos de enseñanza y aprendizaje que a su vez están influenciados por las diversas corrientes educativas y, por supuesto, por los importantes avances tecnológicos vividos en los últimos tiempos.

Al respecto, Reigeluth (2012) establece unos principios o ideas centrales en torno a las cuales debe girar el diseño instruccional en la era postindustrial, caracterizada por el uso de las tecnologías digitales. Tales principios son:

- Instrucción centrada en el estudiantes y no en el docente
- Aprender haciendo
- Preferir el progreso académico, basado en logros y no en el tiempo
- Privilegiar la educación personalizada, por encima de la estandarizada
- Procurar la evaluación en base a criterios y no en base a normas
- Estimular la colaboración y el trabajo en equipos; reconociendo las bondades del constructivismo social.
- Dar mayor peso a tareas auténticas y atractivas, como se suele hacer en el aprendizaje basado en problemas y en el aprendizaje basado en proyectos.

Todo esto implica revisar los nuevos roles que han de jugar los docentes, los estudiantes y las tecnologías digitales. Al respecto, el mismo autor mencionar (a) *roles para los docentes*: diseñador del trabajo del alumno, facilitador del proceso de aprendizaje y mentor atento; y (b) roles para los estudiantes: trabajador, estudiante autónomo y co-instructor. En relación a las tecnologías digitales y el papel que deben desempeñar, precisa cuatro roles, a saber:

> En primer lugar, el almacenamiento de los registros de aprendizaje de los alumnos, que incluye ofrecer un inventario de estándares, un inventario de logros personales y un inventario de características personales. En segundo lugar, la planificación del aprendizaje del alumno, que incluye ayudar al estudiante, a sus padres y al docente a identificar o decidir los objetivos a largo plazo, las metas al alcance del alumno en el presente, las metas a alcanzar en el futuro inmediato, los otros estudiantes que puedan trabajar en el grupo, los roles del docente y de los padres y el plan personal de aprendizaje. En tercer lugar, la instrucción para el aprendizaje de los alumnos incluye una amplia variedad de herramientas tanto para el espacio de la tarea como para el espacio instruccional. Finalmente, la evaluación para y del aprendizaje del alumno está integrada con la instrucción, utiliza tareas y ejecuciones auténticas, certificaciones de logros y retroalimentación formativa. (p.19)

Independientemente de la modalidad educativa donde se implemente el uso de entornos y/o recursos digitales; es necesario que cualquier propuesta formativa vincule estos con la disciplina de estudio, las teorías de aprendizaje, y las estrategias didácticas; y esto lo permite justamente, la selección y puesta en práctica de un modelo de DI que mejor se ajuste a las necesidades. Es por esto que, para Belloch (2013)

> El diseño instruccional se plantea como un proceso sistémico con actividades interrelacionadas que nos permiten crear ambientes que realmente faciliten, de forma mediada, los procesos de construcción del conocimiento. Si estos ambientes de aprendizaje no utilizan un diseño instruccional adecuado a la modalidad virtual no seguirán una planificación apropiada del proceso formativo con una propuesta didáctica definida y, por ello, los beneficios de las actividades de aprendizaje pueden verse disminuidos notablemente (p. 11)

Modelo ASSURE

Entendiendo al DI como el planteamiento sistemático y organizado, implementación y evaluación de situaciones que promueven y facilitan el aprendizaje; podemos considerar que según las corrientes educativas, psicológicas, filosóficas e instruccionales; se han generado distintos modelos, enfoques y perspectivas de diseño instruccional, los cuales son utilizados como guía y marco de referencia que orienta el proceso educativo.

Dentro de los distintos modelos de DI, uno de los que corresponde a una posición constructivista, cónsona con lo que lo que algunos autores reflejan sobre el modo que debe privar en la Educación Matemática; y que a su vez, se puede adaptar a nuevas visiones y tendencias basadas en la era digital, es el modelo planteado por Heinich, Molenda, Russell y Smaldino en la década de los noventa. La expresión ASSURE es un Acrónimo de Analize, State, Select, Utilize, Require, Evaluate (por sus siglas en inglés).

Para Benitez, (2010), este modelo engloba un conjunto de características idóneas para quienes pretenden implementar una modalidad educativa híbrida (presencial/virtual) o totalmente en línea, innovando en el proceso de enseñanza y aprendizaje; y considerando su adaptabilidad para diseñar un todo curso o asignatura; o una sola lección.

Para Smaldino, Russell, Heinich y Molenda (2007) el modelo ASSURE es considerado como ecléctico, ya que se soporta en los principios cognitivos de Robert Gagné, en el conductismo al manejar el logro de objetivos de aprendizaje; pero también se apoya en elementos propios de las corrientes del constructivismo pues procura la participación activa, autonómica e independiente del estudiante. Además sirve de guía de apoyo para la planificación escolar mediada por las TIC (Benítez, 2010). El modelo ASSURE presenta seis fases o etapas:

1. *Analizar las características del estudiante*, identificando, algunos de los siguientes aspectos: (a) nivel de estudios, (b) edad, (c) características biopsicosociales; (d) conocimientos previos, habilidades y actitudes; (e) estilos de aprendizaje, (f) hábitos de estudios y (g) nivel de motivación.
2. *Establecimiento de objetivos de aprendizaje o competencias*, determinando los resultados esperados que los estudiantes deben lograr al finalizar el proceso de enseñanza. Esto va muy de la mano con los lineamientos curriculares.
3. *Selección de estrategias didácticas, tecnologías, medios y materiales (recursos)*, que sean cónsonos y apropiados; y que se espera faciliten el proceso de enseñanza; y por ende, el alcance de los objetivos o desarrollo de competencias en los estudiantes. En este sentido, Smaldino et. Al. (2007) refieren que, “la tarea del profesor es construir un puente entre estos dos puntos, por un lado las estrategias de instrucción apropiadas, las tecnologías, y medios y después decidir los materiales para la implementación” (p. 26). Además, esta selección de los medios, materiales y recursos puede considerar tanto la selección de algunos ya disponibles, tal y como fueron elaborados; como la elaboración de otros a partir de la modificación de estos; o incluso el diseño y creación de recursos propios, apoyados o no en otros recursos.
4. *Organización del escenario de aprendizaje*, mediante la creación de ambientes y espacios (presenciales o virtuales) que propicien el aprendizaje, utilizando los medios y materiales seleccionados anteriormente, y donde se articulen los elementos obtenidos en las tres atapas anteriores.

5. *Participación de los estudiantes*, a través de estrategias, metodologías y enfoques activos, que promuevan la interacción del estudiante. Es el momento de implementar, de ejecutar y llevar a la práctica lo dispuesto en la fase anterior.
6. *Evaluación y revisión de la implementación y resultados del aprendizaje*; esto es, la valoración del proceso de enseñanza en función del impacto que tuvo el mismo en el aprendizaje de los estudiantes; y la reflexión, ajustes y reencuadres necesarios sobre el proceso, tomando en cuenta dicha valoración. Para Benítez (2010) "representa el momento de evaluar el logro de los objetivos de aprendizaje, el proceso de instrucción y el impacto en el uso de los medios tecnológicos" (p. 29).

Es así como el modelo ASSURE, es flexible y adaptable tanto al trabajo de aula presencial como virtual (o combinado); con etapas que contribuyen y facilitan la planificación de actividades formativas, la seleccionar y diseño de los materiales y recursos educativos, posibilitando el logro de los objetivos y en consecuencia, el aprendizaje del estudiante, permitiendo además, una revisión del proceso desde el inicio hasta el proceso evaluación integral, con énfasis en la retroalimentación de los avances del aprendiz; lo que a su vez podría ser fortalecido con el diseño de OVA, permitiendo la autoevaluación.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

Para realiza una investigación se deben tomar en cuenta una serie de elementos que serán los que den forma a la misma, entre ellos se encuentran el tipo de investigación utilizada, diseño, modalidad, población y muestra. Es por esto que, se describirá la metodología que se utilizó en la investigación desarrollada. Esto permitirá una visión más clara de los resultados alcanzados y el modo como se obtuvieron.

En este particular tomaremos lo planteado por Arias (2006), donde define el marco metodológico como el "Conjunto de pasos, técnicas y procedimientos que se emplean para formular y resolver problemas" (p. 16). Por su parte Balestrini (2006), el marco metodológico, está referido al momento que alude al conjunto de procedimiento lógico, tecno-operacionales implícitos en todo proceso de investigación, con el objeto de ponerlos de manifiesto y sistematizarlos: a propósito de permitir descubrir y analizar los supuestos del estudio y de reconstruir los datos, a partir de los conceptos teóricos" (p. 125)

Paradigma

Esta investigación encaja en el *paradigma post-positivista o interpretativo.* En este orden se tomará en consideración lo expuesto por Rojas (2014) quien expresa que "el papel de las ciencias sociales es comprender la vida social a partir del análisis de los significados que el hombre imprime a sus acciones" (p. 26). Por su parte Pérez (2004) señala que "puesto que en las disciplinas de ámbito social existen diferentes problemáticas, cuestiones y restricciones que no se pueden explicar ni comprender en toda su extensión desde la metodología cuantitativa" (p. 26). Un ejemplo de ello son, precisamente, los estudios históricos y epistemológicos como el que se desarrolló.

En efecto, se trató de comprender la evolución, génesis y obstáculos en el desarrollo del concepto de función afín, en un contexto muy específico como el de las ciencias económicas; para ello, se tuvo que revisar de manera acuciosa y minuciosa, todo lo reportado en literatura especializada, acerca de los aportes y contribuciones que distintos matemáticos y economistas realizaron en torno a este concepto.; sin recurrir a ningún tipo de variable o estudio cuantitativo.

Enfoque

El enfoque de la investigación fue cualitativo, y al respecto se tomará en consideración lo expuesto por Sandín (2003), quien refiere que, la investigación cualitativa está dirigida hacia la comprensión profunda de diversos fenómenos, especialmente los de carácter educativo y social, permitiendo así la generación de una entidad organizada de conocimientos.

Entre las características de las investigaciones bajo un enfoque cualitativo, menciona el autor que el proceso es inductivo, integral, permite la comprensión de la realidad dentro de su propio marco de referencia, y es de carácter interpretativo. Lo anterior encaja en la investigación desarrollada, ya que la misma se encargó de estudiar el progreso evolutivo de la función afín en las ciencias económicas, identificando obstáculos epistemológicos presentados en su comprensión, a lo largo de la historia; y reflexionando acerca de sus implicaciones didácticas.

Método

El método para esta investigación que se utilizará es el *método hermenéutico*, que en palabras de Rojas (2014) es aquel en el que, ".... es posible develar los significados presentes en textos y el significado que el intérprete atribuye a ellos... La validez o la objetividad de la interpretación está por encima de los prejuicios o marco de interpretación del investigador."(p. 42), ya que con la investigación se pretende revisar la bibliografía existente en libros, trabajo de grados, memorias y actas de investigación científicas, artículos en revista etc., para reconstruir y develar la génesis y desarrollo epistemológico del objeto matemático función afín, desde la óptica de las ciencias económicas.

Dentro de las múltiples aristas que tiene este método, se recurrió al círculo hermenéutico propuesto en Gadamer (1988) para la realización de la interpretación y reconstrucción histórica de los hechos, y permitiendo así la detección de obstáculos epistemológicos y las implicaciones didácticas en el estudio de la función afín dentro de las ciencias económicas.

Gadamer (Ob. Cit.) toma está noción de Heidegger, y según este principio, la comprensión de un texto tiene una estructura circular en la que el objetivo fundamental es acceder al sentido real del texto, más allá de la significación lingüística y de lo descriptivo evidente. Es importante resaltar que este método no es sólo aplicable a textos, tal y como se hizo en esta investigación, sino que también es válido su uso en cualquier fenómeno que se desee estudiar, comprender e interpretar. En la figura 1 se presenta la estructura del círculo hermenéutico que se empleó para develar la cronogénesis del concepto de función afín en las ciencias económicas, y develar algunos obstáculos epistemológicos subyacentes ella.

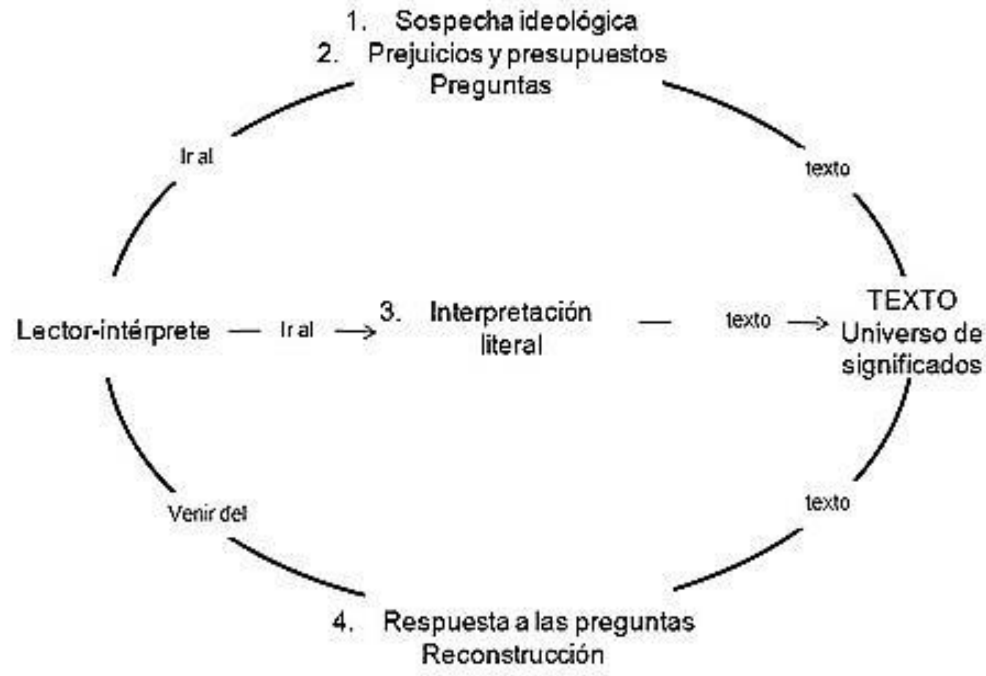


Gráfico 1. Círculo hermenéutico de Gadamer. Tomado de http://coloquiosobrehermeneutica.blogspot.com/2015/10/el-circulohermeneutico.html

Tipo de Investigación

La presente investigación fue considerada de carácter documental ya que se pretendió recopilar de forma adecuada los datos que le permiten redescubrir hechos de una forma ordenada rigurosa con objetivos precisos, lo cual fundamenta la adquisición de un conocimientos, sustentando en la revisión de documentos textos y su respectivo análisis de los contenidos

La modalidad de investigación documental permitió indagar sobre diferentes fuentes referente en el tema específico función afín dentro del campo de las ciencias económicas. Arias (2006) expone que “la investigación documental es un proceso basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos secundarios, es decir, los obtenidos y registrados por otros investigadores en fuentes documentales: impresas, audiovisuales o electrónicas. Como en toda investigación, el propósito de este diseño es el aporte de nuevos conocimientos.”(p. 27).

Al respecto a este tipo de investigación Arias (ob. cit.) indica que este tipo de estudios se fundamenta en una revisión sistemática, rigurosa, amplia y profunda de diversas fuentes documentales, con el fin de realizar análisis de fenómenos, interpretaciones de hechos, y establecer vínculos entre diversas unidades de análisis develadas en la revisión. Cuando opta por este tipo de estudio, el investigador utiliza documentos; los recolecta, selecciona, analiza y presenta resultados coherentes.

Nivel de la Investigación

Este trabajo se enmarca, en el nivel descriptivo tal como lo define Arias (ob. cit.), se basa en caracterizar e interpretar realidades, siendo el caso de esta investigación, realizar una caracterización histórica y epistemológica de la función afín, en el contexto de las ciencias económicas; reconociendo el papel que juega dicha realidad develada e interpretada, en la praxis educativa.

Así mismo se trata de estudio de carácter histórico ya que se estudiaran los periodos en el cual se presenta e incluyen la matemática y en especial la función lineal en el campo económico. En este particular tomaremos lo planteado por Arias (Ob. Cit.) en el cual la establece que estos estudios se orientan hacia el análisis del pasado, y a la reconstrucción e interpretación los hechos, ideas y concepciones del pensamiento a lo largo del tiempo.

Técnica de Recolección y Análisis de la Información

La técnica para recolectar la información que se empleó fue la del fichaje. En este sentido Arias (2006) considera que se trata de una técnica relevante en toda investigación científica, la cual consiste en registrar la información que se van obteniendo a través de la revisión documental.

Para la recolección de la información se utilizaron *fichas textuales*, que contienen párrafos seleccionados que aparecen en las obras, que repiten exactamente lo escrito si ninguna alteración respetando lo dicho por el autor. También se utilizaron *fichas de contenidos o resumen*, que aparte de los datos comunes a toda ficha, incluye resúmenes, aportes o síntesis de párrafos así como opiniones o cuestionamientos del investigador. También se recurrió al uso de *fichas mixtas* se elaboran combinando a la vez información textual y de libre creación por el investigador, es más útiles y adaptables, aunque su realización exige más de criterio que las anteriores.

De acuerdo a lo establecido por Arias (2006), las técnicas de análisis de datos se describen como "las distintas operaciones a la que serán sometidos los datos que se obtengan: clasificación, registro, tabulación y codificación si fuese necesario" (p.111). De esta manera hacer una interpretación general de los datos analizados y formular la conclusión requerida para alcanzar los objetivos de la investigación.

La técnica para el análisis de la información se realizará a través del análisis de contenido y se consideró lo planteado por Palella y Martins (2012), quienes afirman que "el análisis de contenido establece relaciones entre los temas; para ello identifica temas centrales y subsidiarios, establece vínculos entre ellos que luego pueden ser representados mediante mapas conceptuales o esquemas."(p. 139) en donde las unidades a realizar dicho análisis tendremos los libros de historia, los trabajos de grados, los trabajos doctorales, memorias y acta de investigación científica, artículos de revista, etc. Dicho proceso fue hecho de manera cíclica, tomando en consideración el círculo hermenéutico de Gadamer mencionado en el método de investigación.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA FUNCIÓN AFÍN EN EL MARCO DE LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

En este capítulo se desarrolló la evolución histórico-epistemológica de la función lineal y afín en el campo de las ciencias económicas, dando cumplimiento al *primer objetivo específico* de la investigación que fue *describir la génesis y evolución histórica del concepto de función afín, reconociendo situaciones, problemas, personajes y épocas o momentos históricos que contribuyeron a su desarrollo, especialmente en el ámbito de las ciencias económicas*.

Se inició con una revisión del surgimiento del concepto de función a lo largo del tiempo, y de la idea de linealidad, tratando de encontrar los puntos donde se intercepta la función matemática con el campo de la economía, y en especial la aparición de la función lineal y afín dentro de este contexto.

Como suele suceder con cualquier constructo matemático, la evolución del concepto de función a través de la historia, está asociado, en primera instancia, a diversos intereses de la humanidad por tratar de describir y comprender el comportamiento de su entorno. Así, el concepto de función, emerge a partir de ideas intuitivas y del empirismo; ideas que, con el pasar del tiempo, se van afinando y perfeccionado.

Así que, el pasar de la noción de función, al concepto formal de esta, no escapa tal dinámica. Para Ugalde (2014) “el concepto de función, como se entiende hoy en día, se consolida en el año 1837, con el matemático Gustav Dirichlet. Sin embargo, algunos autores atribuyen a Galileo la introducción de manera formal del concepto de función en las matemáticas” (p. 4); ya que a partir de los estudios matemáticos del movimiento, realizados por Galileo, él introduce la idea de una *relación entre variables*, sólo que expresada en lenguaje natural.

En esta misma tónica, Roldán (2013), asevera que, el concepto de función que hoy en día se emplea en Matemática; entendido como una relación, o regla de correspondencia entre elementos de conjuntos no vacíos, es bastante reciente, pues data del siglo XIX. Sin embargo, la noción de función como expresión, como fórmula, como gráfico, o en forma tabular; y que relaciona ciertas variables, es tan antigua como la civilización babilónica

Pero esto es solo el inicio de una trayecto complejo, un recorrido extenso, influido por diversos aspectos; hasta que se obtiene un concepto matemático formal y riguroso, además de útil En este sentido, autores como Ugalde (2014), refieren que, en torno al surgimiento y desarrollo de un concepto matemático, su interés

> se concentra primero en la simple observación y tabulación primitiva de algunos fenómenos o cuentas. Piénsese aquí en las culturas de la antigüedad. Luego, se basa en razonamientos filosóficos, algunas veces religiosos, como es el caso de la Grecia clásica, para después de muchos años dar paso a un proceso más científico, apoyado en observaciones y cuantificaciones serías del entorno; para culminar, luego de un esfuerzo en conjunto por muchos grandes matemáticos, en un objeto perfectamente definido, inherente a toda la matemática que se desarrolla hoy en día, y con una demostrada utilidad a la hora de modelar el mundo y las leyes que lo rigen. (p. 2)

Reconociendo que el concepto de función está presente prácticamente en cualquier otro tema o rama de la matemática; se le podría considerar tanto, como un elemento central en las diversas áreas de esta disciplina, pero también como una herramienta para modelar y describir fenómenos en distintos campos del saber. Al respecto, Ugalde (2014) refiere que

> Esta universalidad además de enriquecer el concepto, le otorga una importancia relevante a su correcto entendimiento. Como tal, es fundamental comprender que el concepto de función, como tantos otros conceptos de la matemática, no debe enseñarse como un ente abstracto, sino que debe tenerse presente que lo que le dio vida fue precisamente el entendimiento de fenómenos naturales y situaciones cotidianas alrededor del hombre. (p. 2)

De lo anterior se desprende el hecho de la necesidad de estudiar a profundidad no solo el progreso del concepto de función, desde el punto de vista matemático, sino que, este proceso evolutivo sea contextualizado; en este caso, desde la aparición de la función lineal y afín en las ciencias económicas; dando una nueva perspectiva al desarrollo histórico de estos objetos matemáticos.

Desarrollo histórico del concepto de función y la noción de linealidad

Para Acosta, Rondero y Tarasenko (2008) existen cuatro etapas, escenarios o estadios asociados a la noción de linealidad. Así mismo, autores como Roldán (2013); establecen 4 períodos claves para el desarrollo el concepto de función. Es por ello, que en el desarrollo histórico epistemológico se han asumido como etapas de evolución, la etapa antigua, la edad media y el renacimiento, la moderna y la contemporánea.

Por su parte, Ugalde (2014) es de la opinión de dividir el estudio histórico del desarrollo de la función en ocho periodos. Por lo que, considerando los tres autores citados, los períodos a considerar en esta investigación fueron (a) período de las civilizaciones antiguas (babilónica, egipcia y griega), (b) edad media y el renacimiento, (c) era moderna; (d) contemporánea.

Primeros vestigios de la noción función y linealidad en la edad antigua: Babilonia y Egipto

Como suele suceder con la mayoría de los objetos matemáticos, ubicar el origen exacto de ellos es una tarea compleja; y el caso de la noción de función no escapa de esto. En la época antigua no existía una idea abstracta de variable, y las cantidades se describían verbalmente o por medio de dibujos.

A pesar de ello, en este período comienzan a desarrollarse algunas manifestaciones implícitamente asociadas a la noción de función. Por ejemplo, el conteo implica una correspondencia entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar. Por otro lado, para Acosta, Rondero y Tarasenko (2008) la noción de proporcionalidad presente en las culturas ancestrales egipcia, china y babilónica, constituyen el soporte epistemológico más antiguo de la idea de linealidad

Investigadores de la historia de la Matemática como Collette (1998), Boyer (1999), Rey Pastor y Babini (2000) y Bell (2015,2016) indican que en la antigua Babilonia ya se han podido evidenciar algunos elementos que podría asociarse a la idea matemática de función, a través de diferentes casos de dependencia o relación entre dos o más magnitudes, expresadas por medio de tablas numéricas. Al respecto, Sánchez y Valdés (2007) indican que "aprender a descifrar el enigma de las tablas numéricas de la antigüedad significa descubrir las relaciones funcionales escondidas entre los elementos que conforman la tabla." (p. 24).

Para Ugalde (2014) "la versión más rudimentaria del concepto de función es, sin lugar a duda, el concepto de dependencia entre cantidades" (p. 5). En este sentido, tales relaciones están presentes en algunas tablillas de arcilla de los babilonios y en algunos papiros de los egipcios. En el caso de los babilonios, señala el autor antes citado, se tallaron varias tablas de cálculo, un par de ellas datan de 2000 A.C y dan cuenta de los cuadrados de los números del 1 al 59, y los cubos de los números del 1 al 32. Adicionalmente, los babilonios conocían algunas relaciones peculiares como:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \; y \; ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

y partir de las cuales, junto con la tabla de cuadrados mencionada anteriormente, era suficiente para efectuar el producto de dos números cualesquiera. También llama la atención que tales tablas se presentan en formato de columnas, por lo que el autor las considera como precursoras históricas, de las tablas empleadas en la actualidad para la representación de funciones reales de variable real, en su forma tabular.

Las operaciones aritméticas elementales son funciones de dos variables. En las tablas numéricas babilónicas (2000 A.C–500 A.C) se presentaba el resultado de multiplicaciones y divisiones, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas y cúbicas. Además, se han encontrado tablas con fórmulas de cálculos tan llamativas como la de la suma de n términos de una progresión geométrica, o la de los números pitagóricos, o las que muestran la utilización de reglas de tres, simples y compuestas.

En el caso de los egipcios, en el Papiro Rhind, creado alrededor del 1700 A.C, se aprecia una tabla de descomposición de $n/10$ (n:1, 2,…,9). También se ubica en el papiro, otra tabla en la que se representan todas las fracciones cuyo numerador es 2 y el denominador es un impar (entre 5 y 101), expresadas como suma de fracciones unitarias.

Las primeras nociones de linealidad inician pues, con el desarrollo de la cultura egipcia, china y babilónica (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008); donde el cobro de impuestos se hacía considerando lo que hoy se conoce como proporción directa; la cual es considerada como uno de los primeros pasos de la introducción de la idea de linealidad. “la noción de linealidad, surge incipientemente desde que se trabajan las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, usadas para resolver problemas cotidianos y contextuales (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008; p. 2); incluso mediante la aplicación a problemas prácticos de lo que se conoce como la regla de tres; de manera tal que, la proporcionalidad tiene un sentido práctico que se revela en la solución de problemas cotidianos y contextualizados.

Claramente, en este período, tales culturas no concibieron el concepto de función tal y como lo percibimos actualmente, ya que, entre otros elementos, carecían de simbología, incluso desconocían la idea de fórmulas; ya que, en general, trabajaron de manera empírica, y quizás apoyados en el ensayo, error y verificación.

De esta manera, no fueron capaces de establecer fórmulas o expresiones para sistematizar un procedimiento o desarrollar un algoritmo para sacar cuentas; lo que no le quita mérito a los importantes hallazgos y desarrollo matemático ubicado gracias a las tablillas y papiros descubiertos; y llevan consigo la idea de función; así como otros conceptos matemáticos.

Primeros vestigios de la noción función y linealidad en la edad antigua: Grecia

Por otro lado, entre los 600 A.C a 400 D.C, están los griegos; considerados como cuna de la civilización occidental y a quienes tradicionalmente se les ha atribuido iniciar el tratamiento sistemático de la matemática; ya que en esta época se pierde el protagonismo el empirismo de la matemática, y se da paso a un proceso reflexivo y más formal sobre el pensamiento matemático, fijando los cimientos del razonamiento lógico-deductiva característico de la matemática.

Es con los griegos, con quienes se percibe por primera vez, la noción de función entendida como una relación de dependencia entre cantidades. En palabras de Ugalde (2014), es gracias a Arquímedes y las leyes de la mecánica por él propuesta; en especial a su primera ley de la hidrostática, la cual refiere que, *cualquier cuerpo sólido que se encuentre sumergido total o parcialmente en un fluido será empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por el cuerpo sólido*; que se establece una relación de dependencia entre magnitudes (fuerza y volumen en este caso).

Del mismo modo, Arquímedes estableció en sus tratados del área de geometría, la relación entre el área y el volumen de una esfera y un cilindro circunscrito con la misma altura y diámetro; sosteniendo que la esfera tiene un área y un volumen equivalentes a dos tercios de los del cilindro; con lo cual se obtiene nuevamente una relación de dependencia entre cantidades.

En relación a la civilización griega y sus vínculos con el origen del concepto de función, también se puede hacer mención de la noción de *proporcionalidad* (Roldán, 2013). Por ejemplo, en los libros V y VI de los Elementos de Euclides se exponen las primeras ideas más o menos formales acerca de las proporciones, donde se establecen relaciones o dependencia entre variables o magnitudes. Sin embargo, señala este mismo autor que, en relación al poco avance en el desarrollo del concepto de función, "las dificultades evidenciadas durante este período radican básicamente en el tratamiento geométrico que tuvo la matemática y, la carencia de un lenguaje apropiado para expresar ideas desde el punto de vista aritmético" (p. 8).

En la cultura griega; se consolida la idead de proporcionalidad directa desde un punto de vista más matemático y menos pragmático, tal y como lo fue en las culturas anteriores; y así es como "la noción de linealidad aparece explícita o implícitamente, cuando Euclides hace mención de la recta en todos sus postulados. En su conocido libro, Los Elementos, escrito hacia el año 300 AC" (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008; p. 2). Agregan los autores, en relación a la construcción de la noción de linealidad, que

> En el primer postulado del primer libro, Sobre la esfera y el cilindro, Arquímedes, da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos. Por otra parte, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (p. 3)

Es decir, el volumen de la esfera es directamente proporcional al diámetro elevado al cubo; por lo que, el volumen tiene una dependencia lineal con el diámetro al cubo y una dependencia no lineal con el diámetro. Simbólicamente, $V = kd^3$. Es por ello que, "en la Grecia clásica, se presenta un enfoque de la proporcionalidad y de la idea naciente de linealidad, con características dirigidas a aspectos científicos relevantes de aquel momento histórico" (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008; p. 4).

También desde el punto de vista de la Trigonometría desarrollada por matemáticos griegos como Hiparco de Nicea y Tolomeo de Alejandría, entre otros; es posible identificar algunos elementos que podrían considerarse como incipientes ideas asociadas al concepto de función; como por ejemplo, a través de tablas en las que se relacionan arcos y cuerdas de ángulos centrales en una circunferencia; y a la aparición de las razones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos, dando paso nuevamente a la relación y dependencia entre dos magnitudes.

Entre los siglos VII y XIII, la civilización árabe hace presencia en la matemática, y ofrece algunas de las primeras evidencias de lo que hoy se denomina razones trigonométricas, cuyas tablas también son consideradas como precursoras del incipiente concepto de función en esa época. Al respecto, Ugalde (2014) hace mención a que

> Para el siglo X ya habían calculado tablas para las funciones trigonométricas –evidentemente, sin ser consideradas como las funciones de hoy en día–, incluidas la secante y la cosecante. Es importante entender que nuestra noción de función debía esperar otros 600 años, por lo que las obras matemáticas de la época no se parecen a la trigonometría elemental de nuestros días. (p. 8)

Agrega el autor que, otro avance en la noción del concepto de función que se le atribuye a los árabes, está reflejado en su tablilla más representativa, denominada *Tabit ibn Qurra*, datada alrededor del año 850, y donde se descubrió una fórmula general con la cual se podían hallar *números amigos*. Dos números enteros positivos x, y se dicen amigos si y solo si x es la suma de los divisores propios de y; mientras que a su vez, y es la suma de los divisores propios de a (la unidad se considera divisor propio). Se evidencia pues, la presencia de dos concepciones primitivas importantes del concepto de función, como lo son las tablas de valores y el uso de fórmulas.

La función y la linealidad en la edad media y el renacimiento. Avances desde una visión física

La edad media, periodo entre los siglos V y el XV, estuvo caracterizada por un oscurantismo y una carga de ignorancia promovida desde el fanatismo, donde fue atacado tanto lo científico, académico, y cultural; y el desarrollo de una disciplina como la matemática, no estuvo exenta de ello. Expresa Ugalde (2014) que:

> Es evidente que durante semejante época de oscurantismo científico y cultural, el concepto de función, aún como dependencia entre cantidades, no tuvo ninguna o muy poca oportunidad de desarrollo. Dicho desarrollo debe esperar hasta el Renacimiento, donde el concepto de dependencia entre cantidades recobra el impulso que inicialmente le diera Arquímedes (p. 9).

Sin embargo, resaltan los aportes realizados por Nicholas Oresme (1323-1382), alrededor de 1361, quien trazó una versión arcaica de representación gráfica para modelar algunos fenómenos naturales, en especial, el desplazamiento de un objeto móvil en el tiempo; lo que Boyer (1999) califica como “una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones” (p. 339).

Para ello, empleó segmentos verticales de diferentes longitudes, para representar diferentes variaciones de un mismo objeto siendo observado, los cuales estaban apoyados sobre un segmento horizontal, con la idea de establecer, de ser posible, alguna figura geométrica.

Su pensar era que las propiedades de tal figura, constituían, a su vez, propiedades de la magnitud, cualidad o variable que estaba siendo observada y estudiada. En el gráfico 2 se pueden apreciar algunos modelos gráficos plasmados por Oresme

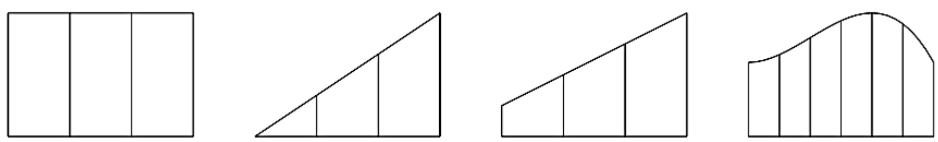


***Gráfico 2*. Representaciones geométricas usadas por Oresme en la descripción de fenómenos físicos. Precursoras de las gráficas de funciones.**

En estos esquemas gráficos planteados por Oresme y que se podrían considerar como precursores de las representaciones en el plano cartesiano, el segmento horizontal representa el tiempo, y los segmentos verticales representan diferentes velocidades.

La primera a la izquierda es la gráfica de un objeto en movimiento, velocidad constante; la segunda y tercera son dos gráficas de un móvil con velocidades con aceleraciones constantes (en la primera de ellas con velocidad inicial cero, mientras que la segunda tiene una velocidad inicial dada). En la cuarta gráfica, se observa el movimiento de un móvil con una velocidad con aceleración variable.

En relación a la idea de linealidad, estas primeras representaciones gráficas geométricas sirvieron para estudiar la variación. Esta representación permitió estudiar el movimiento en términos geométricos. En particular, *Oresme trazó la gráfica de velocidad en función del tiempo para un móvil animado por una aceleración uniforme, gráfica que corresponde a una función lineal*. Por su parte, Vieta, quien es considerado el inventor del álgebra simbólica, aunque no hizo su aporte directo al concepto de función o la función lineal, su aporte es importante puesto que introduce la forma de representación simbólica que permitió empezar a representar funciones.

En este período de la edad media, durante los siglos XII y XIII, mucho del interés matemático se centra en el estudio del movimiento, la variación y el cambio (Roldán, 2013); con lo cual el cálculo empieza una época de esplendor y desarrollo acelerado; y con él, su concepto clave, el de función; empieza un camino más contundente y marcado en la evolución de la matemática.

Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Estas ideas se desarrollaron en torno de variables independientes y dependientes, pero sin definiciones específicas. Así, la evolución de la noción de *función* se dio asociada al estudio del cambio, en particular del movimiento. Una función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero aún no se usaban las fórmulas.

Con la llegada del renacimiento, entre los siglos XV y XVI, se vive una nueva etapa de esplendor y florecimiento para el mundo científico; y donde la matemática retoma su auge e impulso; obteniendo así un progreso notable. Ugalde (2014) hace mención de dos hechos fundamentales que influyen en el desarrollo particular del concepto de función. En primer lugar, el uso de símbolos para representar objetos matemáticos; y en segunda instancia, una nueva perspectiva al momento de estudiar y comprender la naturaleza, alejada del componente religioso-espiritual (que prevaleció hasta poco antes del siglo XV); y más enfocado en la experimentación y la física.

Concepción de la noción de función y la idea de linealidad en la edad moderna

Para esta etapa, en el siglo XVI, uno de los más importantes personajes, Galileo Galilei (1564-1642), estudia el movimiento y el cambio, y considera que el primero puede ser representado mediante curvas que trazan la trayectoria de un móvil; y para ello realiza experimentos, observaciones y mediciones. Este nuevo tratamiento – más físico que otra cosa, ya que se basa en la cinemática- permite expresar las relaciones encontradas entre las mediciones a través de fórmulas y expresiones algebraicas. Roldán (2013) afirma que, Galileo introdujo lo numérico en las representaciones gráficas de Oresme y expresó las leyes del movimiento en términos de proporcionalidad directa e indirecta.

Entre los siglos XVII y XVIII se da un acelerado crecimiento y desarrollo de la matemática, y particularmente en el caso del concepto de función, se dan pasos sólidos para su formalización a partir de los trabajos de personajes destacados como lo fueron Descartes, Fermat, Newton y Leibniz, publicados a partir del año 1600.

Uno de los más grandes matemáticos de la época, como lo era Newton, señala que la trayectoria de un móvil producía una curva; este movimiento se daba por la composición de dos movimientos uno horizontal y otro vertical; así cada posición del punto estaba determinada por un par de coordenadas. Además, se consideraba que tal posición variaba de manera implícita en función del tiempo.

La introducción de sistemas coordenados, el uso de ecuaciones para representar ciertas curvas, y el manejo de fórmulas para relacionar ciertas cantidades; fueron factores que mucho abonaron al terreno de la construcción de una definición matemática rigurosa de función.

Por su puesto que, la geometría analítica – y su desarrollo gracias a Descartes y Fermat- constituye un hito importante en el desarrollo de la matemática moderna; y esto tiene su impacto en el desarrollo del concepto de función. En el desarrollo del concepto de función, la geometría analítica es fundamental dado que en ella se integran lo que para ese momento serían los tres modelos de representación de una función: su forma tabular, su gráfica y la su expresión algebraica. Afirma Roldán (2013) que

> aparece por primera vez el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra. (p.15)

Hasta este momento, no hay presencia explícita de alguna función en particular; de hecho, todavía, se puede afirmar que se estaba en una etapa pre-función. Sin embargo, esto cambia radicalmente gracias a que Descartes introdujo un sistema de coordenadas que consiste en fijar la posición de un punto en el plano por medio de dos coordenadas, que corresponden a la distancia a dos líneas perpendiculares entre sí. Estos aportes, que relacionan la geometría con el álgebra, influyeron notablemente en el trabajo matemático de ahí en adelante prevaleciendo el pensamiento funcional.

Por su parte, Leibniz acuña el término de función que utilizamos en la actualidad (Roldán, 2013); y además mucha de su terminología es aún empleada, y expresiones como constante, variable, coordenadas y parámetro son utilizadas hasta el momento. Desde la perspectiva de Leibniz, una variable ya no se asocia únicamente al movimiento o al plano físico, sino que se asocia a cualquier conjunto numérico o no.

Para Ugalde (2014), varios son los hechos claves que formaron parte de la evolución del concepto de función en esta época, y que son mencionados a continuación:

- La palabra función aparece por primera vez en un manuscrito de Leibniz de 1673, denominado *Método de la inversa de las tangentes, o de las funciones*. En 1698 Leibniz escribe una carta a Johann Bernoulli donde le menciona su agrado por utilizar esta expresión.
- La primera definición de función aparece en 1699 en un artículo de Johann Bernoulli publicado en *Acta Eroditorum*: "*Aquí denotamos por función de una variable, una cantidad compuesta, de una o varias maneras, de esta cantidad variable y constantes"* (p. 13). Bernoulli señala que, para indicar una función

de alguna indeterminada, por ejemplo, la indeterminada x, utiliza la correspondiente letra mayúscula X o la letra griega ξx, de manera que se pueda ver al mismo tiempo de que cantidad indeterminada depende la función. A partir de este momento, "la idea intuitivamente geométrica de función utilizada por Leibniz, adquiere un carácter más abstracto, al atribuírsele por primera vez, un sentido analítico" (p. 13).

- Tanto Roldán (2013); Ugalde (2014), como Sánchez y Valdés (2007), coinciden en algunas definiciones de función dadas por matemáticos notables de la época. Por ejemplo, *Jean Bernoulli* en 1718 menciona que *una función arbitraria de x es una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x y de constantes.*
- En 1737, Clairaut recurrir a la idea de función descrita por Bernoulli, y para denotarlas utiliza simbología como π_x y σ_x.
- No es sino hasta 1740, con Euler, que se introduce por primera vez el símbolo f(x), empleada para representar la imagen de una función, utilizado en su artículo llamado *Additamentun*. posteriormente, en 1748, en su obra *Introductio in Analysis Infinitorum*, Euler se enuncia el concepto de función como "*toda relación entre x y y tal como se representa en el plano mediante una curva trazada a mano libre"* (p. 13). Para el año 1755, Euler publica *Instituciones Calculi Diferencials*, y hace nueva mención del concepto de función, refiriéndose a éste como "*una expresión algebraica que puede ser anotada por una sola fórmula analítica tal como un polinomio, un seno, un coseno, un logaritmo o aún una integral de cualquiera de estas expresiones"*. (Roldán, 2013; p. 14).

De esta manera, Euler define inicialmente una función de una cantidad variable como una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes. Sin embargo, posterior a ella, decide seguir otro rumbo en la conceptualización, porque "desaparece la idea de expresión analítica y, aparece la idea general de correspondencia entre variables como elementos pertenecientes a conjuntos" (Roldán, 2013; p. 21).

Así mismo, Euler asoma la idea de correspondencia entre una expresión algebraica y curvas en el plano cartesiano, a través de la cual se consolida la percepción que se tenía de que a cada función se le puede trazar una curva que le corresponde.

- Por su parte, Joseph Louis Lagrange, en 1787, refiere que una función de una o varias cantidades a *toda "expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles"* (Ugalde, 2014; p.14).

  Lagrange, basado en las ideas matemática asociadas a un fenómeno físico de la vibración de una cuerda, como las series infinitas, series trigonométricas, y la noción de función como expresión analítica; impulsa una nueva definición; en la que se denomina función a toda expresión matemática de una o varias cantidades en la cual estas aparecen de cualquier manera, relacionadas o no con algunas otras cantidades que son consideradas como constantes, mientras las cantidades de la función pueden tomar todos los valores posibles.

- Entre los años 1750 y 1801, el concepto de función, promovido por Euler y sus pares de la época, ocasionó cierta polémica entre los matemáticos europeos, en cuanto a si una función se podría expresar o no mediante una única expresión. Jean Fourier cierra esta diatriba al establecer que una sí es posible representar una función con múltiples expresiones o fórmulas; y que "lo más importante es cómo se expresan los valores que toma la función, y que si dichos valores se pueden expresar de una o de varias maneras no era lo esencial" (Ugalde, 2013; p. 14).

  Es decir, Joseph Fourier, en el estudio de otro problema de origen físico, como la era la propagación del calor en una lámina; plantea como solución el desarrollo de una función como serie trigonométrica. Asegura Fouier que, de forma general, la función f(x) representa una sucesión de valores dados para

> las abscisas x, en las que no se asume que las ordenadas estén necesariamente sujetas a una ley común.

Respecto al estudio de las funciones desde una óptica más física, Sánchez y Valdés (2007) aseveran que

> Es interesante notar que fueron los problemas de la física relacionados con la propagación del sonido, del calor y, en general, con los fenómenos susceptibles de una modelación como movimiento ondulatorio, los que estimularon la precisión en las principales nociones relacionadas con la representación de las funciones (p. 133).

En relación con la idea de linealidad, en esta etapa, desarrollada principalmente en el siglo XVII, está fuertemente motivada por los trabajos de Fermat y Descartes. "El siglo XVII es el periodo donde se inicia la distinción conceptual entre la proporcionalidad directa y la línea recta, lo que se entrevé de los trabajos de Fermat y Descartes" (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008; p. 1). Ambos, de modo independiente, dan a la recta que pasa por el origen, la forma $b\,x = a\,y$; además de considerar a la expresión $a\,x + b\,y = c$ como la ecuación general de la recta. Esto, sustentados en los trabajos del griego Apolonio de Pérgamo, sobre las cónicas. Señalan los autores antes citados que,

> A diferencia de los dos primeros escenarios, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales (x,y) a un lugar geométrico (en términos modernos, f(x,y)=0) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico. (p. 4)

Consolidación de las primeras definiciones de función y linealidad en la edad contemporánea

Es en la primera mitad del siglo XIX, cuando renombrados matemáticos de la época como Cauchy, Dirichlet, Lobachevsky, y Riemann, contribuyen a la consolidación de una teoría de funciones, camino iniciado por Joseph Lagrange en 1797, cuyo terreno ya había sido abonado por Euler y otros matemáticos destacados.

Entonces a partir de este momento, se comienzan a dar definiciones cada vez más rigurosas y formales que la aportada por Euler. Por ejemplo, en su Curso de Análisis Algebraico de 1827, Cauchy plantea que:

> Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (Ugalde, 2014; p. 15)

Mientras que, Lobachevsky, en 1834, indica que se llama función de *x* a *"un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida"*. (Ugalde, 2014; p. 15).

Resalta de la definición propuesta por Lobachevsky, que se introduce implícitamente la idea de dominio de una función, del cual no se hacía referencia. También es significativo que, con esta conceptualización, se deslinda de la necesidad de conocer explícitamente, mediante una fórmula analítica, la forma de la función en la cual se hace la asignación de los valores.

La aparición de la idea de continuidad, también propulsó nuevas definiciones, que todavía tenían vacíos o al menos no eran del todo completas en los estudios matemáticos de la época. Por su parte, Gustav Dirichlet, en 1837, la define de la siguiente manera:

> Designemos por *a* y *b* dos valores fijos y por *x* una magnitud variable, situada entre *a* y *b*. Si a todo *x* corresponde un valor finito $y=f(x)$ que varía de manera continua cuando x varía también de manera continua de *a* a *b*, diremos que y es una función continua para este intervalo. Aquí no es en absoluto necesario que y se exprese en función de *x* según una misma ley sobre todo el intervalo; no es necesario incluso que se posea una expresión algebraica explicita entre *x* e *y* (Roldán, 2013; p. 25)

Por su parte, Ugalde (2014) también reporta una definición similar, acuñada a Dirichlet:

> Una cantidad variable *y* se llama función de la cantidad variable *x* si a cada valor de *x* le corresponde un solo determinado valor de *y*…Si una variable *y* está relacionada con otra variable *x* de tal manera que siempre

> que se atribuya un valor numérico a *x* hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x*. (p.15)

Ambas definiciones, coinciden en esencia. Según Dirichlet, una función puede estar determinada únicamente mediante palabras, a través del lenguaje natural. Y aunque sea común definirlas mediante expresiones algebraicas o fórmulas matemáticas, esto no es necesario para que una función esté bien definida.

Para el año de 1858, Riemann declara que se dice que *y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y*. (Ugalde, 2014)

Ya con la aparición de la teoría de conjuntos de la mano de George Cantor, y entre finales del siglo XIX e inicios del siglo XX; la definición de función se asocia al de una relación entre conjuntos (en el sentido algebraico).

En esta etapa se alcanza el nivel máximo de abstracción, formalidad y rigurosidad en cuanto a la conceptualización de la idea matemática de función; al punto que se deslinda de cualquier fórmula o expresión simbólica (que habría tenido mucho auge con el desarrollo de la geometría analítica). A decir de Ugalde (2014):

> La percepción del concepto de función en el siglo XX se desliga ya del uso de variables numéricas, y alcanza los altos grados de generalidad con la que se le conoce hoy en día. Ya no es necesario que la variable independiente sea un número real o complejo, ni su valor debe de ser de tal naturaleza.(p.16).

De esta manera se da pie a un nuevo bloque de definiciones del concepto de función, más abstracto, formal y riguroso. En este sentido, Richard Dedekind, usando la expresión sistema para referirse a un conjunto, y el vocablo representación para referirse a una función, la define como

> una ley, de acuerdo a la cual a cada elemento determinado s del sistema se le asocia un determinado objeto que se denomina imagen de s y se denota por el símbolo φ(s); es posible decir que φ(s) corresponde al elemento s, o que φ(s) se obtiene de s por medio de la representación, o que s es transformado en φ(s) por la representación φ (Roldán, 2013; p. 27)

Para 1911, se le atribuye a Giuseppe Peano la definición de función basada en un producto cartesiano. Considera como un término no definido o primitivo, la idea de conjunto. Define producto cartesiano como $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$; para posteriormente enunciar la definición de relación como subconjunto del producto cartesiano R ⊂ X ×Y, dando paso al concepto de función como una relación especial en la cual si dos pares ordenados (x, y) y (x, z) con el mismo primer elemento están en relación funcional f, entonces necesariamente $y = z$.

Para 1939, el grupo francés conocido bajo el seudónimo de Nicolás Bourbaki, propone una nueva definición, en términos de conjuntos y productos cartesianos; la cual es la definición que suele indicarse en los tiempos actuales:

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función. (Roldán, 2013; p. 27).

Para Ugalde (2014), la definición formal de una función es la siguiente: Sean A y B conjuntos. Una función $f: A \rightarrow B$ de A en B es un subconjunto f de A × B tal que:

a) Para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a, b) en f; y

b) Si (a, b) y (a, b') son elementos de f, entonces $b = b'$.

Una crítica importante que se hace sobre este nivel de abstracción presente en este tipo de definición de función matemática, es esgrimida por Azcárate y Deulofeu (1990) cuando señalan que:

> Hay que resaltar que se trata de una última generalización del concepto, y que, como tal, pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función (p.16).

Frente a esta crítica, muchos fueron los libros de textos que trataron de establecer un balance entre lo intuitivo y lo abstracto, a la hora de conceptualizar la función matemática. Es así como el desarrollo del concepto formal de función converge con el nacimiento de la Geometría Analítica y el sistema de coordenadas cartesianas, propuesta por Descartes y Fermat, lo cual abonó el terreno para el desarrollo del cálculo diferencial e integral por parte de Newton y Leibniz, entre otros.

De esta forma, aparece el concepto función, que tiene en adelante un importante papel y formalismo y gracias a la noción de conjunto. Esta influencia se mantiene hasta los tiempos actuales a nivel educativo. Por ejemplo, la definición de función dada por Leithold (2004) la cual la establece como:

> Una *función* es un conjunto de pares ordenados de números *(x, y)* en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el primer número. El conjunto de todos los valores admisible de *x* se denomina *dominio* de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de *y* recibe el nombre de *contradominio* de la función.
>
> En esta de esta definición la restricción de que dos pares no pueden tener el mismo primer número asegura que *y* es único para cada valor especifico de *x*. Los símbolos *x* y *y* denotan variables. Debido a que el valor de *y* depende de la elección de *x*, *x* se denota a la variable independiente mientras que *y* representa a la variable dependiente. (p. 04)

Por otra parte la definición de función real de variable real expuesta por Larson, Hostetler y Edwards (2006) expone a continuación:

> Sean *X* y *Y* conjuntos de números reales. Una función real *f* de una variable real *x* de *X* a *Y* es una correspondencia que asigna a cada número *x* de *X* exactamente un numero de *y* de *Y*.
>
> El dominio de f es el conjunto de *X*. El número y es la imagen de *x* por *f* y se denota mediante *f(x)*, a lo cual se le llama valor de *f* en *x*. El recorrido o rango de *f* se define como sub conjuntos de *Y* formado por las imágenes de los números de *X*. (p. 19)

En el mismo orden de ideas, se tomará en consideración que la función real es aquella en la cual dados dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, una función *f* de *A* en *B* que se denota, $f\colon A \rightarrow B$ es una relación en la que todo elemento de *A* está relacionado por *f* con un único elemento de *B*. El conjunto *A* se llama dominio de *f* y el conjunto *B* rango de *f*. Usualmente al único elemento $y \in B$ relacionado con algún elemento $x \in A$se nota $f(x)$. De esta forma es habitual escribir $y=f(x)$ en lugar de $(x, y) \in f$. Esta también común mencionar que *y* es la imagen de *x*, o que *f (x)* es la imagen de *x*, o que el valor tomado por *f* en *x* es *f (x).*

En relación a la linealidad y su desarrollo en esta etapa, a partir del siglo XVIII es donde se da el inicio incipiente del Álgebra Lineal, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer. Pero es hasta mediados del siglo XIX con el surgimiento de conceptos que coincide con el desarrollo y fundamentación matemática del álgebra lineal, que se evidencia una nueva visión en cuanto a la linealidad. Para Acosta, Rondero y Tarasenko (2008)

> la forma en como se instala la noción de linealidad, desde la matemática elemental, no permite una adecuada articulación con conceptos que se tratan en la matemática avanzada, como es el caso del Álgebra Lineal, convirtiéndose este hecho en un obstáculo epistemológico para su aprendizaje. En tal caso, la didáctica referida a la noción de linealidad, debe atender el hacer explícita la articulación conceptual entre función lineal, operador lineal, transformación lineal, dependencia e independencia lineal y espacios vectoriales, entre otros. Es precisamente aquí donde el estudio epistemológico juega un papel relevante para la didáctica, pues de lo contrario el saber relacionado con la proporcionalidad y la linealidad, se presenta deshilvanado y con poco significado conceptual. (p. 6)

Aparición de la noción de función lineal y afín en las ciencias económicas.

Autores como Cámara (2000); refieren que, las teorías matemáticas que mayor aporte hicieron al desarrollo de las ciencias administrativas y económicas fueron el concepto de derivada, el cálculo integral y el álgebra lineal (específicamente, la teoría de matrices).

Por su parte, Rodríguez y Valdivé (2010) refieren que en torno a la matematización de la economía; primero, hasta el siglo XVII, el lenguaje utilizado giraba en torno a las nociones de oferta, demanda y punto de equilibrio; y prevalecía un manejo verbal del lenguaje; refiriéndose por ejemplo como “a una cantidad presentada a la venta o una disposición subjetiva a vender, un deseo de poseer un bien” (p. 75). Posteriormente, a partir de 1838, con Cournot, se establece un concepto de *riqueza*, que el mismo identifica con el término *Valores*

Intercambiables, y complementa este concepto con el de demanda, que para él es sinónimo de ventas (Valores intercambiables = Demanda = Ventas). De esta forma, enuncia la ley de la Demanda como una función que depende del precio. Posteriormente se define la función oferta y punto de equilibrio.

Para el siglo XVIII, conceptos como oferta y demanda no eran asumidos desde una visión matemática, sino desde una perspectiva natural y psicológica (biológica)

Para el siglo XIX, se comienza a utilizar el análisis matemático en el ámbito de la teoría económica de las riquezas, de la mano de Cournot en el año de 1838; y considera el proceso económico como una relación funcional (en sentido matemático); más allá de unas simples asociaciones numéricas.

En este sentido, se considera que Cournot es quien formula y construye por primera vez un modelo matemático que pretende explicar la ley de demanda cuando enuncia que "*La venta o la demanda anual D es, para cada mercancía, una función particular F(p) del precio p de la mercancía"* (Ávila, 2013; p. 10), es decir, $D = F(p)$. Además, agrega el autor, se trata de una función continua (al menos en la noción matemática intuitiva) si se considera un gran número de consumidores o compradores; donde las variaciones en la demanda serán sensiblemente proporcionales a las variaciones del precio; y se trata de una función decreciente debido a que, el consumo o demanda disminuye si aumenta el precio del producto (o la demanda crece cuando el precio desciende), por lo que $F'(p) < 0$. Se hace un inciso para mencionar que, en general, se utiliza la letra Q para representar la demanda de un producto.

Ecuación de la Demanda

Fernández (2017) sostiene que, en cualquier mercado, la cantidad de un bien, producto o servicio, que es comprado o demandado por determinada población, durante un cierto período de tiempo, depende de muchos factores entre los que cabe mencionar (a) el precio unitario del bien, (b) el precio de los sustitutos, (c) el ingreso de los consumidores, y (d) el número de consumidores, entre otros elementos.

Si bien es cierto que, cada uno de estos factores afecta en mayor o menor medida la cantidad demandada por los consumidores en el mercado; la hipótesis propuesta en este modelo es suponer que todos los factores, a excepción del precio, permanecen constantes, durante un periodo de tiempo dado. De este modo, la cantidad demandada es una función del precio, y por lo tanto, se puede encontrar una relación entre la cantidad demandada Q, y el precio unitario del bien P. A esta relación, entre el precio y la cantidad demandada o comprada, es lo que se denomina como ecuación de la Demanda. Fernández (2017) la define de la siguiente manera:

> Sea B un bien cualquiera y T un periodo de referencia, llamamos Ecuación de la Demanda del bien B, en el período T, a la ecuación que nos relaciona a la cantidad demandada de dicho bien Q, con su precio unitario P; en otras palabras, la ecuación de la demanda del bien B, en el periodo T, es toda ecuación de la forma: f(Q,P) = 0 (p. 23)

La ecuación de la demanda definida matemáticamente de esta manera, exige además que se consideren condiciones de no negatividad tanto a Q como a P, esto es, $Q \geq 0, P \geq 0$. La representación gráfica se denomina *curva de la demanda*, la cual se obtiene considerando Q (variable dependiente) en función de P (variable independiente). En los textos de Economía es usual representar dicha curva, utilizando el eje de las abscisas para la cantidad demandada Q, y el eje de las ordenadas para el precio P.

Vale la pena mencionar que, salvo circunstancias muy particulares, la función de la demanda es *decreciente,* ya que la tendencia en los consumidores es a comprar menos a medida que el precio aumenta. El caso más simple de función de la demanda bajo esta condición de ceteris paríbus, es aquella donde se tiene la expresión de primer grado de la forma: $aQ + bP + c = 0$, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). Si a su vez, consideramos las condiciones de no negatividad mencionada en párrafos precedentes, entonces, se puede ver que la curva de la demanda en este caso es un segmento de recta ubicado en el primer cuadrante, tal y como se aprecia en el gráfico 3

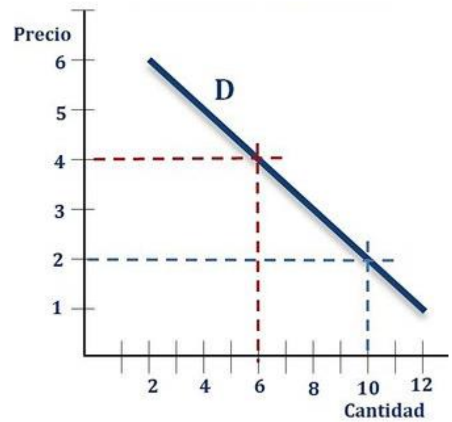


Gráfico 3. **Curva de Demanda representada por una función afín.**

Ecuación de la Oferta

Del mismo modo como la demanda se refiere a la cantidad de un bien o servicio que los consumidores están dispuestos a adquirir o comprar; la oferta se refiere a la cantidad de ese bien o servicio que los productores están dispuestos a colocar en el mercado para su venta.

Nuevamente, así como la demanda se ve afectada por distintos factores, con la oferta no pasa distinto. Por ejemplo, (a) los costos de producción, (b) el valor de la mano de obra, (c) el costo de la materia prima; (d) regulaciones y/o normativas legales, (e) infraestructura y equipamiento, (f) comportamiento de los consumidores, así como (g) situaciones económicas locales, regionales, nacionales o globales; son algunos factores que afectan la oferta.

Si se considera la condición *ceteris parîbus* aplicada en el caso del estudio de la demanda, es decir, su suponemos fijos o constantes todos estos factores mencionados en el párrafo anterior (o cualquier otros factores a considerar); a excepción del precio *P*; entonces se obtiene una relación entre la oferta *S* y el precio *P*; que da lugar a la ecuación de la oferta. Fernández (20017) la define como

> Sea B un bien cualquiera y T un periodo de referencia, llamamos Ecuación de la Oferta del bien B, en el periodo T, a la ecuación que nos relaciona a la cantidad ofrecida de dicho bien S, con su precio unitario

P; en otras palabras, la ecuación de la oferta del bien B, en el periodo T, es toda ecuación de la forma: f(S,P) = 0 (p. 30)

La ecuación de la oferta definida matemáticamente de esta forma, considera, al igual que su homóloga, la ecuación de demanda, condiciones de no negatividad tanto a *S* como a *P*, esto es, $S \geq 0$, $P \geq 0$. Su representación gráfica se denomina *curva de la oferta*, la cual se obtiene considerando *S* (variable dependiente) en función de *P* (variable independiente). En los textos de Economía es usual representar dicha curva, utilizando el eje de las abscisas para la cantidad ofertada *S*, y el eje de las ordenadas para el precio *P*.

Ahora bien, En contraposición a la curva de la demanda, la función de la oferta es *creciente* ya que la tendencia en los productores es a ofrecer más cantidad de bienes a medida que el precio del bien sea mayor. El estado más simple de ecuación de la oferta bajo la condición de *ceteris parîbus*, es aquella donde se tiene la expresión de primer grado de la forma: $aS + bP + c = 0$, siendo *a*, *b*, y *c* números reales cualesquiera (con *a* y *b* un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). Si a su vez, consideramos las condiciones de no negatividad mencionada en párrafos precedentes, entonces, se puede ver que la curva de la demanda en este caso es también, un segmento de recta ubicado en el primer cuadrante, tal y como se presenta en el gráfico 4

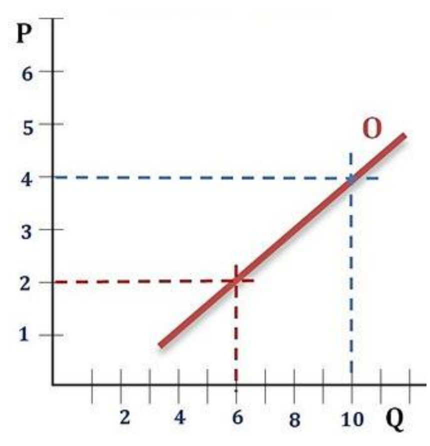


***Gráfico 4*. Curva de Oferta representada por una función afín.**

De esta idea de la matematización de la demanda y la oferta, surgen otros constructos económicos. Por ejemplo, la noción de costos, ingresos y beneficios.

Todos son considerados por Cournot como funciones que dependen del precio. Por ejemplo, en el caos de los ingresos, que no son más que las ventas multiplicadas por el precio de la mercancía, pero esto no es más que el producto de la demanda por el precio, nótese inclusive, la relación de proporcionalidad entre ingreso y precio, en función de la demanda, que simbólicamente se representa por la expresión $I = Q.p = p\,f(p)$. Pero veamos un poco más en detalle.

Función costo, ingreso y beneficio.

Dos de las funciones fundamentales que toda organización de producción cumplen son, por un lado, la elaboración de bienes o servicios para su consiguiente comercialización y venta; y por otro, adquirir insumos, contratar mano de obra o invertir en infraestructura para la producción de tales bienes.

En consecuencia, una de las más importantes decisiones que debe tomar cualquier empresario, está relacionada con la cuestión de ¿qué cantidad debo producir, a qué costo, y con cuanta utilidad o beneficio? Tal y como lo sostiene Fernández (2017), eso "depende del precio de venta y del costo de producción; esta decisión es guiada por el deseo de maximizar el beneficio, definido corno la diferencia entre el ingreso y el costo total" (p. 48). Entonces, tenemos la fórmula $B = I - C$, donde *B* representa los beneficios, *I* los ingresos y *C* los costos totales de producción.

En relación a los costos; estos suelen clasificarse en dos tipos. Los costos fijos (*CF*), que son aquellos que no dependen directamente de las cantidades producidas tales como el mantenimiento de maquinaria; el alquiler de un galpón, pago de personal administrativo, o la adquisición de equipos; y los costos variables (*CV*), los cuales sí están relacionados de manera directa con la cantidad de bienes producidos, tales como el costo de la materia prima, transporte, o pago de mano de obra. Estos gastos aumentan o disminuyen en función del aumento o disminución de la producción.

Por lo tanto, se puede establecer la relación $C = CF + CV$. En todo caso, se aprecia que existe una dependencia de origen funcional – matemáticamente hablando – entre el costo *C* y la demanda *Q*. Dicha relación función se denomina función costo. Fernández (2017) la define de la siguiente manera: “Llamamos función de costo de un bien *B*, en el período *T*, a la función que nos muestra para cada nivel de producción Q, el costo total asociado *C*. Es decir a la función: $C = f(Q)$ con $Q \geq 0$, $C \geq 0$” (p. 49)

A la representación gráfica de la función de costo, se le denomina como *curva de Costo.* Y al igual que en el caso de la ecuación de demanda u oferta, es común considerar que la curva de costos sea una recta (o un segmento de recta contenido en ella), por lo que su expresión analítica sería $C = a + bQ$; con a, b números reales cualesquiera no nulos simultáneamente.

En este caso, un estudio particular de los valores de a y *b*, lleva a considerar que el valor de a representa los costos fijos, basta con considerar en este caso, $Q=0$, para obtener $C=a$. Siendo el costo variable bQ. El valor de *b,* que matemáticamente es la pendiente de la recta, “representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien… a este valor lo llamamos *costo marginal* del bien y lo denotamos por CMa” (p. 49). En otras palabras, el incremento en el costo de producción cuando se pasa de elaborar *Q* unidades de un bien a $Q+1$ unidades, es lo que se denomina costo marginal. En el gráfico 5 se pueden apreciar las curvas de costos (totales, fijos y variables).

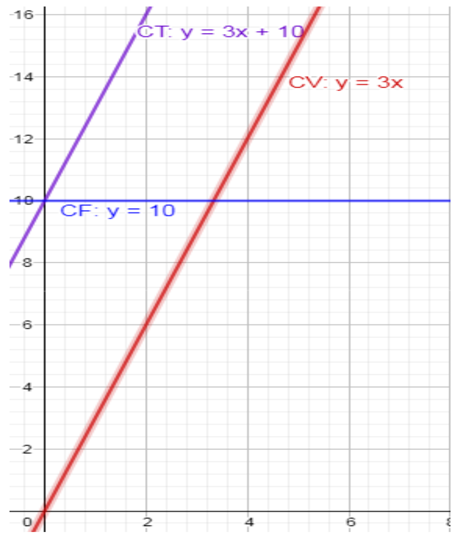


***Gráfico 5*. Curva de costos totales, fijos y variables, representados por función afín**

Por otro lado, se supone que cualquier empresa que produzca un bien o servicio, lo hace con el propósito de obtener algún tipo de beneficio –usualmente monetario-, producto de la venta de dicho producto. Así, el ingreso I, es el dinero total proveniente de la producción de Q unidades de un bien, cuyo precio unitario en el mercado es P; por lo que se tiene que $I = PQ$. Fernández (2017) sostiene que “en la mayoría de los casos P y Q están a su vez relacionados y en consecuencia, el ingreso puede ser expresado solamente en términos de Q o en términos de P” (p. 50); por lo que define la función ingreso de un bien, en el período T, “a la función que nos muestra para cada nivel de producción Q, el ingreso proveniente de la venta, I. Es decir a la función: $I = f(Q)$, con $I \geq 0$, $Q \geq 0$” (p. 51). Su representación gráfica se denomina curva de ingresos.

Ahora bien, ya se ha mencionado que toda empresa desea obtener – y maximizar – sus beneficios. Tomando en consideración que los beneficios corresponden a los ingresos menos los costos, $B = I - C$, y que tanto I como C están directamente relacionados con la producción Q; pues de igual manera lo está B; por lo que podemos hablar de la función de beneficio. A decir de Fernández (2017), “llamamos Función de Beneficio de un bien en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción Q, el beneficio obtenido B. Es decir a la función: $B = f(Q)$ con $Q \geq 0$" (p. 51).

Tanto en el caso de la función ingreso, como en la de la función de beneficio; es usual manejar modelos iniciales donde su representación gráfica sean rectas; es decir, correspondan a funciones afines (o lineales).

Punto de Equilibrio

Para 1841, se introduce la concepción matemática del punto de equilibrio de la mano de Rau Heinrich Karl (Vásquez, 2002). Para Karl, la influencia de las variaciones tanto de oferta como de demanda sobre el precio de un producto, depende de la pendiente de las curvas de ambos conceptos. Lo anterior tiene validez siempre y cuando se mantengan constantes todas las variables de la situación en estudio (*ceteris paribus)*, es decir, varía el precio, y permanecen constantes la necesidad de la mercancía (demanda) y la renta del consumidor (oferta).

Aunque Rau empieza el estudio de la economía a través del uso de fórmulas matemáticas, en el año 1820; es después de poco más de veinte años, para 1841 que realiza su principal aporte matemático a esta disciplina, por medio del análisis gráficos y el punto de equilibro. Vásquez (2002) refiere que en comunicación epistolar de Karl Rau al científico y estadístico Quételet, le devela una aplicación de las funciones cónicas al estudio de un problema de localización de mercados. En su obra de 1841, publicada por Quételet; Rau menciona en torno a la relación de oferta y demanda, que "*la manera en que la concurrencia regula el precio de las mercancías ha sido expresada por varios economistas mediante fórmulas algebraicas, pero se llega quizá a explicaciones más claras haciendo uso de construcciones geométricas*"; y estos son los cimientos del concepto de punto de equilibrio [cursiva añadida] (Vásquez, 2002; p.116).

Partiendo del postulado económico que afirma que el precio de un bien o servicio está determinado por el balance entre la demanda y la oferta, surge el concepto de punto de equilibrio. Para explicar la idea de punto de equilibrio en economía, partimos de la idea de la existencia de un precio *Pe* en donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales; y considera que, si *Pt* es un precio inferior a *Pe*, la cantidad demandada *Qe* supera a la cantidad ofrecida *St*, generándose una situación de escasez en el mercado.

Bajo estas condiciones, y dada la oferta limitada del bien o servicio, se tenderán a invertir mayor cantidad de dinero para la adquisición del producto. Entonces, es aquí donde ambas fuerzas – oferta y demanda – empiezan una lucha o influencia mutua; ya que el alza de precios lleva a la empresa a querer vender más, pero a los compradores a consumir menos; y sólo cuando oferta y demanda sean igualadas, se habrá alcanzado el punto de equilibro.

Ahora, si se considera un precio *Ph* mayor a *Pe*, entonces, en este caso, se creará lo que denominan los economistas como *excedente*, es decir, hay más productos de los que el mercado consumidor puede adquirir.

En este caso, los productores tendrán, por ejemplo, dificultades para la venta de los bienes generados; y en consecuencia, se acumulará el inventario y los costos que él ocasiona. Dicha situación, además, implica una disminución en la producción del producto, y a una posible reducción en los precios, con el fin de estimular y atraer a los consumidores y compradores. Esto hará que nuevamente se incentive la demanda; y el precio dejará de bajar hasta que se equilibren estas fuerzas, la cantidad demandada sea la misma que la ofertada, alcanzándose así el punto de equilibrio. En el gráfico 6

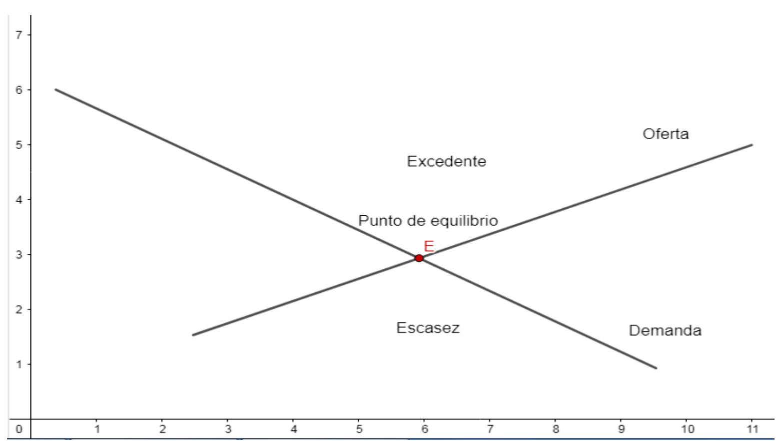


***Gráfico 6*. Punto de equilibrio, escasez y excedente.**

En palabras de Fernández (2017), para definir matemáticamente el concepto de punto de equilibrio, el autor establece que "Sea B un bien cualquiera y T un período de referencia, llamamos Punto de Equilibrio del bien B, en el periodo T, al punto en donde se igualan la cantidad ofrecida, S y la cantidad demandada, Q" (p. 37). Además, desde el punto de vista estrictamente matemático, y considerando que las curvas de oferta y demanda son segmentos de rectas; entonces el punto de equilibrio sería el punto de intersección de ambos, entendiendo que de existir tal punto, éste es único.

Fernández (2017) señala que, para el año de 1870, Fleming Jenkin publica en su obra *Representación gráficas de las leyes de oferta y demanda, aplicaciones al trabajo*; curvas de oferta y demanda, considerándolas de manera explícita como funciones (en el sentido matemático), representando en un sólo gráfico, un sistema de dos ecuaciones (oferta y demanda) con dos incógnitas (precio y cantidad). Así mismo, se expresa algebraicamente en esta obra, la demanda como $D = f(1/p)$, donde p es la variable precio.

El sistema de ecuaciones proviene de los argumentos siguientes relatados por Fleming Jenking: La dependencia de la demanda del precio puede ser válido en cualquier día en el mercado. Así mismo, la oferta también puede considerarse a su vez, como una función $\mathrm{S} = \mathrm{f(p)}$ (dependiente del precio). De esta manera, el precio x puede establecerse siempre que las cantidades demandadas y ofertadas varíen según un precio fijo. Adicionalmente, presenta en un mismo gráfico, tanto las curvas de demanda y oferta, como los excedentes del consumidor y del productor, considerando las áreas situadas respectivamente entre la línea del precio y el equilibrio.

Según lo expresa Zarategui (2002), en 1874, Walras define y expresa matemáticamente (de forma simbólica y gráfica), la curva de la demanda, sustentándose en los aportes de Cournot, pero con un enfoque diferente. En este caso, la función de la demanda según Walras, es el producto de un programa de maximización de la utilidad en el que precios y rentas son los parámetros. Matemáticamente: $Xi = D(p, m)$ donde $p = (p1, \ldots..pn)$, la cual es homogénea de grado cero en p y x, convexa y cumple con la ley de Walras $p^*. x=w$ para cualquier w.

La concepción matemática de estas nociones económicas (oferta y demanda; así como punto de equilibrio, entre otras ideas) se remonta a la teoría del economista escocés Adam Smith (fundador de la economía clásica) en el año de 1976, en su obra intitulada *investigación sobre la naturaleza y causa de las riquezas de las naciones*; y reforzada posteriormente por el pensamiento neo-clásico promovido por matemático y economista Alfred Marshall en 1890.

Para Rodríguez y Valdivé (2010), un hito importante en la aparición de la función matemática en las ciencias económicas, se da en el año 1890, cuando Marshall, considerado fundador la teoría de la demanda, presenta su obra *Principios de Economía*. En ella, define conceptos como mercado, y establece vínculos entre demanda, oferta y punto de equilibrio. Sin embargo, esto lo hizo evitando a toda costa, el manejo matemático, el cual consideraba como un obstáculo para el estudio de la Economía desde el punto de vista social. A pesar de ello, sí incorporó todos sus análisis y razonamientos matemáticos, los cuales fueron expuestos a modo de apéndice o anexo al final de su libro.

Según la concepción económica de la demanda de Marshall, la función de demanda estudia la relación entre el precio y la cantidad u oferta, suponiendo constante a todos lo demás factores. Rodríguez y Valdivé (2011), establece que la teoría presentada por Marshall en 1890, titulada "Principios de Economía", muestra la relevancia y adaptación de la función lineal en el campo económico por representar las relaciones en el mercado con la oferta y la demanda, todos estos análisis matemáticos los expones en un apéndice matemático al final de esta obra, donde expone la forma Marshalliana, estudiando la relación entre el precio y cantidad, suponiendo todo lo demás constante, plantando la forma simbólica, esto sería: $X=L(p_1, p_2, \ldots., p_i , \ldots p, r, g, o)$, p_i = precio de otros bienes (i:1,2…), r= renta; g= gustos; o=otros.

Con lo anterior, se da por concluida la revisión histórica del concepto de función afín en contexto de las ciencias económicas. Siguiendo lo establecido en el círculo hermenéutico de Gadamer, y tomando en consideración las técnicas de recolección y análisis de la información, y para dar cumplimiento al primer objetivo de la investigación, se presenta a continuación, en el cuadro 4, el desarrollo histórico-epistemológico de la función afín, en ciencias económicas.

Cuadro 4.

Desarrollo histórico-epistemológico de la función afín, en ciencias económicas

<table>
<tr><th colspan="2">Período I: Civilizaciones Antiguas (babilónica, egipcia y griega)</th></tr>
<tr><th>Desarrollo histórico-evolutivo</th><th>Postura epistemológica (Hermenéusis)</th></tr>
<tr><td>2000 A.C–500 A.C Antigua babilonia y civilización egipcia
• Los babilonios, al igual que los egipcios, se considera que poseían una cierta intuición primitiva del concepto de función. No existía una idea abstracta de variable. Las cantidades se describían verbalmente o por medio de dibujos. No fueron capaces de establecer fórmulas o expresiones para sistematizar un procedimiento o desarrollar un algoritmo para sacar cuentas
• Se percibe la idea de dependencia entre cantidades; vista como la forma más rudimentaria del concepto de función
• El conteo implica una correspondencia entre un conjunto dado de objetos, así que se puede considerar como noción predecesora del concepto de función
• Presencia de tablas numéricas antiguas (en formato de doble columna) como ideas precursoras de las relaciones funcionales, ya que expresaban dependencia o relación entre dos o más magnitudes.
• Evidencias de la noción de proporcionalidad, que constituyen el soporte epistemológico más antiguo de la idea de linealidad. Por ejemplo, el cobro de impuestos se hacía considerando lo que hoy se conoce como proporción directa
• La proporcionalidad tiene un sentido práctico que se revela en la solución de problemas cotidianos y contextualizados.</td><td>Etapa pre-función.
Basada en la observación y tabulación primitiva de algunos fenómenos o cuentas. La matemática era para resolver problemas cotidianos y contextuales.

Se carecía de simbología, incluso desconocían la idea de fórmulas; ya que, en general, trabajaron de manera empírica, y quizás apoyados en el ensayo, error y verificación.

No fueron capaces de establecer fórmulas o expresiones para sistematizar un procedimiento o desarrollar un algoritmo para sacar cuentas</td></tr>
<tr><td>600 A.C a 400 D.C. Civilización Griega
• Se afianza la idea de relación de dependencia entre cantidades. Arquímedes plantea su ley hidrostática en la que se establece la dependencia entre fuerza y volumen. También en Geometría, planeta la relación de dependencia entre el área y el volumen de una esfera y un cilindro circunscrito con la misma altura y diámetro
• En los libros V y VI de los Elementos de Euclides se exponen las primeras ideas más o menos formales acerca de las proporciones, donde se establecen relaciones o dependencia entre variables o magnitudes
• Se consolida la idead de proporcionalidad directa desde un punto de vista más matemático y menos pragmático, y la noción de linealidad se hace presente cuando Euclides hace mención de la recta en todos sus postulados.
• Gracias a la Trigonometría desarrollada por Hiparco de Nicea y</td><td>En el caso de la civilización griega, las dificultades evidenciadas durante este período radican básicamente en el tratamiento geométrico que tuvo la matemática y, la carencia de un lenguaje apropiado para expresar ideas desde el punto de vista aritmético.

Se aprecian ciertas relaciones implícitas de dependencia entre dos magnitudes; las cuales se plasmaban en forma de tablas numéricas.</td></tr>
</table>

Tolomeo de Alejandría, se identifican algunos elementos incipientes asociados al concepto de función (tablas de las razones trigonométricas, relaciones entre cuerdas y ángulos, centrales de una circunferencia); dando paso nuevamente a la relación y dependencia entre dos magnitudes. **Siglos VII y XIII Civilización árabe.** • Ofrece algunas de las primeras evidencias de lo que hoy se denomina razones trigonométricas, cuyas tablas también son consideradas como precursoras del incipiente concepto de función en esa época • En la Tablilla *Tabit ibn Qurra*, datada alrededor del año 850, se descubrió una fórmula general con la cual se podían hallar *números amigos*	
Período II: Edad media y el renacimiento	
Desarrollo histórico-evolutivo	***Postura epistemológica (Hermenéusis)***
Siglos V – XV. Edad Media • Época de oscurantismo y una carga de ignorancia promovida desde el fanatismo, donde fue atacado tanto lo científico, académico, y cultural que frenó el desarrollo matemático • Aportes realizados por Nicholas Oresme (1323-1382), alrededor de 1361, quien trazó una versión arcaica y primitiva de representación gráfica de función, al modelar algunos fenómenos físicos, como el desplazamiento de un objeto móvil en el tiempo. • Oresme trazó la gráfica de velocidad en función del tiempo para un móvil animado por una aceleración uniforme, que parte del reposo, gráfica que corresponde a una función lineal. • En relación a la idea de linealidad, estas primeras representaciones gráficas geométricas proporcionadas por Oresme, sirvieron para estudiar la variación. Esta representación permitió estudiar el movimiento en términos geométricos. Se pasa a una revisión matemática de la variación de magnitudes • Vieta, introduce los primeros intentos de representación simbólica que serían empleados para denotar funciones de forma algebraica. • Durante los siglos XII y XIII, mucho del interés matemático se centra en el estudio del movimiento, la variación y el cambio. Se estudiaron fenómenos físicos como el calor, la luz, el color, la densidad, la distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. **Siglos XV y XVI. Renacimiento** • Florecimiento y expansión del pensamiento matemático. • Destacan el uso de símbolos para representar objetos matemático • Nueva perspectiva al momento de estudiar y comprender la naturaleza, alejada del componente religioso-espiritual (que prevaleció hasta poco antes del siglo XV); y más enfocado en la experimentación y la física.	**Función como estudio de la variación y cambio; asociada a fenómenos físicos** Con el estudio de los fenómenos físicos, se desarrollaron las ideas variables independientes y dependientes, pero sin definiciones específicas. La evolución de la noción de función se dio asociada al estudio del cambio de magnitudes físicas, en particular del movimiento. Una función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o quizás mediante un esquema gráfico o pictórico, pero aún no se usaban las fórmulas. Se estudia el cambio y la variación como fenómeno, pero se hace énfasis en lo que cambia, más no en cómo cambia.
Período III: Edad Moderna	
Desarrollo histórico-evolutivo	***Postura epistemológica (Hermenéusis)***
Siglo XVI • Galileo Galilei (1564-1642), estudia el movimiento y el cambio.	**Función como curva y expresión algebraica.** Algebraización de la

Este nuevo tratamiento, más físico, permite expresar las relaciones encontradas entre las mediciones a través de fórmulas y expresiones algebraicas. • Galileo introdujo lo numérico en las representaciones gráficas de Oresme y expresó las leyes del movimiento en términos de proporcionalidad directa e indirecta. • Visión de la función lineal desde la noción de proporcionalidad **Siglos XVII y XVIII** • Se dan pasos sólidos para la formalización del concepto de función, a partir de los trabajos de Descartes, Fermat, Newton y Leibniz • Newton, señala que la trayectoria de un móvil producía una curva; este movimiento se daba por la composición de dos movimientos uno horizontal y otro vertical; así cada posición del punto estaba determinada por un par de coordenadas. Además, se consideraba que tal posición variaba de manera implícita en función del tiempo. • La geometría analítica – y su desarrollo gracias a Descartes y Fermat- constituye un hito importante en el desarrollo del concepto de función, dado que integra lo que serían tres modelos de representación de una función: su forma tabular, su gráfica y la su expresión algebraica. • Hasta este momento, no hay presencia explícita de alguna función en particular. de hecho. Todavía se puede afirmar que se estaba en una etapa pre-función. Sin embargo, esto cambia radicalmente gracias a la aparición del sistema de coordenadas • Leibniz, en 1673, acuña el término de función que utilizamos en la actualidad, y mucha de su terminología es aún empleada, (constante, variable, coordenadas y parámetro; por ejemplo). Desde la perspectiva de Leibniz, una variable ya no se asocia únicamente al movimiento o al plano físico, sino que se asocia a cualquier conjunto numérico o no. • La primera definición de función aparece en 1699 en un artículo de Johann Bernoulli: Definimos como *función de una variable, una cantidad compuesta, de una o varias maneras, de esta cantidad variable y constantes.* • La idea intuitivamente de función, adquiere un carácter más abstracto • Jean Bernoulli en 1718 menciona que una función arbitraria de x es una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x y de constantes. • En 1737, Clairaut recurrir a la idea de función descrita por Bernoulli, y para denotarlas utiliza simbología como π_x y σ_x • Euler, en 1740, que se introduce por primera vez el símbolo f(x). en 1748, define una función como *toda relación entre x y y tal como se representa en el plano mediante una curva trazada a mano libre.* Para el año 1755, la define como *una expresión algebraica que puede ser anotada por una sola fórmula analítica tal como un polinomio, un seno, un coseno, un logaritmo o aún una integral de cualquiera de estas expresiones*. Euler asoma la idea de correspondencia entre una expresión algebraica y curvas en el plano cartesiano • Joseph Louis Lagrange, en 1787, define una función (de	Matemática, y auge gracias a la geometría analítica. Formalización y abstracción del concepto en una primera fase Nueva nomenclatura y conceptos asociados como la noción de dominio de una función. Primeras definiciones de la que hasta este momento era la noción de función Se empieza a pensar algebraicamente como ecuaciones, incógnitas, variables, fórmulas. Dualidad del pensamiento matemático. Cantidades conocidas y desconocidas, versus cantidades variables (en términos de dependencia e independencia) y cantidades constantes. **Función lineal como proporción** Desarrollo de la función lineal derivada de la proporcionalidad; y representación algebraica de la ecuación de una recta. Sistema de representación gráfico-analítico; además del tabular. Etapa pre-matemática de las ciencias económicas

cantidades) como *toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que se consideran como valores dados e invariables* • Para este momento, los problemas de la física estimularon la precisión en las definiciones relacionadas con el concepto de funciones • En el siglo XVII se trazan vínculos entre la proporcionalidad directa y la línea recta, gracias a los trabajos de Fermat y Descartes. La recta que pasa por el origen, es de la la forma b x = a y; además, la expresión a x + b y = c se reconoce como la ecuación general de la recta. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas • Entre finales del siglo XVII y mediados del siglo XVIII Se inicia la matematización insipiente de la economía. • Inicialmente, prevalecía un manejo verbal del lenguaje. Conceptos como oferta y demanda no eran asumidos desde una visión matemática, sino desde una perspectiva natural y psicológica (biológica).	
Período IV: Edad Contemporánea	
Desarrollo histórico-evolutivo	***Postura epistemológica (Hermenéusis)***
Siglo XIX y XX • Cauchy, en 1827, considera una función *cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras*. • Lobachevsky, en 1834, indica que se llama función de x *a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x.* Resalta la importancia de reconocer el dominio de la función y se deslinda de la necesidad de conocer explícitamente, mediante una fórmula analítica, la forma de la función • Gustav Dirichlet, en 1837, considera que, una cantidad variable y se llama función de la cantidad variable x si a cada valor de x le corresponde un solo y determinado valor de y. Señala además, que una función puede estar determinada únicamente mediante palabras, a través del lenguaje natural (función de Dirichlet, por ejemplo). Definiciones similares son argüidas por muchos años en este período. Por ejemplo, por Riemann (en 1858, afirma que *y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y*). • A partir de 1838, gracias a los trabajos de Cournot, se enuncian las primeras leyes económicas (demanda, oferta). Para mediados del siglo XIX, se comienza a utilizar el análisis matemático en el ámbito de la teoría económica de las riquezas • Cournot es quien formula y construye por primera vez un modelo matemático que pretende explicar la ley de demanda cuando enuncia que *La venta o la demanda anual D es, para cada mercancía, una función particular F(P) del precio p de la mercancía* Q = F(P). • Para 1841, se introduce la concepción matemática del punto de equilibrio de la mano de Rau Heinrich Karl. Con esta idea, plantea un nuevo enfoque o perspectiva, cuando asegura que si	**Función como regla de correspondencia entre conjuntos** Se resalta una segunda etapa o fase, muchos más afianzada, de generalización, abstracción y rigor del concepto de función. Sin embargo, con ello, a pesar de que se alcanza el punto máximo del desarrollo de su definición; se pierden ciertos atributos y cualidades –algunas de carácter intuitivo- y se dejan de lado algunas perspectivas o enfoques, que quizás eran más naturales o clásicas (como la relación de dependencia, o la idea de variación). De allí, lo complejo de intentar manejar de manera equilibrada lo intuitivo y lo abstracto, al momento de definirla. **Función y Linealidad. Visiones desde el análisis o desde el álgebra** La noción de linealidad, se desarrolla en el álgebra de forma diferente a como se desarrollar en el pre-cálculo o el

bien se han empezado a emplear fórmulas matemáticas para estudiar el comportamiento del mercado, quizás es mejor un enfoque geométrico, grafico.

- Para explicar la idea de punto de equilibrio en economía, partimos de la idea de la existencia de un precio *Pe* en donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales
- En 1870, Jenkin Fleming, en su trabajo sobre representación gráfica de la demanda, traza juntas en un mismo plano, las curvas de oferta y demanda, tratándolas explícitamente como funciones. Representó en un sólo gráfico un sistema de dos ecuaciones (oferta y demanda) con dos incógnitas (precio y cantidad).
- En 1874, Walras define y expresa matemáticamente (de forma simbólica y gráfica), la curva de la demanda, sustentándose en los aportes de Cournot, pero con un enfoque diferente. En este caso, la función de la demanda según Walras, es el producto de un programa de maximización de la utilidad en el que precios y rentas son los parámetros. Matemáticamente: Xi = D (p, m) donde p= (p1,…..pn), la cual es homogénea de grado cero en p y x, convexa y cumple con la ley de Walras p*. x=w para cualquier w.
- Con la aparición de la teoría de conjuntos, la definición de función se asocia al de una relación entre conjuntos
- En esta etapa se alcanza el nivel máximo de abstracción, generalidad, formalidad y rigurosidad en cuanto a la conceptualización de función, y se le deslinda de cualquier fórmula o expresión simbólica; así como del uso o manejo exclusivo, de variables numéricas.
- Richard Dedekind, define función como una ley, de acuerdo a la cual a cada elemento determinado s de un conjunto, se le asocia un determinado objeto que se denomina imagen de s y se denota por el símbolo $\varphi(s)$.
- Para 1911, se le atribuye a Giuseppe Peano la definición de función basada en un producto cartesiano; donde una función es una relación especial en la cual si dos pares ordenados (x,y) y (x,z) con el mismo primer elemento están en relación funcional f, entonces necesariamente y=z.
- Para 1939, el grupo francés conocido bajo el seudónimo de Nicolás Bourbaki, propone una nueva definición, en términos de conjuntos y productos cartesianos
- En relación a la linealidad y su desarrollo en esta etapa, a partir del siglo XVIII es donde se da el inicio incipiente del Álgebra Lineal. Surgen los estudios de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, trasformaciones lineales, producto interno; entre otros.
- Sin embargo, el modo que se desarrolla la noción de linealidad, desde el precálculo y el cálculo en sí mismo, parece que no permite una fácil articulación de la función afín, lineal; y los conceptos que se tratan en Álgebra Lineal.
- Con la teoría de las leyes de oferta y demanda del economista escocés Adam Smith (fundador de la economía clásica) en el año de 1976, en su obra intitulada *investigación sobre la naturaleza y causa de las riquezas de las naciones*; y el pensamiento neo-clásico promovido por matemático y economista Alfred Marshall; que se consolida la matematización de la economía en 1890.

cálculo. Lo anterior dificulta una articulación de conceptos entre estos ámbitos. Por eso, se surgen confusiones entre la definición de función afín y la función lineal

Función como leyes económicas

La matematización de la economía trae consigo un interés particular en el concepto de función.

El comportamiento de fenómenos económicos como la demanda y la oferta; son explicados desde la idea de leyes. Tales leyes, desde el punto de vista matemático no eran más que funciones.

Surgen otros conceptos económicos derivados o asociados a la oferta y la demanda, tales como punto de equilibrio, ingreso, costos, beneficio. Todos ellos, entendidos como funciones matemáticas que moldeaban fenómenos sociales, financieros, productivos y comerciales; propios de las ciencias económicas.

- Se conduce de esta manera a la *ecuación de la demanda f(Q,P) = 0*. El caso más simple de ecuación de la demanda bajo condición de ceteris parībus, es aquella donde se tiene la ecuación de primer grado de la forma: aQ + bP + c = 0, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). Si a su vez, consideramos las condiciones de no negatividad mencionada en párrafos precedentes, entonces, se puede ver que la curva de la demanda en este caso es un segmento de recta ubicado en el primer cuadrante.
- Se formula ecuación de la Oferta f(S,P) = 0. De manera análoga, El estado más simple de ecuación de la oferta bajo la condición de *ceteris parībus*, es aquella donde se tiene la ecuación de primer grado de la forma: *aS + bP + c = 0*, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita).
- De esta idea de la matematización de la demanda y la oferta, surgen otros constructos económicos. Por ejemplo, la noción de costos, ingresos y *beneficios*. Todos son considerados por Cournot como funciones que dependen del precio.
- Derivadas de la ley de demanda y ofertas, surgen la función costo, ingreso y beneficio. Se parte de la relación básica: *B= I – C, donde B representa los beneficios, I los ingresos y C los costos totales de producción*.
- Por su parte, los costos de producción (C) son clasificados en fijos (CF) y variables (CV), por lo que se puede construir la relación C= CF + CV. Pero a su vez, los costos están relacionados a la demanda Q; por lo que se puede hablar de la función costos *C = f(Q)*. En el caso más simple, la función de costos se puede describir como C = a+bQ; con a,b reales cualesquiera no nulos simultáneamente (siendo a los costos fijos, b un parámetro asociado a la demanda). El valor de b, que matemáticamente es la pendiente de la recta, representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien (*costo marginal* del bien)
- El ingreso I, es definido como el dinero total proveniente de la producción de Q unidades de un bien, cuyo precio unitario en el mercado es P; Simbólicamente: I=PQ; por lo que se puede considerar la función ingreso definida como *I = f(Q).*
- Como los beneficios se definen en atención a los ingresos y los costos, y ambos depende de la demanda Q, entonces es posible hablar de la función beneficios definida como *B = f(Q).*

Se han podido identificar distintas etapas y visiones en el desarrollo del concepto de función afín, asociadas en diferentes momentos temporo-espaciales; que van desde la idea de función, en sí misma, hasta el desarrollo de la idea de linealidad desde distintas perspectivas; alcanzando su punto de vínculo con las ciencias económicas entre los siglos XIX y XX.

Acosta y Joya (2015), quienes sirvieron de antecedentes, basado en Chevallard, señalan tres estatus del conocimiento, (a) *nociones proto-matemáticas,* que los matemáticos usan pero no nombran ni definen; (b) *nociones para-matemáticas*, que tienen un nombre y han sido objeto de negociación pero no están definidas matemáticamente; y (c) *nociones matemáticas*, ya construidas y definidas matemáticamente. Tomando en consideración estos elementos, y la revisión histórica preliminar, en el cuadro 5 podemos ver una síntesis de tales etapas o concepciones.

Cuadro 5

Etapas-visiones en la evolución de la función afín en ciencias económicas

Etapa-Época		Concepción
Proto-Matemática	Antigüedad (2000 A.C – 400 D.C)	• Pre-función
Para-Matemática	Siglos V – XV Edad Media	• Función como estudio de la variación y cambio; asociada a fenómenos físicos
	Siglos XVI-XVIII	• Función como curva y expresión algebraica. • Función lineal como proporción
Matemática	Siglo XIX y XX	• Función como regla de correspondencia entre conjuntos • Función y Linealidad. Visiones desde el análisis o desde el álgebra • Función como leyes económicas

Como se ha podido apreciar, a partir del análisis expuesto, y del cuadro anterior, la definición de función matemática en general, y de la de función afín, en particular, proviene de un largo proceso de evolución y perfeccionamiento; derivado a su vez, de reflexiones, desencuentros, contradicciones, vacíos y obstáculos. En el afán por corregir o refinar las definiciones o enfoques precedentes; fueron emergiendo nuevas configuraciones y concepciones; pero con ellas, surgieron a su vez, nuevos obstáculos, de origen epistemológico.

Destaca en la última etapa, donde se maneja la función afín como modelo que rige leyes económicas, que la introducción de la función afín no se hace sobre la base de modelos reales reconocidos por la literatura especializada, sino que simplemente, desde una concepción netamente matemática, se apuesta a que existan comportamientos de fenómenos económicos que puedan ser modelados por medio de funciones afines. Esto parece indicar un obstáculo epistemológico en la comprensión de la función afín en ciencias económicas, puesto que no se naturaliza, sino que se impone como alternativa matemática, dejando de lado la posibilidad de modelar situaciones contextualizadas dentro del ámbito de la economía y áreas afines.

CAPÍTULO V

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS PRESENTES EN EL DESARROLLO EVOLUTIVO DE LA FUNCIÓN AFÍN EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

Se pretende exponer a continuación algunos obstáculos epistemológicos identificados a partir del análisis histórico y evolutivo realizado acerca de la función afín en el contexto de las ciencias económicas. De esta manera, se da cumplimiento al *segundo objetico específico* de la investigación, que consistió en *reconocer los obstáculos epistemológicos relacionados al surgimiento del concepto de función afín, especialmente en el ámbito de las ciencias económicas*. En el cuadro 6, se aprecian cuáles fueron esos obstáculos epistemológicos que emergieron del estudio realizado.

Cuadro 6.

Obstáculos epistemológicos presentes en el desarrollo evolutivo de la función afín en el contexto de las ciencias económicas

Obstáculos epistemológicos	
Obstáculo 1	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal
Obstáculo 2	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación
Obstáculo 3	Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín
Obstáculo 4	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Obstáculo 5	Confusiones entre ecuación lineal y función afín

Obstáculo 1. Distorsiones en la estructura conceptual e interpretaciones de la función afín.

Este obstáculo surge a partir de la aparente confusión entre la función lineal y la función afín, dadas algunas conceptualizaciones esbozadas principalmente en los libros de textos escolares y universitarios; lo que ha traído como consecuencia, una distorsión en la estructura conceptual de la función afín. Para Cañadas, Gómez y Pinzón (2018), "la estructura conceptual agrupa los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos" (p. 59); y agrega Rico (2013) que, "abarca los conceptos, definiciones y procedimientos, junto con la estructura formal, que proporcionan referencia a los contenidos utilizados" (p. 18).

Para Martínez y Sánchez, (2011), muchas de estas confusiones se reproducen en investigaciones, libros de texto (tanto matemáticos, como escolares); y por supuesto, en la misma enseñanza estos conceptos, ya que "desde su transposición didáctica, se ha confundido la definición de función lineal, desde las transformaciones lineales alejando la concepción original de función asociado a los fenómenos de cambio y variación" (p. 228).

La mayoría de los cursos de matemática preuniversitaria, o incluso en los primeros curso de matemática en la universidad, se hace referencia a la función afín como de uno de los ejemplos clásicos para ilustrar el concepto de función, e incluso para introducir la relación función y su representación gráfica.

Sin embargo, parece no existir consenso entre los autores e investigadores acerca de lo que denominan como función lineal y función afín. Para Agnelli, Konic, Peparelli, y Flores (2009), dada la expresión de la función $f(x) = mx + b$, la cual se pasa a asociar su representación gráfica con una recta; es una función lineal.

Por su parte, Manfredi (2008) considera que una función lineal es una función cuyo dominio son todos los números reales, cuyo codominio son también los números reales, y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado. Simbólicamente la representa como $f\colon R \to R$ tal que $f(x) = ax + b$, con a y b reales.

Este conflicto epistémico sobre la denominación de la expresión $y = mx$ y la expresión $y = mx + b$ se observa la misma obra de la autora antes citada, cuando intenta dar un ejemplo de aplicación de la función lineal a la economía:

> Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo en pesos para así saber cuánto podemos comprar; si lo

> llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función "x" como el precio y la cantidad de producto como "y".
>
> Función Afín: Se puede aplicar en muchas situaciones, por ejemplo en economía (uso de la oferta y la demanda) los ecónomos se basan en la linealidad de esta función y las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. Por ejemplo, si un consumidor desea adquirir cualquier producto, este depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores estén dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de demanda. La ley más simple es una relación del tipo P= mx + b, donde P es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes. (p. 21).

Nótese como lo que definía como función lineal, ahora es catalogado como función afín. Sin embargo, no hace mención alguna al cambio de la expresión lingüística de lineal a afín, o por qué introduce este nuevo calificativo. Además, a pesar del vínculo de la expresión $mx + b$ con un problema de economía, en el mismo no se interpreta de manera alguna, el significado de m o de b; tan solo se hace referencia a que x es el precio. Esto, parece cuando menos un posible foco de dificultad para el aprendizaje de la función lineal o afín en contextos de las ciencias económicas.

Un fenómeno similar ocurre en Roldán (2013). El autor define función lineal como aquella cuya expresión analítica es $y = f(x) = mx + b$, con m y b son números reales y donde $m \neq 0$; donde m es la pendiente o razón de cambio de y con respecto a x y b es la intersección de la gráfica con el eje vertical; agregando que la gráfica cartesiana de una función lineal es una recta; y de allí la categorización como función lineal.

Sin embargo, para otros autores, como veremos más adelante, esta función se denomina afín y no debe ser reconocida como una función lineal, al menos desde el punto de vista del álgebra lineal. Ya acá, nos encontramos pues, con un *obstáculo epistemológico, ya que se cae en múltiples interpretaciones del objeto matemático, dependiendo de cómo se considera su aparición*. Recordemos que en palabras de Brosseau (1998) un obstáculo es un conocimiento (no la ausencia de conocimiento). Dicho conocimiento puede ser adecuado para ciertos contextos, pero resulta insuficiente para abordar otras situaciones. Y en particular, el obstáculo epistemológico está vinculado a la naturaleza del conocimiento matemático, que es el caso de la cualidad o característica que hace que una función sea considerada como lineal o no. De hecho, el mismo Roldán (2013) quien refiere que:

> Una de las características principales por las que se reconoce una función lineal es la forma que toma al ser graficada en el plano cartesiano. Sin embargo esta forma de caracterizarla produce una ambigüedad, debido a que tanto la expresión $y = f(x) = mx$ como la expresión $y = f(x) = mx + b$ tienen como gráfica cartesiana asociada una línea recta. (p. 41)

Aclarando posteriormente que, a la segunda expresión se le suele denominar con frecuencia, como función afín; y no como en él la había llamado inicialmente. Y es que ciertamente, como ya hemos mencionado, esta ambivalencia se puede apreciar en diversos textos e investigaciones; ya que la conceptualización de función lineal se suele hacer en algunos como la de toda función cuya gráfica es una línea recta (cualquiera), mientras que en otros casos, se expresa como aquella función cuyas gráficas son rectas que pasan por el origen.

En diversos libros de textos matemáticos, del área de cálculo de una variable real (Apóstol, 1998; Larson, Hostetler, y Edwards, 2006, Stewart, 2002; Swokowski, 2002 y Leithold, 2004), se establece que una función es lineal si su gráfica es una recta, y que puede ser expresada analíticamente como $y = f(x) = mx + b$. Para Martínez y Sánchez (2011), estas definiciones de función lineal expresadas en estos libros, son erróneas pues "asocian dicha función con una línea recta, olvidándose que los verdaderos principios matemáticos de donde emerge el concepto de función lineal se encuentra en los fundamentos del algebra lineal" (p. 231); tal y como ya ha sido reseñado en párrafos precedentes.

Con la finalidad de argumentar cuando se tiene una función lineal, y cuando una función afín, se considerarán algunos elementos teóricos esgrimidos por el álgebra lineal. Sobre una de las hipótesis para denominar o adjetivar a una función como función lineal, Lages (2001) y Grossman (2012) afirma que, se denomina Transformación Lineal (TL) o función lineal, a toda función T de V en W (V y W son espacios vectoriales) que verifica que $T(cx+y)=cT(x)+T(y)$ para cualesquiera *x*,*y* en *V*, y *c* un elemento escalar de una campo *F*; y que en el caso donde *V*=*W*=*R*, las TL son de la forma $y=mx$ para algún *m* real; es decir, todas las funciones cuyas gráficas son rectas que pasan por el origen de coordenadas. En efecto, consideremos la función $f(x)=mx$. Entonces:

$$f(x+y)=m(x+y)=mx+my=f(x)+f(y)$$
$$f(cx)=m(cx)=(mc)x=(cm)x=c(mx)=cf(x)$$

Por su parte, autores como Hofmann y Kunze (1971) señalan que es plausible denominar como función lineal a toda gráfica que describa una línea recta en el plano cartesiano, pero esto resulta insuficiente, ya que una TL de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}$ es una función cuya gráfica necesariamente es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

De lo anterior, se desprende que haya tendencias a confundir las denominaciones de función lineal o función afín en el área de cálculo, geometría analítica y álgebra lineal. Pero desde el punto de vista señalado en los párrafos anteriores, se deduce que una transformación lineal de R en R es un caso particular de función real, denominado función lineal; y cuya representación gráficas son todas las rectas que pasan por el punto (0,0).

Por lo tanto, para Tiburcio (2017), abordar el tema de función lineal, pasa por considerar lo dicho dentro del contexto del álgebra lineal, con sus temas de espacios vectoriales y transformaciones lineales. Así, una función lineal es una transformación de R en R sí y solo si $f(x)=mx$, con dominio *x* en $\mathfrak{R}$ y *m* cualquier real.

Para Tiburcio (2017), una función lineal es aquella cuya regla de correspondencia es de la forma $f(x)=mx$, donde *m* es un número diferente de cero que se llama constante de proporcionalidad. Una función lineal se llama también función de proporcionalidad directa.

Para Grossman (2012), una función afín es aquella función real de variable real que asocia a cada elemento x, el número $mx+b$ (con *m*, *b* valores prefijados; *m* real, *b* real no nulo). Por no ser una transformación lineal, como en el caso anterior, la misma se denomina afín.

En efecto. Consideremos la función $f(x) = mx + b$ (*m,b* reales; con b no nulo). Entonces:

$f(x + y) = m(x + y) + b = mx + my + b$

$f(x) + f(y) = (mx + b) + (my + b) = mx + mb + 2b.$

Por lo tanto, se concluye que $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$ Además,

$f(cx) = m(cx) + b = c(mx) + b \neq cf(x) = c(mx + b) = c(mx) + cb$

Por su parte, Lages, et. al. (2000) definen a la función afín como la ecuación de la recta $y = mx + b$, con *m*, *b* reales; y b distinta de cero; donde *x* es la variable independiente, mientras que y es la variable dependiente; b es el término independiente y representa la intersección de la gráfica con el eje vertical. Respecto a *m*, esta determina el grado de inclinación de la recta, y es un valor que permanece constante sin importar los valores que adopte x.

La gráfica de la función afín es una línea recta dado que, si m es un valor positivo, la función será creciente; si la pendiente es negativa la función será decreciente; y, si m es cero, la función no tendrá pendiente y se llamará función constante cuya grafica será una línea recta paralela al eje X .

El uso del adjetivo *afín* es reseñado por Tiburso (2017) quien refiere que "significa que tiene afinidad con otro o que tiene cosas en común con otro, por tanto el nombre de función afín resulta pertinente porque esta posee un elemento común con la función lineal: ambas se representan mediante líneas rectas en el plano XY" (p. 47).

Por todo lo antes expuesto, se considera la siguiente definición. *Una función f, cuyo dominio y conjunto de llegada es $\mathbb{R}$, se llama función afín, cuando existen números reales fijos m, b tales que f(x) = mx + b para todo x $\in \mathbb{R}$. Las funciones lineales son un caso particular de las afines, en las cuales b = 0. De igual manera, la función constante es un caos especial de la función afín donde a = 0*

A partir del análisis histórico-epistemológico realizado, y de la revisión de libros de textos; se presenta en el gráfico 7, la estructura conceptual de la función afín en el contexto de las ciencias económicas.

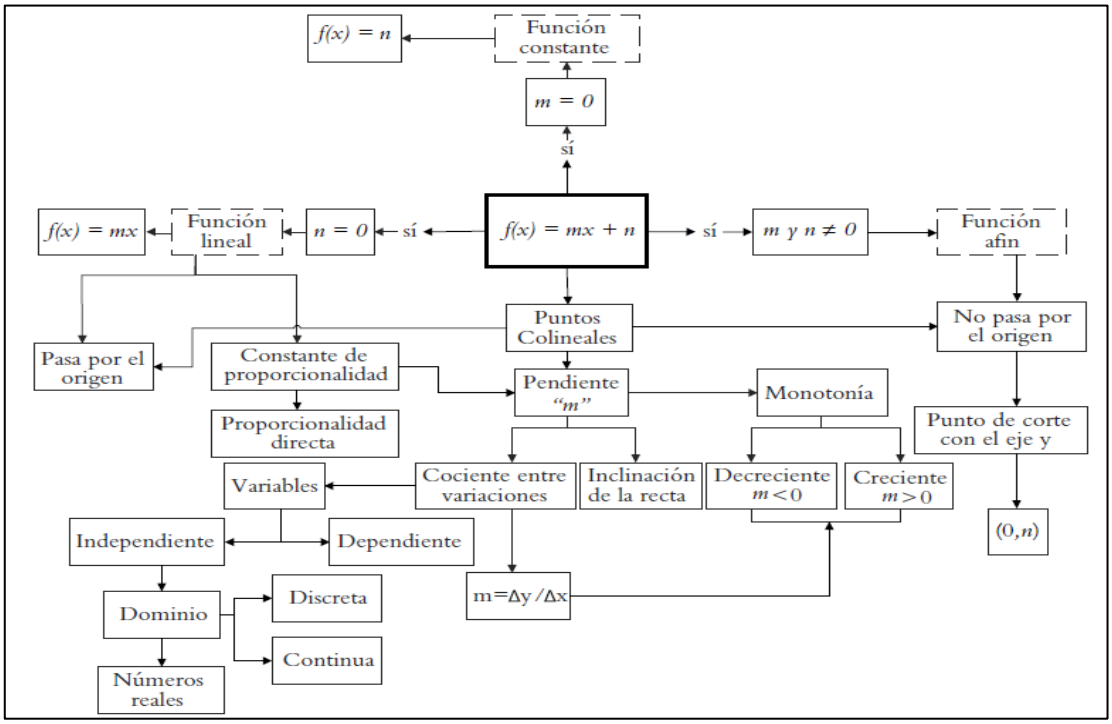


***Gráfico 7*. Estructura conceptual de la función afín en el contexto de las ciencias económicas**. Adaptado de Barajas et. al. (2018)

Como se observa, se han relacionado algunos elementos del campo conceptual del tema de función afín a partir de la notación funcional $f(x) = mx + n$. Las líneas punteadas resaltan las tres subestructuras: si $m = 0$, entonces la función es constante; si $n = 0$, entonces la función es lineal; y si m y $n \neq 0$, entonces la función es afín. La función lineal intercepta el punto (0,0) del plano cartesiano, mientras que la función afín no lo intercepta.

La gráfica de una función de la forma $f(x) = mx + n$ puede ser una sucesión de puntos colineales o una recta, donde m es la pendiente y n es el intercepto con el eje y. Los valores para los cuales está definida la función recibe el nombre de dominio de la función. Estos valores pueden ser discretos o continuos y pertenecen al conjunto de los números reales.

Por otra parte, la pendiente se representa por la letra m e indica la cantidad en que se incrementa o disminuye el valor de la variable dependiente, cuando la variable independiente aumenta una unidad. El incremento se presenta cuando el valor de m es positivo y la disminución en el caso contrario. Si la pendiente tiene valor cero, la recta es horizontal, es decir, ni se incrementa ni disminuye. El valor de la pendiente determina la monotonía de la función al definir si es creciente, decreciente o constante.

En la función lineal, la pendiente equivale a la constante de proporcionalidad; al multiplicar esta constante por algún valor de la variable independiente, se obtiene el respectivo valor para la variable dependiente. En este caso, las variables son directamente proporcionales.

Obstáculo 2. Manejo limitado de múltiples sistemas de representación.

Si bien se ha podido identificar un amplio y complejo proceso de evolución del concepto de función matemática en general – de la afín en particular-, en el ámbito de las ciencias económicas; en la actualidad, parece que se hace más énfasis en sus formas de representación; que en el manejo mismo del concepto de función. Esto trae como consecuencia que, por ejemplo, se identifique la gráfica de una función como la función en sí misma, y no como una representación de ella.

En este sentido, autores como Barajas, Fulano, Ríos, Salazar y Pinzón (2018) hacen mención del hecho de que en relación a la enseñanza de la función afín:

> …los profesores de matemáticas generalmente dan mayor énfasis al trabajo con los sistemas de representación simbólico y gráfico, y descuidan lo concerniente a la interpretación de problemas y a los procesos de matematización asociados a los fenómenos de variación y cambio entre las variables que intervienen en una situación. (p. 132)

Lo anterior podría traer como resultado que, se olviden los fundamentos de la conceptualización de función esgrimida en el último siglo (relación entre conjuntos); y se confunda una función con su representación. Es decir, que se desvalorice el concepto de función como objeto matemático; frente a la prevalencia de sus modos de representación; discriminando entre la definición; y la descripción y cómo se representa.

De esta forma, se incurre en conflictos donde, por ejemplo, sólo se considera válida la visión gráfica-geométrica de una función, junto con su expresión analítica;

dejando de lado otros modos de representación, y favoreciendo la desnaturalización el concepto de función en sí.

Ya hemos visto, a partir del primer obstáculo epistemológico, que para algunos autores, una función es lineal si su gráfica describe una recta; mientras que, para otros, una función es lineal si es una transformación lineal de R en R (rectas que pasan por el origen). El carácter o atributo de ser lineal se le asigna a una función en muchos libros de texto por representar gráficamente una recta en la que se distinguen dos cualidades principales, a saber, el corte con el eje y, y la pendiente.

Además, afirmar que una función es lineal si su gráfica describe un recta, podría ocasionar malinterpretaciones en cuanto al hecho de que no toda recta es necesariamente una representación gráfica de una función.; lo cual ocurre en el caso de las rectas horizontales o paralelas al eje Y en el sistema de coordenadas cartesianas.

Por lo tanto, este segundo obstáculo epistemológico en torno a la representación gráfica de una función afín, guarda cierta relación con el obstáculo descrito anteriormente. Considerando la definición de función afín presentada, se tiene que, la representación gráfica de toda función afín $y = mx + b$ es, en efecto, una recta. Si la recta pasa por el origen, esto es, $b=0$, entonces esta es la representación de la función $y = mx$, considerada como caso especial de la afín, y denominada función línea. En el caso en que $m=0$, se trata de la función constante $y = b$.

En Ugalde (2014) se ha visto que se dispone de varios sistemas de representación de las funciones, a saber; gráfico, tabular, verbal, algebraico, o pictórico (diagramas). En el caso de la función afín, y su desarrollo y aparición en las ciencias económicas; se ha podido corroborar a partir de la evidencia recabada y el análisis realizado, que se hace énfasis en la representación gráfica y algebraica.

Conceptos económicos como las leyes de oferta y demanda, costos de producción, ingresos, beneficios y punto de equilibrio, son representados mediante expresiones, fórmulas o ecuaciones establecidas a priori; haciendo énfasis en las denominadas curvas asociadas a cada una de las ideas económicas antes descritas.

Es importante tomar en consideración que un manejo adecuado de los sistemas de representación, implica pasar de un sistema a otro sin perder de vistas los elementos claves en cada uno. Por ejemplo, la tener la expresión $y = mx + b$, y querer representarla gráficamente, es clave entender el papel de los parámetros m y b, y viceversa, al ver una recta en el plano cartesiano, se debe ser capaz de identificar tales parámetros y derivar de allí la expresión algebraica.

Esto, en el caso de las ciencias económicas, implica a su vez, darle un sentido menos abstracto y más práctico a tales parámetros. Por supuesto que, tales interpretaciones, dependerán del tema económico en estudio. Por ejemplo, si se trata de la función de costos totales de producción; se sabe que el valor del parámetro b, representa en este contexto, los costos fijos de producción (como alquiler, nómina del personal administrativo, etc.)

Un asunto en relación con la representación tabular, es que esta no parece tener mucha influencia, al menos en el planteamiento inicial del desarrollo de modelos económicos que involucren la función afín; dejando de lado la posibilidad de introducir la noción de proporcionalidad tan importante en las ciencias económicas y administrativas.

Si bien, se ahondará sobre este tema en la descripción del siguiente obstáculo epistemológico, es importante reconocer que en aras de mantener nexos entre todos los sistemas de representación; se debe emplear el uso de tablas de valores para evidenciar la dependencia entre variables (que podría implicar su proporcionalidad en el caso de la función lineal, por ejemplo). El uso de tablas no debe limitarse exclusivamente, a la ubicación de los dos puntos por los que pasaría la recta que representa una función afín; ya que se podría perder de vista la relación de dependencia; o la visión de cambio o variación que, como ya se apreció anteriormente, constituye una de las concepciones de la función. Al respecto, Ugalde (2014) refiere que:

> De todas las representaciones, la tabla de valores es quizá la más utilizada en forma cotidiana. Se le ve todos los días en los diarios, en las noticias. Se usan para indicar precios, temperaturas, porcentajes. Por su naturaleza (presenta pares ordenados), es más cercana a la noción de

> relación o correspondencia. Por su naturaleza finita, es sencillo utilizar la información de la tabla de valores para crear una representación gráfica, sin embargo, se presentan algunos errores usuales.
>
> Un error común a la hora de interpretar tablas de valores es la extrapolación a valores no admitidos... Otro error común es olvidar la naturaleza del fenómeno en estudio, y las características que lo definen. Unos cuantos datos por sí mismos pueden dar una versión errónea del concepto global. (p. 21)

De lo anterior se desprende la importancia de vincular lo tabular con lo gráfico, y por ende, con lo algebraico. Como ya se ha mencionado, es importante considerar los modos de trasladarse entre un sistema de representación y los otros. Además, atendiendo el análisis histórico-epistemológico realizado, no se debe olvidar que justamente las tablas numéricas son consideradas como las formas más primitivas de función. Y que en el caso de las ciencias económicas, y mediante de la noción de proporcionalidad, por ejemplo, es posible combinar lo tabular, lo gráfico y lo algebraico; todo de modo contextualizado.

También se ha considerado como parte de este obstáculo, las dificultades que se puedan presentar al intentar representar una función afín por medios algebraicos o gráficos, con la imposibilidad de describirla verbalmente; dado que se ha podido corroborar que las formas verbales para definir una función, fueron prácticamente reemplazadas por otras formas de representación.

Esto es, particularmente disonante, en el caso de las ciencias económicas, donde se hace necesario vincular lo matemático con lo práctico y contextual. Así, por ejemplo, por qué no definir una relación de ventas/ingresos, por medio de la forma verbal: *el precio de venta de cada unidad es de 100 Bolívares soberanos* (moneda legal en Venezuela); y que simbólicamente se representaría como $I = pQ = 100Q$ (I: Ingresos, Q: demanda, p: precio).

En el gráfico 8 se pueden apreciar las múltiples formas de representación de la función afín que se han presentado a lo largo de su evolución; así como los modos de interrelacionarse entre ellos, y como ir de un sistema de representación a otro. El mismo es propuesto por Barajas et. al. (2018); el cual coincide, en gran medida, con lo expresado por Ugalde (2014); pero añade el tema de la tecnología digital a través de la representación dinámica.

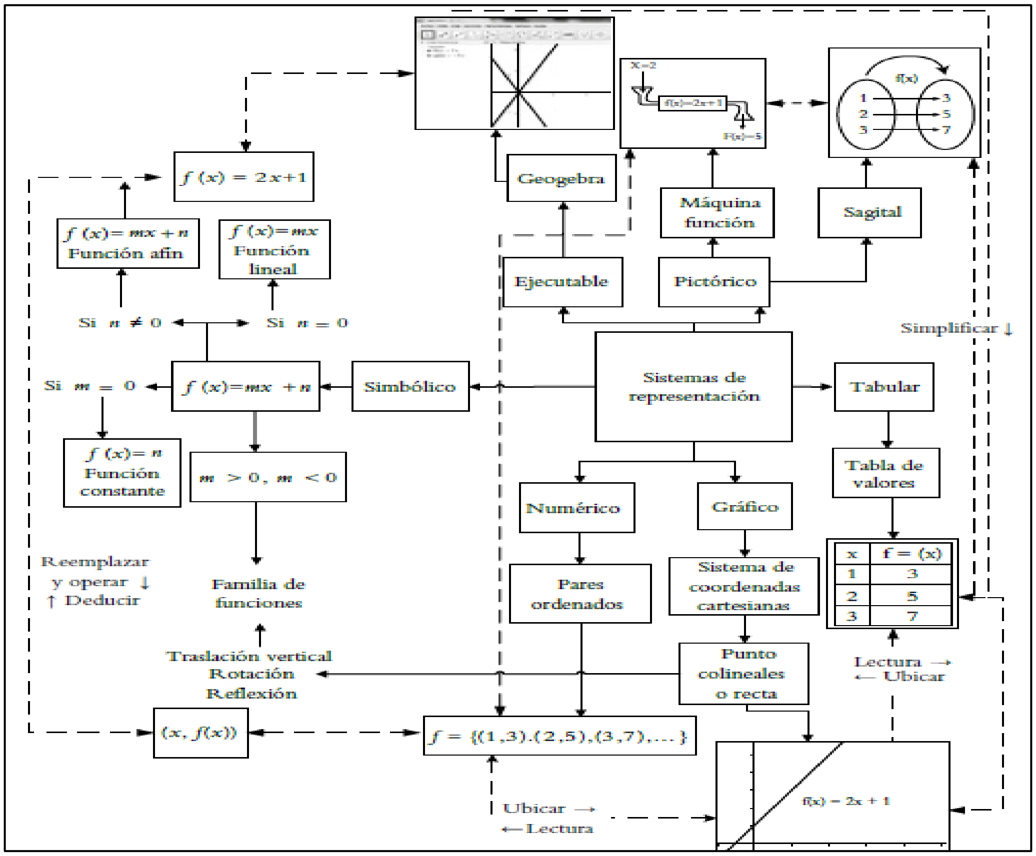


***Gráfico 8*. Sistemas de representación de la función afín**. Adaptado de Barajas et. al. (2018)

A partir de la representación simbólica, se reemplaza la variable independiente por algún valor del conjunto de los números reales; luego, se realizan las operaciones y se obtienen los valores correspondientes de la variable dependiente.

De esta forma, se obtienen las parejas ordenadas (x, $f(x)$) que corresponden a la representación numérica. Estas parejas se pueden organizar en una tabla. A partir de la representación numérica o tabular, podemos ubicar las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano. El primer número corresponde a la coordenada que se ubica en el eje de las abscisas y el segundo número corresponde al eje de las ordenadas. De esta forma, se puede obtener la gráfica que representa la función.

Las traducciones de la representación grafica a las representaciones numérica, tabular y diagrama sagital implican el proceso de lectura de la gráfica. Es decir, para obtener información de la gráfica debemos identificar las variables representadas en los ejes, la unidad y la escala de los ejes y, de esta forma, identificar los puntos de la gráfica y hacer la traducción correspondiente. Por ejemplo, una vez identificadas las coordenadas del punto en la representación gráfica, se ubica la coordenada en x en la primera columna y la coordenada en y en la segunda columna de la tabla.

En el caso de la traducción de la representación tabular a la simbólica, se requiere deducir la regla de correspondencia entre los valores de las variables; para esto, se puede recurrir al ensayo y error con operaciones matemáticas, de tal manera que los estudiantes puedan llegar del primer elemento de la tabla al segundo elemento, buscar la regularidad y traducirla al lenguaje algebraico.

Un proceso similar también se realiza al pasar del sistema numérico, pictórico y grafico a la representación simbólica. La traducción de los sistemas de representación numérico y pictórico al tabular implica un proceso de simplificación y organización de los valores que toman las variables.

De la representación simbólica se pasa a la representación ejecutable, al realizar los pasos que generan una gráfica dinámica de la función en el programa. El sistema de representación ejecutable proporciona las herramientas necesarias para realizar la traducción a los otros sistemas.

Obstáculo 3. Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín.

Ya se ha señalado que dentro de la evolución histórica y epistemológica de la función afín, destaca el desarrollo de la noción de linealidad; que a su vez involucra la idea de proporcionalidad en el caso de la función lineal de la forma $y = mx$. Sin embargo, persisten en la literatura, investigaciones y en la enseñanza; ciertos obstáculos y conflictos epistémicos al respecto. Por ejemplo, Manfrendi (2008) señala que “una función lineal, cumple además, que el incremento de los valores de los elementos del dominio es proporcional al incremento de los valores en el codominio, siempre que a no sea cero." (p. 19); aclarando que no son proporcionales x y *f(x),* sino x y ax; ya que esta autora considera que una función lineal es de la forma $f(x) = ax + b$. Por lo que vemos la relación que este obstáculo tiene con el primero descrito.

Tal explicación, se puede tornar confusa para quienes conozcan el concepto de proporcionalidad, y puede ser contraproducente en aquellos que no manejan la idea de proporcionalidad; ocasionando una disonancia cognitiva y una mala interpretación de proporcionalidad en el contexto de funciones cuyas representaciones gráficas son rectas. Esto, debido a que, solo las funciones de la forma $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}$ (a distinto de 0) admiten la proporcionalidad entre las variables dependientes e independientes, tal y como lo veremos más adelante. En todo caso, se manifiesta así, un nuevo obstáculo epistemológico, asociado a la idea de proporcionalidad, recta y función.

Roldán (2013) señala que, dado el enfoque netamente numérico en la enseñanza actual de las proporciones, la misma se ha vuelto un obstáculo en el desarrollo del concepto de función, y en particular de la función lineal, ya que a pesar de llevar "implícita la idea de dependencia entre magnitudes de distinta o igual naturaleza y, la de incrementos iguales por unidad o igualdad en su variación, esto es la razón de cambio constante" (p. 8), esto no se hace ver en el estudio de proporciones, ni se expone cuando se enseña le tema de función lineal cuando se aborda como un caso especial de la función afín. De hecho, quizás sería más conveniente, abordar primero lo función lineal mediante la idea de proporcionalidad; y luego definir la función afín; indicando finalmente, que el caso de la función lineal no es más que un caso particular de la afín. A todas cuentas, esto es lo que históricamente ocurrió; ya que la idea de proporcionalidad fue desarrollada por los griegos.

Roldán (2013) señala que "uno de los elementos conceptuales implícitos en el concepto de función lineal es el de proporcionalidad directa" (p. 44). Así mismo, Fiol y Fortuny, señalados en Roldán (ob. cit.) agregan que "la función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de la proporcionalidad. La función lineal representa la estructura de la proporcionalidad, sirve para visualizar los diferentes estados de variación, es decir expresa su comportamiento cualitativo" (p.44).

La función lineal posee características que implican su relación de proporcionalidad con respecto a cantidades u objetos en este sentido Roldan (2013) plantea lo siguiente:

> La noción de función unifica elementos conceptuales "previos" como razón, proporción y proporcionalidad. Existen planteamientos que indican que la función lineal es la matematización utilitaria de la proporcionalidad, el proceso de relacionar números que representan las medidas de objetos o cantidades aportan significativamente a la construcción mental de función, por lo tanto si las relaciones encontradas entre esos números son de proporcionalidad entonces directamente se aporta a la conceptualización de función lineal (p. 55).

De esta manera, la proporcionalidad entre dos magnitudes ser entendida por medio del concepto de función lineal – y viceversa – pues se trata de un fenómeno donde una cantidad, que es variable, variable que depende a su vez de otra cantidad variable. Veamos algunos elementos que relacionan una función lineal con la proporcionalidad:

1. Toda relación proporcional verifica que 0=k.0, para todo k diferente de cero; por lo tanto, el punto (0,0) es un punto de la gráfica de una función lineal.
2. La constante de proporcionalidad queda definida por $y_i/x_i=k$ (i=1,2,…) donde (x_i,y_i) pertenece a la recta de la función lineal$y = kx$.

Por su parte, para Lages, Pinto, Wagner, y Cézar, (2000), la noción de función lineal está asociado al modelo matemático que involucra problemas de proporcionalidad; y es uno de los tema matemáticos más estudiado a nivel mundial. En este sentido, la visión de la función lineal como proporcionalidad, data del siglo XVII. Por ejemplo, el libro Aritmética Progresiva de Antonio Trajano, cuya primera edición data de 1883, citado por los autores antes mencionados, exhibe la siguiente definición:

> Se dice que dos magnitudes son proporcionales cuando ellas se corresponden de tal modo que, multiplicándose una cantidad de una de ellas por un número, la cantidad correspondiente de la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número. En el primer caso, la proporcionalidad se llama directa y, en el segundo, inversa; las

magnitudes se dicen directamente proporcionales o inversamente proporcionales (p.86).

Por lo tanto, los autores concluyen que la proporcionalidad es una función f de R en R, tal que, para todo número real c, x; se tiene que $f(cx) = xf(x)$, (proporcionalidad directa). Además, si consideramos $a = f(1)$, se tiene entonces que $\mathrm{f}(c) = f(c.1) = c.f(1) = c.a$; es decir, $f(c) = c.a$ para cualquier c real. Si consideramos c=x, obtenemos pues que, $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{a.x}$; con lo cual, la magnitud y es directamente proporcional a la magnitud x, siendo a la constante de proporcionalidad. La función $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{a.x}$ se denomina función lineal.

Obstáculo 4. Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas

A lo largo de la literatura especializada consultada, no fue posible identificar problemas reales de las ciencias económicas que fuesen estudiados y modelados por medio de la función afín. La introducción de los temas matemáticos en el área económica se hacen más con énfasis matemático, aunque si se realizan las interpretaciones del caso para contextualizar los aspectos matemáticos en los asuntos propias de la economía.

Pero se considera que esto es insuficiente para una adecuada introducción y asimilación del tema de la función afín en este ámbito; ya que la vinculación del uso de modelos matemáticos con leyes económicas parece responder más a la matemática que a las ciencias económicas en sí mismas. Se plante que la ecuación de la demanda puede ser $aQ + bP + c=0$; o que la ecuación de la oferta es $aS + bP + c=0$. Sin embargo, no se han detectado situaciones reales del campo de la economía que hayan sido susceptibles de modelarse por medio de estas relaciones.

Por su parte, Barajas et. al. (2018) mencionan que “al plantear actividades en clase que no se inscriben en un contexto cercano al estudiante, no se promueve que el estudiante fortalezca el análisis, la interpretación y la argumentación (p. 132).

En la revisión de obras de Matemáticas aplicadas a la economía; y de investigaciones hechas en este ámbito (Fernández, 2017; Rodríguez y Valdivié 2010, 2011; Arya y Lardner, 2010, Heaussler y Paul, 2003) se ha visto que, el modelo de función afín es presentado como una alternativa para describir estos fenómenos; y se dan ejemplos de aplicaciones pero donde el modelo funcional ya está dado, expresado en términos de una ecuación, función o curva de la demanda, por ejemplo.

Pero poco se habla sobre el cómo se llegó a tal modelo matemático. Sin dudas que, esto conduce a un nuevo obstáculo epistemológico; ya que la concepción de la función afín como ley económica, puede ser considerada como limitada, trivial o superficial.

Para algunos investigadores en Educación Matemática, este tema se sumerge en la fenomenología que subyace al concepto matemático. Para Rico (2013), el estudio de lo fenomenológico "aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio" (p. 18). En este sentido, a decir de Cañadas, Gómez y Pinzón (2018), el análisis fenomenológico permite reconocer e identificar fenómenos asociados al tema de estudio, al objeto matemático; y establecer relaciones entre esos fenómenos.

En esta investigación se han detectado tres fenómenos asociados al uso de la función afín en el contexto de las ciencias económicas. El primero de ellos, asociado a la idea de cantidades constantes; como por ejemplo, los gastos fijos de una empresa; los cuales pueden ser representados por una recta (o segmento de recta) horizontal. En este sentido, prevalece la ausencia de la idea de variación.

El segundo de estos fenómenos, está asociado a la noción de proporcionalidad directa; y el concepto económico de ingresos es un ejemplo de este fenómeno. En este caso, se modela un fenómeno donde, la relación entre cantidades de dos magnitudes, está dada por medio de una función lineal.

El tercero, representa una combinación de los dos fenómenos anteriores; y un ejemplo claro se tiene en la construcción de la función costos, que como se recordará, está asociada tanto a los costos fijos, como a los costos variables; por lo que es posible representarla a través de una función afín donde ambos parámetros sean diferentes de cero. A diferencia de la función lineal y la relación de proporcionalidad, la gráfica en este tipo de fenómenos función no pasa por el punto (0,0) y se corresponde a la traslación vertical de una función lineal.

Estos hallazgos coinciden con el análisis fenomenológico propuesto en Barajas et. al. (2018); que se presente en el gráfico 9; donde es posible "establecer una relación biunívoca entre los tres contextos fenomenológicos y las tres subestructuras matemáticas que definimos según la representación simbólica de la función constante, lineal y afín." (p. 139).

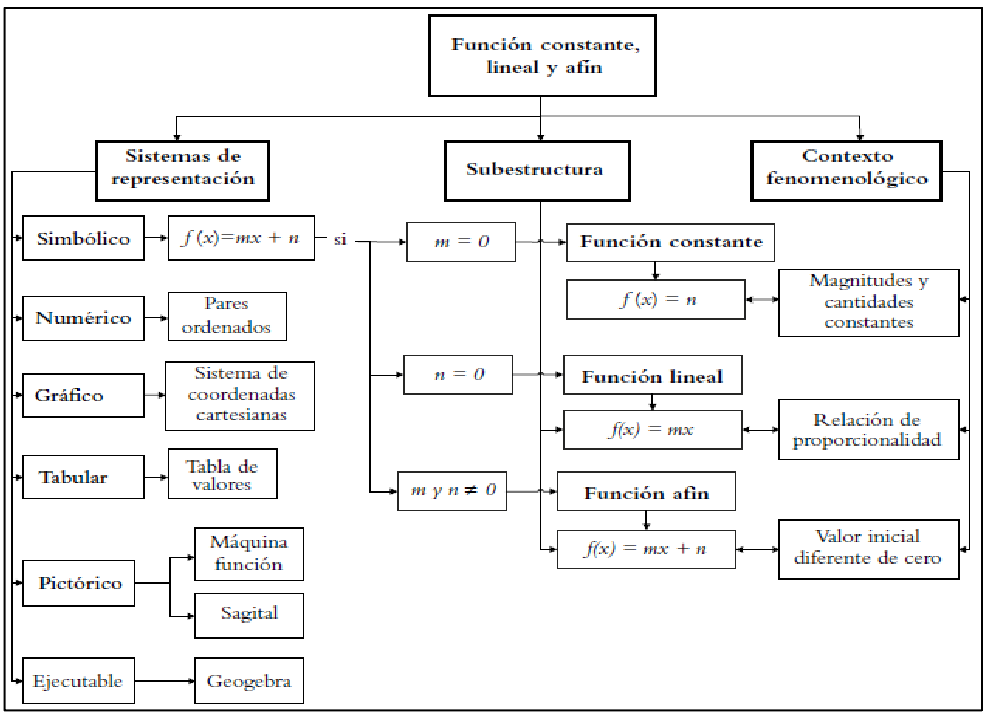


***Gráfico 9*. Fenomenología de la función afín**. Adaptado de Barajas et. al. (2018)

Obstáculo 5: Confusiones entre ecuación lineal y función afín

En la evolución histórica del concepto de función afín dentro de las ciencias económicas, se ha podido identificar que autores que promovieron la matematización de la economía, introdujeron indistintamente la noción de función y ecuación; lo cual se puede considerar como un nuevo obstáculo epistemológico.

Así se ha podido observar a lo largo de la revisión de la literatura especializada que, economistas o especialistas como Rau, Quetelét, Fernández, y Cournot, entre otros, hablan en algunos casos de función de demanda, en otros, ecuación de demanda, o en otros curva de demanda. De forma similar ocurre con otras ideas y constructos económicos.

Este reduccionismo puede llevar a que los estudiantes no comprendan que el objeto función ha sido construido de manera expresa para el estudio de los fenómenos sujetos a cambio y que en lugar de trabajar con variables, lo hagan con incógnitas. Ya Muñoz (2015), señalaba la diferenciación entre dos modos de pensamiento o razonamiento matemático. Uno que fija su atención en término de cantidades conocidas y desconocidas (que implican el planteo y resolución de ecuaciones); y el otro, orientado hacia el manejo de variables y constantes (que conducen a relaciones funcionales).

Por su parte, Cribeiro, Madrid y Fraga (2014), señalan un conjunto de dificultades inherentes a las diferencias o similitudes entres ecuaciones y funciones. Afirman que, por ejemplo, (a) no se toman en cuenta los conjuntos donde se establecían la relación entre variables, aún y cuando "los conjuntos donde se trabaja son dos de los aspectos fundamentales que determinan funciones" (p. 43); (b) se considera que trabaja siempre dentro de todo el conjunto de los números reales; y (c) no se justifica cuando una expresión algebraica se corresponde a una ecuación o una función; y en el caso del análisis histórico-epistemológico realizado, se han podido evidenciar estos mismos conflictos.

Por ejemplo, en relación a este último aspecto, Fernández (2017) señala la ecuación de la oferta como una expresión de la forma $f(S,P) = 0$; lo cual se corresponde una la simbología de una función en su forma implícita. De igual forma, señala el autor que, la forma más simple de ecuación de la oferta (con ceteris paríbus), es aquella donde se tiene la ecuación de primer grado de la forma: $aS + bP + c = 0$, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente).

Pero al mismo tiempo se define asociada a ella, una curva de la oferta; es decir, se asigna una representación gráfica de una función. Esto sucede con otros de los conceptos económicos estudiados; por lo que se detectaron situaciones similares a lo largo de todo el proceso de desarrollo de la función afín en economías.

En relación a los conjuntos de partida y llegada, dominio y rango, estos son en general asumidos en el contexto de todos los reales, sobre todo, cuando se dan definiciones matemáticas rigurosas descontextualizadas; lo cual no es recomendable en el caso del abordaje del tema en el área de las ciencias económicas.

Sin embargo, en los trabajos planteados por Cournot, Marshall, y otros economistas, si se dan ciertos indicios de los conjuntos de partida y llegada adecuados y ajustados a los conceptos económicos; por lo que es necesario mantener estos elementos matemáticos dentro del contexto.

Por ejemplo, la expresión$\mathrm{y} = 4\mathrm{x} + 2$, debería venir acompañada de la declaración de los conjuntos donde *x* e *y* varían; porque en algunos casos, podría ser la ecuación de una recta, en otros casos, una sucesión de puntos en el plano; y en algunos casos hasta podría representar el conjunto vacío en la solución de un ecuación.

Así mismo, se ha visto como esta en la dualidad de pensamiento matemático se presenta entre los siglos XVII y XVIII donde se interpreta de distintas formas el símbolo de la x. En algunos contexto, hace referencia a una variable, es decir, algo que tiene o asume múltiples valores, mientras que, en otros ámbitos, es una incógnita, y por lo tanto es algo que tiene un(os) valor(es) fijado(s) desconocido(s); pero esta dualidad de pensamiento de la época no ha sido fácil de aclarar con el tiempo.

Al respecto, Wilhelmi, Godino y Lasa (2014), haciendo mención a los conceptos de variable e incógnita, indican que "en las clases de matemáticas estos términos se utilizan en ocasiones informalmente de manera equivalente, pudiendo degenerar en una dialéctica que es necesario controlar" (p. 574); y esto, se debe, entre otras razones, a que, tal y como lo sostienen los autores citados, "La incógnita y la variable, la ecuación y la función, son objetos conceptuales diferentes aunque con frecuencia se expresan mediante los mismos objetos lingüísticos" (p. 581).

Lo anterior debe ser abordado en el contexto de la enseñanza de la función afín de las ciencias económicas, ya que en su estudio intervienen de manera explícita y conjunta, tanto funciones como ecuaciones. Por ejemplo, para encontrar el punto de equilibrio, es necesario resolver un sistema de dos ecuaciones (demanda y oferta); pero a su vez, estas ecuaciones están asociadas a las funciones/curvas de demanda y oferta respectivamente. Es decir, hay una cierta dualidad en el comportamiento de los objetos matemáticos; que suele generar conflictos debido a su naturaleza, por lo que se le considera un obstáculo epistemológico.

Hasta este momento, se ha podido realizar un estudio histórico, y por tanto, evolutivo, en torno a la función afín, en un contexto de las ciencias económicas. Dicho estudio, ha permitido identificar no sólo la génesis y el desarrollo epistémico de este tema en el tiempo, sino que también ha permitido detectar una serie de obstáculos epistemológicos presentes en distintos momentos o etapas claves del desenvolvimiento de la función afín en general, y dentro de la economía en particular. Todo lo anterior debe ser tomado en consideración a la hora de la enseñanza de este tema en este contexto.

CAPÍTULO VI

OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE (OVA): LA FUNCIÓN AFÍN EN LAS CIENCIAS ECONÓMICAS. UNA HISTORIA POR CONTAR

Implicaciones Didácticas del uso de la historia de la Matemática en la enseñanza de la función afín en el ámbito de las ciencias económicas, mediante el diseño de un Objeto Virtual de Aprendizaje

En este capítulo se da cumplimiento al tercer objetivo específico de la investigación, el cual consistió en *reflexionar acerca de las implicaciones didácticas que conlleva la utilización de la historia de la Matemática en la enseñanza de la función afín en el ámbito de las ciencias económicas, mediante el diseño de un OVA.*

Hoy día, la matemática juega un papel fundamental en el desarrollo científico, y realiza importantes aportes a diversas ramas del conocimiento. Desde la salud y la medicina, pasando por las distintas ingenierías, la matemática se erige como una herramienta clave en el desarrollo de cualquier campo. El área de las ciencias económicas, gerenciales y administrativas, no escapa de este fenómeno, y parte importante de su desarrollo y crecimiento, obedece en una medida importante, a la matemática.

Y es que, diversos conceptos, ideas, nociones y conocimientos en el área de las ciencias económicas y afines son de naturaleza cuantitativa; como por ejemplo, el precio de un producto o servicio, el costo de producción o de materia prima, los sueldos y salarios, las inversiones, los impuestos, las ganancias y pérdidas de operaciones financieras. Todos estos constructos, tienen en común su naturaleza cuantitativa, y por ende, su tratamiento suele ser matemático.

Dentro de la matemática, el concepto de función es quizás, junto con la noción e número, uno de los conceptos más importante a lo largo de todos los tiempos. Este tipo de objetos matemáticos, también pueden ser ubicados en el ámbito de las ciencias económicas y áreas afines. Así, es común hablar de la función demanda, la función oferta, la función costos, la función beneficios, entre otros. En general, dentro del contexto de las matemáticas aplicadas, las funciones suele utilizarse para modelar fenómenos reales, desde un punto de vista matemático, y con ellos, estudiar y comprenderlos, desde una óptica cuantitativa.

Quizás, el modelo de función más sencillo para modelar situaciones reales, es la función afín $f: R \rightarrow R: y = f(x) = mx + b, con\ m, b\ no\ nulos$. De hecho, en economía, muchos fenómenos tienen un comportamiento que fácilmente puede ser explicado mediante esta función. Sin embargo, la literatura especializada en el campo de la Educación Matemática, hace mención al hecho de las dificultades que confrontan los estudiantes universitarios del área de las ciencias económicas, a la hora de estudiar matemática.

Entre otras razones, debido a la descontextualización de las ideas matemáticas y su separación de los conceptos económicos a los que están asociados. Frente a este panorama, dos tendencias sobre didáctica, han permitido crear un material educativo de apoyo al estudio de la función afín en las ciencias económicas. La primera de estas directrices es, el uso de la historia de la matemática con fines educativos; y la segunda, el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para el estudio de la matemática, ya que facilita, tanto la modelización de situaciones y fenómenos reales, como la posibilidad de explorar, y simular.

Es por ello que, se planteó el diseño de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) la enseñanza de la función afín en el ámbito de las ciencias económicas, empleando como hilo conductor la historia de la matemática y los obstáculos epistemológicos detectados en esta investigación.

Si bien, los objetos virtuales de aprendizaje, por definición, pueden ser utilizados por cualquier persona, en cualquier contexto o situación; y sin que necesariamente esté dirigido a una población en particular; es importante, tomar algún referente. En el caso de la investigación que se llevó a cabo, dada la experiencia del docente-investigador como profesor de matemática I y II en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), de la Universidad de Carabobo (UC), y las dificultadas detectadas, así como el bajo rendimiento reportado en este curso; se consideró pertinente tomarlos como grupo de referencia para el diseño del OVA.

Ahora, ¿por qué un OVA para la enseñanza de la función afín? Entre otras razones, porque se introduce la tecnología digital, la cual facilita la exploración, experimentación y facilita procesos como la modelización, tan importante en el caso de la enseñanza de la matemática aplicada. También se recurre al uso de la historia de la matemática, para introducir un elemento innovador, creativo que permita romper con los esquemas tradicionales de enseñanza. Además, la identificación de obstáculos epistemológicos presentes a lo largo del desarrollo y evolución de la función afín en el campo de las ciencias económicas y afines, permitiría plantear actividades de aprendizaje que reviertan los efectos negativos de tales obstáculos; o que coadyuven a sortearlos con éxito, a través del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para el diseño del Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) para la enseñanza de la función afín en el contexto de las ciencias económicas, a través de la historia, se recurrió a la integración de los referentes teóricos plasmados en la investigación en el CAPÍTULO II. Se utilizó el Modelo ASSURE para el desarrollo del OVA, recurriendo a sus primera 4 etapas o fases, que contemplan el diseño.

En este sentido, primero se procedió a analizar las necesidades formativas de estudiantes de Matemática I de la Universidad de Carabobo (UC), de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES). En este caso, se tomaron en consideración los estadísticos de notas de los últimos 4 semestres de la asignatura Matemática I; donde el índice de reprobados está por encima del 60%. Así mismo, tomando en consideración los resultados obtenidos en la aplicación de una prueba diagnóstica, donde se abordó, entre otros temas, el de función afín, se concluyó que más del 70% de los estudiantes del curso no lograron contestar de manera correcta las preguntas asociadas a este tema

Tomando en consideración estos indicadores, y a su vez, lo propuesto por el programa del curso de Matemática I de la Universidad de Carabobo (UC), de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), se procedió a establecer objetivos de aprendizaje a ser alcanzados por el uso del OVA. A partir de estos insumos iniciales, se procedió a la selección y/o diseño de actividades y estrategias didácticas, tecnologías; así como a los medios y recursos para gestionarlas mediante el OVA. Finalmente, se procedió a la organización del escenario de aprendizaje, mediante el diseño y construcción del OVA, utilizando para ello, la plataforma eXelearning. En el gráfico 10 se puede apreciar la estructura organizativa del OVA; mientras que en el cuadro 7, se puede apreciar el diseño instruccional del OVA; mientras que, en el anexo A, se puede apreciar el OVA diseñado con la herramienta eXelearning.

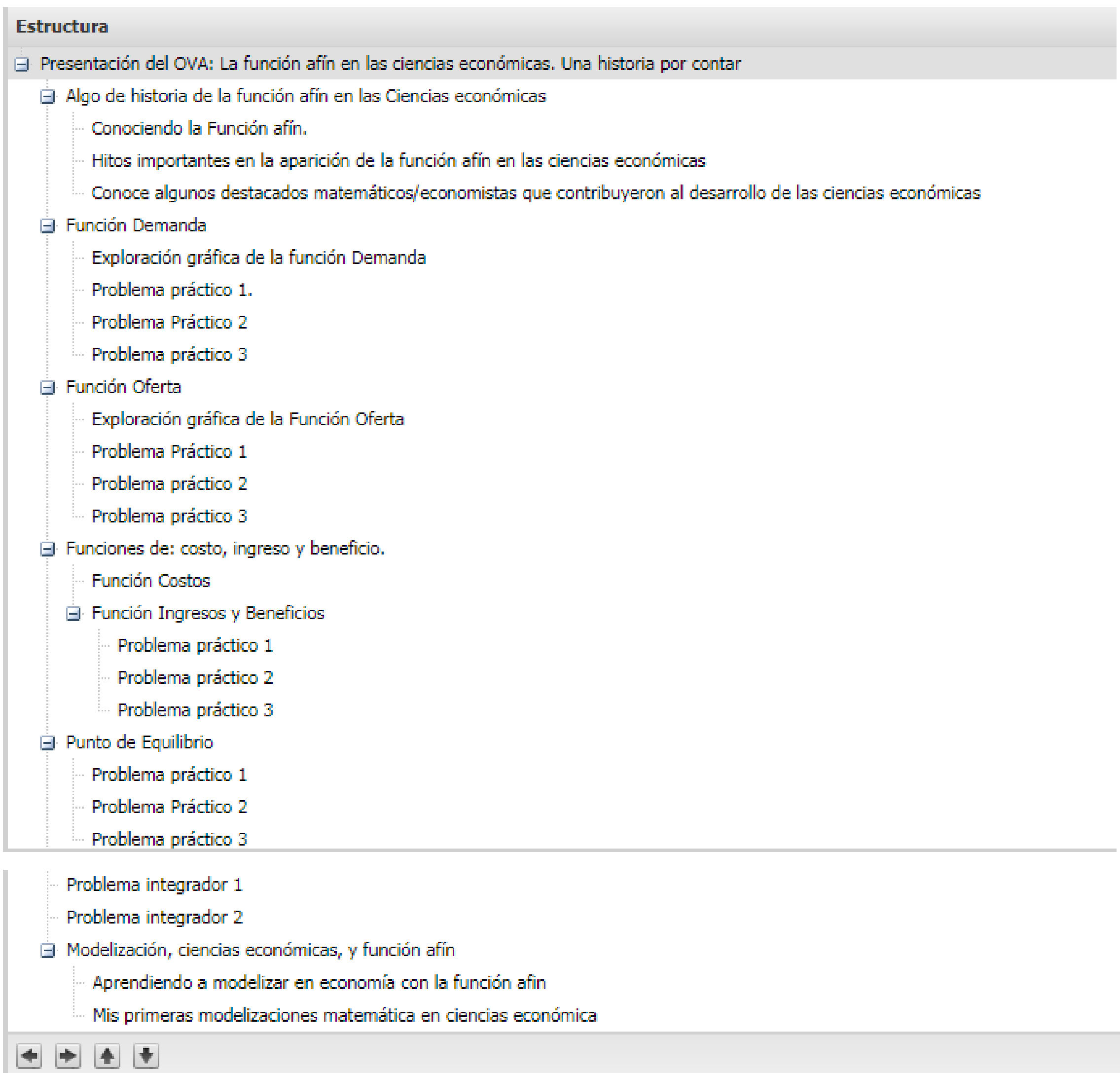


***Gráfico 10.* Estructura del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar**

Cuadro 7.

Diseño Instruccional del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar

OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar	
Tema/subtema del OVA:	Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Objetivo:	Introducir al estudiantes en el uso del OVA, su propósito y estructura; destacando la importancia del tema de función afín en el contexto de las ciencias económicas
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	----
Actividades/Contenidos:	*Desarrollar lectura guiada y reflexionar sobre lo aprendido, debatiendo con el resto del grupo de estudiantes.* Hoy día, la matemática juega un papel fundamental en el desarrollo científico, y realiza importantes aportes a diversas ramas del conocimiento. Desde la salud y la medicina, pasando por las distintas ingenierías, la matemática se erige como una herramienta clave en el desarrollo de cualquier campo. El área de las ciencias económicas, gerenciales y administrativas, no escapa de este fenómeno, y parte importante de su desarrollo y crecimiento, obedece en una medida importante, a la matemática. Y es que, diversos conceptos, ideas, nociones y conocimientos en el área de las ciencias económicas y afines son de naturaleza cuantitativa; como por ejemplo, el precio de un producto o servicio, el costo de producción o de materia prima, los sueldos y salarios, las inversiones, los impuestos, las ganancias y pérdidas de operaciones financieras. Todos estos constructos, tienen en común su naturaleza cuantitativa, y por ende, su tratamiento suele ser matemático. Dentro de la matemática, el concepto de función es quizás, junto con la noción e número, uno de los conceptos más importante a lo largo de todos los tiempos. Este tipo de objetos matemáticos, también pueden ser ubicados en el ámbito de las ciencias económicas y áreas afines. Así, es común

	hablar de la función demanda, la función oferta, la función costos, la función beneficios, entre otros. En general, dentro del contexto de las matemáticas aplicadas, las funciones suele utilizarse para modelar fenómenos reales, desde un punto de vista matemático, y con ellos, estudiar y comprenderlos, desde una óptica cuantitativa. Quizás, el modelo de función más sencillo para modelar situaciones reales, es la función afín . De hecho, en economía, muchos fenómenos tienen un comportamiento que fácilmente puede ser explicado mediante esta función. Sin embargo, la literatura especializada en el campo de la Educación Matemática, hace mención al hecho de las dificultades que confrontan los estudiantes universitarios del área de las ciencias económicas, a la hora de estudiar matemática. Entre otras razones, debido a la descontextualización de las ideas matemáticas y su separación de los conceptos económicos a los que están asociados. Frente a este panorama, dos tendencias sobre didáctica, han permitido crear un material educativo de apoyo al estudio de la función afín en las ciencias económicas. La primera de estas directrices es, el uso de la historia de la matemática con fines educativos; y la segunda, el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para el estudio de la matemática, ya que facilita, tanto la modelización de situaciones y fenómenos reales, como la posibilidad de explorar, y simular. Es por ello que, se planteó el diseño de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) la enseñanza de la función afín en el ámbito de las ciencias económicas, empleando como hilo conductor la historia de la matemática y los obstáculos epistemológicos detectados en esta investigación.
Recursos:	Hipertextos.
Tema/subtema del OVA:	Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Objetivo:	Exponer las etapas, fase, visiones y con concepciones que atravesó la función en general, y la función afín en particular, a lo largo de la historia, hasta nuestros días.
Obstáculo(s) Epistemológico(s)	----

abordado(s):	
Actividades/Contenidos:	*Lectura guiada, debate dirigido* La definición de función matemática en general, y de la de función afín, en particular, proviene de un largo proceso de evolución y perfeccionamiento; derivado a su vez, de reflexiones, desencuentros, contradicciones, vacíos y obstáculos. En el afán por corregir o refinar las definiciones o enfoques precedentes; fueron emergiendo nuevas configuraciones y concepciones; pero con ellas, surgieron a su vez, nuevos obstáculos, de origen epistemológico. Destaca en la última etapa, donde se maneja la función afín como modelo que rige leyes económicas, que la introducción de la función afín no se hace sobre la base de modelos reales reconocidos por la literatura especializada, sino que simplemente, desde una concepción netamente matemática, se apuesta a que existan comportamientos de fenómenos económicos que puedan ser modelados por medio de funciones afines. Esto parece indicar un obstáculo epistemológico en la comprensión de la función afín en ciencias económicas, puesto que no se naturaliza, sino que se impone como alternativa matemática.

Etapas-visiones en la evolución de la función afin en ciencias económicas

Etapa-Epoca		Concepción
Proto-Matemática	Antigüedad (2000 A.C – 400 D.C)	• Pre-función
Para-Matemática	Siglos V – XV. Edad Media	• Función como estudio de la variación y cambio; asociada a fenómenos físicos
	Siglos XVI-XVIII	• Función como curva y expresión algebraica. • Función lineal como proporción
Matemática	Siglo XIX y XX	• Función como regla de correspondencia entre conjuntos • Función y Linealidad. Visiones desde el análisis o desde el álgebra • Función como leyes económicas

Recursos:	Hipertexto
Tema/subtema del OVA:	Conociendo la Función afín.
Objetivo:	Introducir matemáticamente, el concepto de función afín; tomando en consideración sus diversos sistemas de representación; y la fenomenología de dicho objeto matemático; identificados a lo largo

	de su evolución histórica.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación
Actividades/Contenidos:	Construcción de Esquemas conceptuales asociados a los diversos modos de representación de la función.
Recursos:	Guía instrucción Herramientas digitales o no, para la construcción de mapas conceptuales.
Tema/subtema del OVA:	Hitos importantes en la aparición de la función afín en las ciencias económicas
Objetivo:	Reconocer algunos momentos claves en la introducción del concepto de función y función afín en el ámbito de las ciencias económicas
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Actividades/Contenidos:	*Construcción de un cuadro comparativo con los principales personajes, aportes y épocas donde se abordaron los temas de función en el ámbito de las ciencias económicas* • A partir de 1838, gracias a los trabajos de Cournot, se enuncian las primeras leyes económicas (demanda, oferta). Para mediados del siglo XIX, se comienza a utilizar el análisis matemático en el ámbito de la teoría económica de las riquezas • Cournot es quien formula y construye por primera vez un modelo matemático que pretende explicar la ley de demanda cuando enuncia que *La venta o la demanda anual D es, para cada mercancía, una función particular F(P) del precio p de la mercancía* Q = F(P). • Para 1841, se introduce la concepción matemática del punto de equilibrio de la mano de Rau Heinrich Karl. Con esta idea, plantea un nuevo enfoque o perspectiva, cuando asegura que si bien se han empezado a emplear fórmulas matemáticas para estudiar el comportamiento del mercado, quizás es mejor un enfoque geométrico, gráfico. • Para explicar la idea de punto de equilibrio en economía, partimos de la idea de la existencia de un precio *Pe* en donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales

	• En 1870, Jenkin Fleming, en su trabajo sobre representación gráfica de la demanda, traza juntas en un mismo plano, las curvas de oferta y demanda, tratándolas explícitamente como funciones. Representó en un sólo gráfico un sistema de dos ecuaciones (oferta y demanda) con dos incógnitas (precio y cantidad). • En 1874, Walras define y expresa matemáticamente (de forma simbólica y gráfica), la curva de la demanda, sustentándose en los aportes de Cournot, pero con un enfoque diferente. En este caso, la función de la demanda según Walras, es el producto de un programa de maximización de la utilidad en el que precios y rentas son los parámetros. Matemáticamente: Xi = D (p, m) donde p= (p1,…..pn), la cual es homogénea de grado cero en p y x, convexa y cumple con la ley de Walras p*. x=w para cualquier w • Con la teoría de las leyes de oferta y demanda del economista escocés Adam Smith (fundador de la economía clásica) en el año de 1976, en su obra intitulada *investigación sobre la naturaleza y causa de las riquezas de las naciones*; y el pensamiento neo-clásico promovido por matemático y economista Alfred Marshall; que se consolida la matematización de la economía en 1890. • Se conduce de esta manera a la *ecuación de la demanda f(Q,P) = 0*. El caso más simple de ecuación de la demanda bajo condición de ceteris paríbus, es aquella donde se tiene la ecuación de primer grado de la forma: aQ + bP + c = 0, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). Si a su vez, consideramos las condiciones de no negatividad mencionada en párrafos precedentes, entonces, se puede ver que la curva de la demanda en este caso es un segmento de recta ubicado en el primer cuadrante. • Se formula ecuación de la Oferta f(S,P) = 0. De manera análoga, El estado más simple de ecuación de la oferta bajo la condición de *ceteris paríbus*, es aquella donde se tiene la ecuación de primer grado de la forma: *aS + bP + c = 0*, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). • De esta idea de la matematización de la demanda y la oferta, surgen otros constructos económicos. Por ejemplo, la noción de costos, ingresos y *beneficios*. Todos son

	considerados por Cournot como funciones que dependen del precio. • Derivadas de la ley de demanda y ofertas, surgen la función costo, ingreso y beneficio. Se parte de la relación básica: *B= I – C, donde B representa los beneficios, I los ingresos y C los costos totales de producción*. • Por su parte, los costos de producción (C) son clasificados en fijos (CF) y variables (CV), por lo que se puede construir la relación C= CF + CV. Pero a su vez, los costos están relacionados a la demanda Q; por lo que se puede hablar de la función costos *C = f(Q).* En el caso más simple, la función de costos se puede describir como C = a+bQ; con a,b reales cualesquiera no nulos simultáneamente (siendo a los costos fijos, b un parámetro asociado a la demanda). El valor de b, que matemáticamente es la pendiente de la recta, representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien (*costo marginal* del bien) • El ingreso I, es definido como el dinero total proveniente de la producción de Q unidades de un bien, cuyo precio unitario en el mercado es P; Simbólicamente: I=PQ; por lo que se puede considerar la función ingreso definida como *I = f(Q).* • Como los beneficios se definen en atención a los ingresos y los costos, y ambos depende de la demanda Q, entonces es posible hablar de la función beneficios definida como *B = f(Q)*.
Recursos:	Hipertexto, herramientas (digitales o no) para la construcción del cuadro, internet, guía instruccional del curso.
Tema/subtema del OVA:	Conoce algunos destacados matemáticos/economistas que contribuyeron al desarrollo de las ciencias económicas
Objetivo:	Vincular la Matemática con las ciencias económicas, a través de algunos matemáticos/economistas que contribuyeron al desarrollo de las ciencias económicas desde la óptica cuantitativa.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.

Actividades/Contenidos:	*Elaborar un infografía de un matemático/economista destacado dentro del campo* En esta nota histórica, esbozaremos unas semblanzas de Adam Smith, Alfred Marshall, John Maynard Keynes *y* Vilfredo Pareto, por sus importantes aportes matemáticos al desarrollo de la economía y áreas afines. **Adam Smith** (1723 - 1790). Economista escocés, fundador de la llamada economía clásica. Estudió ciencias morales y políticas en Oxford. En 1759 publica su "Teoría de los Sentimientos Morales " dedicándose más, a partir de ese momento, a la jurisprudencia y a la economía que a fas doctrinas morales. En 1776 muestra su obra cumbre: "Investigación sobre la naturaleza y causas de las riquezas de fas naciones" . Su fama fue inmediata y la reputación de Smith quedó establecida para siempre. Poco antes de su muerte fueron destruidos la mayoría de sus manuscritos por expreso deseo suyo y sin que mediara explicación alguna. Smith fue el gran defensor del *laissez faire* , es decir, de la no intervención del estado en los asuntos económicos. A su juicio, los gobiernos son derrochadores, fáciles de corromper, ineficaces e inclinados a otorgar privilegios en detrimento de la sociedad en su conjunto. Para promover el bienestar, los mejores medios son el estímulo del propio interés y el desarrollo de la competencia. De él es Ja famosa frase: " a pesar de que el individuo.sólo piensa en su ganancia propia, es conducido por una *mano invisible* a promover un fin que no estaba en sus intenciones y de este modo, al perseguir su propio interés, promueve el interés general.." **Alfred Marshall** (1842 - 1924). Matemático y economista inglés fundador de la moderna economía expuesta mediante representaciones gráficas.Su obra fundamental está dirigida a la determinación de los precios en el mercado . Aunque se dedicó principalmente a temas microeconómicos, también enfocó su atención a problemas propios de la economía agregada; su análisis se desarrolló en torno a la teoría cuantitativa del dinero, según Ja cual existe una relación directa *y* estable entre el volumen de dinero y el nivel de precios. Entre los aportes más importantes de Marshall tenemos: 1. La teoría de la demanda, en Ja que expone la relación funcional existente entre el precio de un bien y la cantidad de éste que viene demandada, fundamento sobre el cual se desarrollarán todas las investigaciones teóricas y estadísticas acerca de la mi

2. Exposición de las condiciones necesarias y suficientes para definir un régimen de competencia
3. Análisis de los costos y, sobre la base del mismo, estudio de la forma en que las empresas y la industria se adaptan a las condiciones del mercado a corto y a largo plazo.
4. Creación de los conceptos de elasticidad de la demanda, excedente del consumidor, economías externas e internas, y de los principios de complementariedad y de sustitución. Aunque Marshall pensó sus obras para que fueran de utilidad tanto al lego como al hombre de negocios, su influencia se dejó sentir, principalmente, entre sus colegas economistas, y pronto se convirtió en el economista más sobresaliente de su época. Aparte de la popularidad general de sus libros, su influencia aumentó por sus enseñanzas en Cambridge, donde formó a la gran mayoría de los economistas de la siguiente generación. Esta influencia ayuda a explicar la razón por la cual los métodos de razonamiento marshallianos se encuentran aún en muchas de las obras de economistas de la actualidad

John Maynard Keynes (1883 - 1946). Destacado economista inglés fundador de la escuela económica neoclásica. Se educó en Elton y en el King's Coflege de Cambridge. Interesado primeramente por las matemáticas y la filosofía, pasó a la economía bajo la influencia de A. Marshall quien fuera su profesor. En 1936 publicó su obra fundamental: La teoría general del empleo, el interés y el dinero", rompiendo definitivamente con la ortodoxia neoclásica e iniciando así una nueva época para la teoría y la política económica. La Teoría General de Keynes constituyó una verdadera revolución en varios aspectos: invalidó una buena parte de los supuestos económicos de la teoría clásica , sentó las bases para una economía práctica dando al gobierno el rol activo del promotor del orden económico , subdividió ra demanda de bienes y servicios de toda la economía (demanda total agregada) en dos elementos : la demanda de bienes de consumo y la demanda de bienes de inversión generando esto un aporte fundamental en su análisis de ta teoría de la renta .nacional. Keynes fue una figura importante, tanto en el mundo de los negocios como en la vida académica; es considerado como el economista más conocido e influyente de su generación. Fue el máximo .exponente de la delegación deI Tesoro Británico en Ja conferencia de paz que siguió a Ja Primera Guerra Mundial i¡también fue Jefe de la Comisión de su país para la Organización del Fondo Monetario Internacional y del Banco Internacional de Reconstrucción y Desarrollo.

	Vilfredo Pareto (1843 - 1923). Economista italiano. Después de veinte años como ingeniero *y* de una educación intensiva en matemáticas y ciencias físicas, se interesó por los aspectos económicos de los problemas políticos de su época. En una primera fase de.sus estudios, desarrolló la aplicación de las matemáticas a la economía. Aunque su ley de la distribución del ingreso es sumamente conocida, su principal contribución al pensamiento económico fue su "Manuale di Economia Política (1906) ", en donde su argumentación de que la utilidad no era mensurable, le llevó a elaborar el concepto de curva de indiferencia. Sus estudios llevaron al establecimiento de la "situación económica eficiente": una situación es eficiente, en el sentido de Pareto, cuando no es posible mejorar el bienestar de ninguna persona sin empeorar el de alguna otra. En 1923, poco antes de fallecer, Mussolini lo nombró senador y lo recompensó con una cátedra que no llegó a ocupar.
Recursos:	Hipertexto, herramientas (digitales o no) para la construcción de infografía, internet, guía instruccional del curso.
Tema/subtema del OVA:	Hitos importantes en la aparición de la función afín en las ciencias económicas
Objetivo:	Reconocer algunos momentos claves en la introducción del concepto de función y función afín en el ámbito de las ciencias económicas
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Actividades/Contenidos:	*Construcción de un cuadro comparativo con los principales personajes, aportes y épocas donde se abordaron los temas de función en el ámbito de las ciencias económicas* • A partir de 1838, gracias a los trabajos de Cournot, se enuncian las primeras leyes económicas (demanda, oferta). Para mediados del siglo XIX, se comienza a utilizar el análisis matemático en el ámbito de la teoría económica de las riquezas • Cournot es quien formula y construye por primera vez un modelo matemático que pretende explicar la ley de demanda cuando enuncia que *La venta o la demanda anual D es, para cada mercancía, una función particular F(P) del precio p de la mercancía* Q = F(P).

	• Para 1841, se introduce la concepción matemática del punto de equilibrio de la mano de Rau Heinrich Karl. Con esta idea, plantea un nuevo enfoque o perspectiva, cuando asegura que si bien se han empezado a emplear fórmulas matemáticas para estudiar el comportamiento del mercado, quizás es mejor un enfoque geométrico, gráfico. • Para explicar la idea de punto de equilibrio en economía, partimos de la idea de la existencia de un precio *Pe* en donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales • En 1870, Jenkin Fleming, en su trabajo sobre representación gráfica de la demanda, traza juntas en un mismo plano, las curvas de oferta y demanda, tratándolas explícitamente como funciones. Representó en un sólo gráfico un sistema de dos ecuaciones (oferta y demanda) con dos incógnitas (precio y cantidad). • En 1874, Walras define y expresa matemáticamente (de forma simbólica y gráfica), la curva de la demanda, sustentándose en los aportes de Cournot, pero con un enfoque diferente. En este caso, la función de la demanda según Walras, es el producto de un programa de maximización de la utilidad en el que precios y rentas son los parámetros. Matemáticamente: Xi = D (p, m) donde p= (p1,…..pn), la cual es homogénea de grado cero en p y x, convexa y cumple con la ley de Walras p*. x=w para cualquier w • Con la teoría de las leyes de oferta y demanda del economista escocés Adam Smith (fundador de la economía clásica) en el año de 1976, en su obra intitulada *investigación sobre la naturaleza y causa de las riquezas de las naciones*; y el pensamiento neo-clásico promovido por matemático y economista Alfred Marshall; que se consolida la matematización de la economía en 1890. • Se conduce de esta manera a la *ecuación de la demanda f(Q,P) = 0.* El caso más simple de ecuación de la demanda bajo condición de ceteris paríbus, es aquella donde se tiene la ecuación de primer grado de la forma: aQ + bP + c = 0, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). Si a su vez, consideramos las condiciones de no negatividad mencionada en párrafos precedentes, entonces, se puede ver que la curva de la demanda en este caso es un segmento de recta ubicado en el primer cuadrante. • Se formula ecuación de la Oferta f(S,P) = 0. De manera análoga, El estado más simple de

	ecuación de la oferta bajo la condición de *ceteris paríbus*, es aquella donde se tiene la ecuación de primer grado de la forma: $aS + bP + c = 0$, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). • De esta idea de la matematización de la demanda y la oferta, surgen otros constructos económicos. Por ejemplo, la noción de costos, ingresos y *beneficios*. Todos son considerados por Cournot como funciones que dependen del precio. • Derivadas de la ley de demanda y ofertas, surgen la función costo, ingreso y beneficio. Se parte de la relación básica: *B= I – C, donde B representa los beneficios, I los ingresos y C los costos totales de producción*. • Por su parte, los costos de producción (C) son clasificados en fijos (CF) y variables (CV), por lo que se puede construir la relación C= CF + CV. Pero a su vez, los costos están relacionados a la demanda Q; por lo que se puede hablar de la función costos $C = f(Q)$. En el caso más simple, la función de costos se puede describir como C = a+bQ; con a,b reales cualesquiera no nulos simultáneamente (siendo a los costos fijos, b un parámetro asociado a la demanda). El valor de b, que matemáticamente es la pendiente de la recta, representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien (*costo marginal* del bien) • El ingreso I, es definido como el dinero total proveniente de la producción de Q unidades de un bien, cuyo precio unitario en el mercado es P; Simbólicamente: I=PQ; por lo que se puede considerar la función ingreso definida como $I = f(Q)$. • Como los beneficios se definen en atención a los ingresos y los costos, y ambos depende de la demanda Q, entonces es posible hablar de la función beneficios definida como $B = f(Q)$.
Recursos:	Hipertexto, herramientas (digitales o no) para la construcción del cuadro, internet, guía instruccional del curso.
Tema/subtema del OVA:	Función Demanda

Objetivo:	Abordar el estudio del fenómeno de la demanda de un bien o servicio, a través de la función afín.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	*Lectura guiada, y discusión reflexiva* En cualquier mercado, la cantidad de un bien, producto o servicio, que es comprado o demandado por determinada población, durante un cierto período de tiempo, depende de muchos factores entre los que cabe mencionar (a) el precio unitario del bien, (b) el precio de los sustitutos, (c) el ingreso de los consumidores, y (d) el número de consumidores, entre otros elementos. Si bien es cierto que, cada uno de estos factores afecta en mayor o menor medida la cantidad demandada por los consumidores en el mercado; la hipótesis propuesta en este modelo es suponer que todos los factores, a excepción del precio, permanecen constantes, durante un periodo de tiempo dado. De este modo, la cantidad demandada es una función del precio, y por lo tanto, se puede encontrar una relación entre la cantidad demandada Q, y el precio unitario del bien P. A esta relación, entre el precio y la cantidad demandada o comprada, es lo que se denomina como ecuación de la Demanda La ecuación de la demanda definida matemáticamente de esta manera, exige además que se consideren condiciones de no negatividad tanto a Q como a P, esto es, . La representación gráfica se denomina curva de la demanda, la cual se obtiene considerando Q (variable dependiente) en función de P (variable independiente). En los textos de Economía es usual representar dicha curva, utilizando el eje de las abscisas para la cantidad demandada Q, y el eje de las ordenadas para el precio P. Vale la pena mencionar que, salvo circunstancias muy particulares, la función de la demanda es decreciente, ya que la tendencia en los consumidores es a comprar menos a medida que el precio aumenta. El caso más simple de función de la demanda bajo esta condición de ceteris paríbus, es

	aquella donde se tiene la expresión de primer grado de la forma: aQ + bP + c = 0, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). Si a su vez, consideramos las condiciones de no negatividad mencionada en párrafos precedentes, entonces, se puede ver que la curva de la demanda en este caso es un segmento de recta ubicado en el primer cuadrante.
Recursos:	Hipertexto
Tema/subtema del OVA:	Exploración gráfica de la función Demanda
Objetivo:	Reconocer las características de la función demanda, desde el sistema de representación gráfico; y valorando el efecto de los parámetros sobre la misma.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación
Actividades/Contenidos:	Utilizando la aplicación Geogebra que aparece más abajo, traza la grafica las siguientes funciones y determina cuáles y por qué son funciones de demanda, ¿cuáles son funciones afínes? a) Q-3P-40=0, P entre [1,10] b) P= 4/Q, Q mayor que 0 c) P + Q2 = 32 - Q; Q entre [0, 4]
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema práctico 1.
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de demanda en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín

Actividades/Contenidos:	La ecuación de la demanda de un cierto bien, durante un período T es: Q + 2P - 12 = 0 siendo Q las unidades del bien demandado y P el precio unitario en bolívares: Dibuja la curva de la demanda ¿Cómo varía la cantidad demandada al disminuir el valor de P?
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema Práctico 2
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de demanda en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	Se tienen dos bienes, B1 y B2, con ecuaciones de demanda dadas por : Bien B1 : 50 + 3P - 90 = Bien B2 : Q + 12P - 140 = 0 donde P viene expresado en bolívares: Si el precio unitario de ambos bienes es de 5,75, ¿cuál de los dos bienes tendrá mayor demanda ? ¿Existe algún precio del mercado para el cual la demanda de ambos bienes sea la misma ? En función de las curvas de demanda respectivas analiza, en términos del precio, en qué situaciones un bien es más (menos) demandado que el otro. Si un consumidor requiere 15 unidades de cualquiera de los dos bienes ¿cuál de ellos resultará más económico comprar?
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema Práctico 3
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de demanda en economía

Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	2. La ecuación que relaciona la cantidad demandada de un cierto bien con su precio unitario, durante un cierto período, es de tipo li Además, cuando el precio es de Bs. 80 la cantidad demandada es de 10 unidades, mientras que se demandan 20 unidades cuando el precio decrece a Bs. 60: Obtenga la ecuación de la demanda; Dibuja la curva de la demanda; Debido a los costos de producción, el menor precio de venta al que el artículo puede ofrecerse es de 55,75 , ¿cuál será el valor de la demanda máxima?
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Función Oferta
Objetivo:	Abordar el estudio del fenómeno de la oferta de un bien o servicio, a través de la función afín.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal
Actividades/Contenidos:	*Lectura guiada, y discusión reflexiva* Del mismo modo como la demanda se refiere a la cantidad de un bien o servicio que los consumidores están dispuestos a adquirir o comprar; la oferta se refiere a la cantidad de ese bien o servicio que los productores están dispuestos a colocar en el mercado para su venta. Nuevamente, así como la demanda se ve afectada por distintos factores, con la oferta no pasa distinto. Por ejemplo, (a) los costos de producción, (b) el valor de la mano de obra, (c) el costo de la materia prima; (d) regulaciones y/o normativas legales, (e) infraestructura y equipamiento, (f) comportamiento de los consumidores, así como (g) situaciones económicas locales, regionales,

	nacionales o globales; son algunos factores que afectan la oferta. Si se considera la condición ceteris paríbus aplicada en el caso del estudio de la demanda, es decir, su suponemos fijos o constantes todos estos factores mencionados en el párrafo anterior (o cualquier otros factores a considerar); a excepción del precio P; entonces se obtiene una relación entre la oferta S y el precio P; que da lugar a la ecuación de la oferta. La ecuación de la oferta definida matemáticamente de esta forma, considera, al igual que su homóloga, la ecuación de demanda, condiciones de no negatividad tanto a S como a P, esto es, $S^{3}0$, $P^{3}0$. Su representación gráfica se denomina curva de la oferta, la cual se obtiene considerando S (variable dependiente) en función de P (variable independiente). En los textos de Economía es usual representar dicha curva, utilizando el eje de las abscisas para la cantidad ofertada S, y el eje de las ordenadas para el precio P. Ahora bien, En contraposición a la curva de la demanda, la función de la oferta es creciente ya que la tendencia en los productores es a ofrecer más cantidad de bienes a medida que el precio del bien sea mayor. El estado más simple de ecuación de la oferta bajo la condición de ceteris paríbus, es aquella donde se tiene la expresión de primer grado de la forma: $aS + bP + c = 0$, siendo a, b, y c números reales cualesquiera (con a y b un nulos simultáneamente), es decir, una función afín (en su forma implícita). Si a su vez, consideramos las condiciones de no negatividad mencionada en párrafos precedentes, entonces, se puede ver que la curva de la demanda en este caso es también, un segmento de recta ubicado en el primer cuadrante
Recursos:	Hipertexto
Tema/subtema del OVA:	Exploración gráfica de la función Oferta
Objetivo:	Reconocer las características de la función oferta, desde el sistema de representación gráfico; y valorando el efecto de los parámetros sobre la misma.
Obstáculo(s)	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación

Epistemológico(s) abordado(s):	
Actividades/Contenidos:	Representa las siguientes funciones, que e indica si son o no ejemplos de funciones de oferta: a) 3S = 15 + 12 P b) 1,5S -12 = Ln P
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema Práctico 1
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de oferta en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	La ecuación de Ja oferta de un cierto bien, durante un período T es: S - 20P= 0 , en el intervalo [9.75; 50.25] para P siendo S la cantidad ofrecida en Kg., y P el precio unitario en bolívares: Traza la curva de la oferta Determina la oferta máxima y la oferta mínima.
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema Práctico 2
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de oferta en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s)	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación

abordado(s):	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	Se tienen dos bienes A y B, cuyas funciones de ofertas están dadas por: P=5S-20 y 15S - P = 120, respectivamente. Un consumidor acude al mercado con las intenciones de comprar uno cualquiera de dichos bienes: si el consumidor está dispuesto a pagar Bs. 12 por cada unidad del bien comprado, ¿cuál de los dos bienes debería comprar ? Apoyándose en las curvas de la oferta de cada bien, analice en términos del precio, en qué situaciones hay más(menos) existencias de un bien en relación al otro.
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema Práctico 3
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de oferta en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	Una compañía va a entregar mensualmente 5000 linternas de bolsillo a un precio de Bs. 500 la unidad; si el precio unitario es de Bs. 350, ofrece sólo 2000 unidades. Suponiendo que la ecuación de la oferta es lineal: Obtenga la ecuación de la oferta Dibuje la curva de la oferta Si el precio unitario de las linternas está restringido a tomar valores en el intervalo [290,75 ;610,50), ¿ cuáles serán los valores máximo y mínimo de la cantidad ofrecida por la compañia?.
Recursos:	GeoGebra. Guía instruccional del curso

Tema/subtema del OVA:	Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Objetivo:	Estudiar algunos fenómenos y conceptos económicos desde la visión matemática de la función afín
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Actividades/Contenidos:	*Lectura dirigida, y debate guiado* De esta idea de la matematización de la demanda y la oferta, surgen otros constructos económicos. Por ejemplo, la noción de costos, ingresos y beneficios. Todos son considerados por Cournot como funciones que dependen del precio. Por ejemplo, en el caso de los ingresos, que no son más que las ventas multiplicadas por el precio de la mercancía, pero esto no es más que el producto de la demanda por el precio, nótese inclusive, la relación de proporcionalidad entre ingreso y precio, en función de la demanda, que simbólicamente se representa por la expresión . Pero veamos un poco más en detalle. Dos de las funciones fundamentales que toda organización de producción cumplen son, por un lado, la elaboración de bienes o servicios para su consiguiente comercialización y venta; y por otro, adquirir insumos, contratar mano de obra o invertir en infraestructura para la producción de tales bienes. En consecuencia, una de las más importantes decisiones que debe tomar cualquier empresario, está relacionada con la cuestión de ¿qué cantidad debo producir, a qué costo, y con cuanta utilidad o beneficio? Bueno, eso depende del precio de venta y del costo de producción; esta decisión es guiada por el deseo de maximizar el beneficio, definido corno la diferencia entre el ingreso y el costo total. Entonces, tenemos la fórmula $B=I-C$, donde B representa los beneficios, I los ingresos y C los costos totales de producción.
Recursos:	Hipertexto, guía instruccional del curso.

Tema/subtema del OVA:	Función Costos
Objetivo:	Reconocer las características de la función costos, desde los diversos sistemas de representación y los parámetros que la definen.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín
Actividades/Contenidos:	*Lectura dirigida, y debate guiado* En relación a los costos; estos suelen clasificarse en dos tipos. Los costos fijos (CF), que son aquellos que no dependen directamente de las cantidades producidas tales como el mantenimiento de maquinaria; el alquiler de un galpón, pago de personal administrativo, o la adquisición de equipos; y los costos variables (CV), los cuales sí están relacionados de manera directa con la cantidad de bienes producidos, tales como el costo de la materia prima, transporte, o pago de mano de obra. Estos gastos aumentan o disminuyen en función del aumento o disminución de la producción. Por lo tanto, se puede establecer la relación $C = CF + CV$. En todo caso, se aprecia que existe una dependencia de origen funcional – matemáticamente hablando – entre el costo C y la demanda Q. Dicha relación función se denomina función costo. Llamamos función de costo de un bien B, en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción Q, el costo total asociado C. Es decir a la función: $C = f(Q)$ con Q y C mayores o iguales que cero. A la representación gráfica de la función de costo, se le denomina como curva de Costo. Y al igual que en el caso de la ecuación de demanda u oferta, es común considerar que la curva de costos sea una recta (o un segmento de recta contenido en ella), por lo que su expresión analítica sería $C= a+bQ$; con a, b números reales cualesquiera no nulos simultáneamente.

	En este caso, un estudio particular de los valores de a y b, lleva a considerar que el valor de a representa los costos fijos, basta con considerar en este caso, Q=0, para obtener C=a. Siendo el costo variable bQ. El valor de b, que matemáticamente es la pendiente de la recta, representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien… a este valor lo llamamos costo marginal del bien y lo denotamos por CMa. En otras palabras, el incremento en el costo de producción cuando se pasa de elaborar Q unidades de un bien a Q+1 unidades, es lo que se denomina costo marginal.
Recursos:	Hipertexto, guía instruccional del curso. Geogebra
Tema/subtema del OVA:	Función Ingresos y Beneficios
Objetivo:	Reconocer las características de la función Ingresos y Beneficios, desde los diversos sistemas de representación y los parámetros que las definen.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín
Actividades/Contenidos:	*Lectura dirigida, y debate guiado* Por otro lado, se supone que cualquier empresa que produzca un bien o servicio, lo hace con el propósito de obtener algún tipo de beneficio –usualmente monetario-, producto de la venta de dicho producto. Así, el ingreso I, es el dinero total proveniente de la producción de Q unidades de un bien, cuyo precio unitario en el mercado es P; por lo que se tiene que I=PQ. Además, en la mayoría de los casos P y Q están a su vez relacionados y en consecuencia, el ingreso puede ser expresado solamente en términos de Q o en términos de P; por lo que define la función ingreso de un bien, en el período T, "a la función que nos muestra para cada nivel de producción Q, el ingreso proveniente de la venta, I. Es decir a la función I=f(Q): con I, Q mayores o iguales a cero. Su representación

	gráfica se denomina curva de ingresos. Ahora bien, ya se ha mencionado que toda empresa desea obtener – y maximizar – sus beneficios. Tomando en consideración que los beneficios corresponden a los ingresos menos los costos, , y que tanto I como C están directamente relacionados con la producción Q; pues de igual manera lo está B; por lo que podemos hablar de la función de beneficio. Por eso, llamamos Función de Beneficio de un bien en el período T, a la función que nos muestra para cada nivel de producción Q, el beneficio obtenido B. Es decir a la función: B = f(Q) con Q mayor o igual a cero Tanto en el caso de la función ingreso, como en la de la función de beneficio; es usual manejar modelos iniciales donde su representación gráfica sean rectas; es decir, correspondan a funciones afines (o lineales).
Recursos:	Hipertexto, guía instruccional del curso. Geogebra
Tema/subtema del OVA:	Problema práctico 1
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de costos, ingresos y beneficios en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín
Actividades/Contenidos:	La función de beneficio de un bien, viene dada por B= -25000 + 320 Q . Por cada 10 unidades de aumento en la producción, se sabe que el ingreso se incrementa en Bs. 5354,25 . ¿Cuál es el costo de producir 90 unidades del bien?
Recursos:	GeoGebra, Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema práctico 2
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de costos, ingresos y beneficios en economía

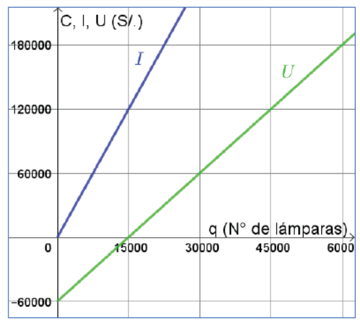
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín
Actividades/Contenidos:	La función de costo de un bien es: C= 4680,35 + 200 Q: Obtenga el costo fijo y el costo variable Determina el costo marginal ¿Cuál es el nivel de producción en donde se igualan el costo fijo y el costo variable? Dibuja las curvas de costo fijo, costo variable y costo total sobre un mismo sistema de ejes.
Recursos:	GeoGebra, Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema práctico 3
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas de costos, ingresos y beneficios en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín
Actividades/Contenidos:	Una empresa puede vender un determinado artículo a un precio unitario de Bs.70 . El costo fijo de producción es de Bs.8000, mientras que el costo marginal se estima en Bs. 30/unidad: Obtenga las funciones de costo e ingreso Dibuja sobre un mismo sistema de ejes las curvas asociadas a las funciones anteriores, determina su punto de intersección y da una interpretación económica al respecto Obtenga la función de beneficio, dibuja fa curva de beneficio y haz un análisis económico de la misma

Recursos:	GeoGebra, Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Punto de Equilibrio
Objetivo:	Reconocer las características del punto de equilibrio, desde los diversos sistemas de representación y los parámetros que lo definen.
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	*Lectura dirigida, debate guiado* Para 1841, se introduce la concepción matemática del punto de equilibrio de la mano de Rau Heinrich Karl. Para Karl, la influencia de las variaciones tanto de oferta como de demanda sobre el precio de un producto, depende de la pendiente de las curvas de ambos conceptos. Lo anterior tiene validez siempre y cuando se mantengan constantes todas las variables de la situación en estudio (ceteris paribus), es decir, varía el precio, y permanecen constantes la necesidad de la mercancía (demanda) y la renta del consumidor (oferta). Partiendo del postulado económico que afirma que el precio de un bien o servicio está determinado por el balance entre la demanda y la oferta, surge el concepto de punto de equilibrio. Para explicar la idea de punto de equilibrio en economía, partimos de la idea de la existencia de un precio Pe en donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales; y considera que, si Pt es un precio inferior a Pe, la cantidad demandada Qe supera a la cantidad ofrecida St, generándose una situación de escasez en el mercado. Bajo estas condiciones, y dada la oferta limitada del bien o servicio, se tenderán a invertir mayor cantidad de dinero para la adquisición del producto. Entonces, es aquí donde ambas fuerzas – oferta y demanda – empiezan una lucha o influencia mutua; ya que el alza de precios lleva a la empresa a querer vender más, pero a los compradores a consumir menos; y sólo cuando oferta y demanda sean igualadas, se habrá alcanzado el punto de equilibro.

	Ahora, si se considera un precio Ph mayor a Pe, entonces, en este caso, se creará lo que denominan los economistas como excedente, es decir, hay más productos de los que el mercado consumidor puede adquirir. En este caso, los productores tendrán, por ejemplo, dificultades para la venta de los bienes generados; y en consecuencia, se acumulará el inventario y los costos que él ocasiona. Dicha situación, además, implica una disminución en la producción del producto, y a una posible reducción en los precios, con el fin de estimular y atraer a los consumidores y compradores. Esto hará que nuevamente se incentive la demanda; y el precio dejará de bajar hasta que se equilibren estas fuerzas, la cantidad demandada sea la misma que la ofertada, alcanzándose así el punto de equilibrio.
Recursos:	Hipertexto, guía instruccional del curso.
Tema/subtema del OVA:	Problema práctico 1
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas asociados al punto de equilibrio en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Actividades/Contenidos:	Si las ecuaciones de la demanda y de Ja oferta de un determinado bien son, respectivamente : 2 Q + 15 P - 180 = O. S - 6 P + 18 = 0. Obten el punto de equilibrio.
Recursos:	GeoGebra, Guía instruccional del curso

Tema/subtema del OVA:	Problema práctico 2
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas asociados al punto de equilibrio en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Actividades/Contenidos:	Un determinado bien opera en un mercado de competencia con una ecuación de demanda dada por Q = 120000 - 20000 P , y una ecuación de la oferta S = 20000 P: ¿Qué efecto tiene sobre el precio y la cantidad de equilibrio del bien, si. el gobierno decide cobrar un impuesto sobre las ventas de Bs. 2 por unidad vendida? ¿Quién paga te el impuesto? ¿Cuál es la cantidad total de impuesto que recauda el Gobierno?
Recursos:	GeoGebra, Guía instruccional del curso
Tema/subtema del OVA:	Problema práctico 3
Objetivo:	Utilizar la función afín para resolver problemas asociados al punto de equilibrio en economía
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Actividades/Contenidos:	Para cada una de las siguientes condiciones, obten las coordenadas del punto de equilibrio: La ecuación de la demanda es Q + 2P -10= 0, y la ecuación de la oferta es 2S-3P - 2= 0 Se mantiene la ecuación de la demanda del apartado anterior, pero la ecuación de la oferta es ahora: 2S - 3P - 8 = 0 La ecuación de la oferta es la misma del apartado (b) y la ecuación de la demanda es Q + 2P - 12 = 0.
Recursos:	GeoGebra, Guía instruccional del curso

Tema/subtema del OVA:	Problemas integradores (1)
Objetivo:	Abordar de manera integral los conceptos económicos estudiados hasta el momento, ofreciendo soluciones a problemas concretos, producto del análisis económico, basado en el estudio de la función afín
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	Por cada Bs. 10 de reducción en el precio unitario de un bien, los usuarios están dispuestos a demandar 5 unidades más del producto. Por otra parte, por cada Bs. 40 de aumento en el precio unitario, los empresarios están dispuestos a ofrecer 12 unidades más del producto. La ordenada en el origen de la recta de la demanda es de Bs. 80, mientras que la recta de la oferta pasa por el origen de coordenadas. Obtenga: • Las ecuaciones de la demanda y de la oferta • Las representaciones gráficas de las ecuaciones • Las coordenadas del punto de equilibrio • Las nuevas coordenadas del punto de equilibrio, si el Gobierno decreta un impuesto de Bs. 4 por cada unidad vendida.
Recursos:	GeoGebra, guía instruccional
Tema/subtema del OVA:	Problemas integradores (2)
Objetivo:	Abordar de manera integral los conceptos económicos estudiados hasta el momento, ofreciendo soluciones a problemas concretos, producto del análisis económico, basado en el estudio de la función afín
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso

	especial e introductorio de la función afín Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	 En la figura se muestra las representaciones gráficas del ingreso I y la utilidad U de una fábrica de lámparas, en base a la información que proporcionan dichas representaciones responda • ¿Cuál es el precio unitario del producto? • ¿Cuál es el nivel de ventas mínimo para dejar de perder? • ¿Cuánto es el valor del costo total para el ítem anterior • ¿Cuál es el valor del costo fijo? • Trace la gráfica del costo total en la figura
Recursos:	GeoGebra, guía instruccional
Tema/subtema del OVA:	Modelización, ciencias económicas, y función afín
Objetivo:	Reconocer la importancia del estudio de situaciones concretas que involucran conceptos económicos, y presentar modelos matemáticos sencillos que expliquen su comportamiento
Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):	Manejo limitado de múltiples sistemas de representación Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas. Confusiones entre ecuación lineal y función afín
Actividades/Contenidos:	*Lectura guiada, debate dirigido* La enseñanza de la matemática en carreras de Ciencias Económicas debe estar sujeta a la utilización en las clases de ejemplos de aplicaciones económicas concretos. De esta manera los contenidos impartidos estimulan y propician la motivación y la independencia en el pensamiento creador del estudiante. En particular el tema de funciones, pues constituye una herramienta fundamental para el análisis, la

cuantificación y la modelización de fenómenos económicos y sociales.

Las carreras de Ciencias Económicas, tales como Licenciatura en Economía, Licenciatura en Contabilidad y Finanzas y Licenciatura en Turismo contemplan dentro de la asignatura Matemática Superior un tema sobre funciones y sus aplicaciones económicas. No es un secreto que los estudiantes terminan la enseñanza media sin apropiarse adecuadamente del concepto función. Es por ello que cuando inician sus estudios universitarios presentan serias dificultades al respecto.

La comprensión del concepto función no se reduce a la reproducción de su definición ni tampoco a la realización de una serie de procedimientos para calcular el valor de una función para un argumento dado, para determinar sus ceros o la monotonía de la función. Este reduccionismo puede llevar a que los estudiantes no comprendan que el objeto función ha sido construido de manera expresa para el estudio de los fenómenos sujetos a cambio y que en lugar de trabajar con variables, lo hagan con incógnitas.

El concepto función es uno de los más básicos en matemáticas y resulta esencial para el estudio del cálculo. Por ello se debe insistir en la importancia de las funciones en la Economía. En especial el estudio de la función lineal dado su gran aplicación a situaciones económicas.

La función lineal debe analizarse, dándole interpretación económica a la pendiente y la intersección, en las distintas funciones lineales económicas que se utilizan, tales como oferta, demanda, costos, ingreso, ganancia y producción.

Para el buen desarrollo de las clases es importante una selección adecuada de los métodos a utilizar. Como es conocido, en cualquier contenido matemático que sea objeto de estudio, cuando se introducen problemas de aplicación, aumenta la dificultad en cuanto a la comprensión por parte de los estudiantes. Por esa razón, en las conferencias se utiliza, preferentemente, la exposición problémica y la conversación heurística, en dependencia de la complejidad del problema que se esté resolviendo. Si el problema es de difícil comprensión se utiliza la exposición problémica, en los

<table>
<tr><td></td><td>otros casos se emplea la conversación heurística.

Se debe tener en cuenta que la habilidad para resolver problemas matemáticos vinculados con situaciones económicas de aplicación de la función lineal, no se forma a partir de la repetición de acciones ya elaboradas previamente, sin atender a cómo se han asimilado y el nivel de significación que éstas tienen para los estudiantes atendiendo a sus experiencias, su disposición hacia la actividad; de ahí la necesidad de enfocar como parte de la formación de habilidades el sistema de conocimientos (conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos) a partir de situaciones problémicas.</td></tr>
<tr><td>Recursos:</td><td>Hipertexto, Guía instruccional del curso</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Tema/subtema del OVA:</td><td>Aprendiendo a modelizar en economía con la función afin</td></tr>
<tr><td>Objetivo:</td><td>Generar modelos matemáticos que reflejen situaciones que involucran conceptos o nociones económicas como precio, oferta, demanda, ganancias, costos, etc.</td></tr>
<tr><td>Obstáculo(s) Epistemológico(s) abordado(s):</td><td>Manejo limitado de múltiples sistemas de representación
Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas.
Confusiones entre ecuación lineal y función afín</td></tr>
<tr><td>Actividades/Contenidos:</td><td><table>
<tr><th>Peso (g)</th><th>Precio total ($)</th></tr>
<tr><td>100</td><td>0,40</td></tr>
<tr><td>200</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td>250</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td>600</td><td>2,40</td></tr>
<tr><td>1.000</td><td>4,00</td></tr>
</table>
En los supermercados las cajeras disponen de balanzas en las cuales se puede teclear el precio por kilogramo de la verdura que se pesa. Estas balanzas emiten un ticket donde se indica el precio total a pagar, correspondiente a la cantidad de verdura pesada. La tabla a la izquierda presenta las distintas cantidades pesadas y el precio total para cada una de ellas, registrados para el tomate. Construya un modelo matemático que explique el comportamiento de este fenónemo</td></tr>
<tr><td>Recursos:</td><td>GeoGebra, guía instruccional</td></tr>
</table>

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

En cuanto al primer objetivo específico, que consistió en *describir la génesis y evolución histórica del concepto de función afín, reconociendo situaciones, problemas, personajes y épocas o momentos históricos que contribuyeron a su desarrollo, especialmente en el ámbito de las ciencias económicas;* se han podido identificar tres etapas/épocas del desarrollo de la función afín dentro del ámbito de las ciencias económicas: (a) la proto-matemática en la antigüedad; (b) la para-matemática hasta la edad media; y (c) la matemática en la época moderna y contemporánea.

En este sentido, la noción de función matemática en general, y de la de función afín, en particular, deriva de un extenso proceso de evolución y desarrollo; que proviene a su vez, de reflexiones, contradicciones y diversos puntos de vista en su estudio. Con el fin de refinar y mejorar las definiciones o enfoques precedentes; fueron emergiendo nuevas configuraciones y concepciones; pero con ellas, surgieron a su vez, nuevos obstáculos, de origen epistemológico.

Resalta en la última etapa señalada, el abordaje de la función afín como modelo que rige leyes económicas, pero donde la introducción de la función afín no se hace sobre la base de modelos reales reconocidos por la literatura especializada, sino que simplemente, desde una concepción netamente matemática, se apuesta a que existan comportamientos de fenómenos económicos que puedan ser modelados por medio de funciones afines.

Esto parece indicar un obstáculo epistemológico en la comprensión de la función afín en ciencias económicas, puesto que no se naturaliza, sino que se impone como alternativa matemática, dejando de lado la posibilidad de modelar situaciones contextualizadas dentro del ámbito de la economía y áreas afines.

Lo anterior, nos conduce al segundo objetivo de investigación, que fue el de *reconocer los obstáculos epistemológicos relacionados al surgimiento del concepto de función afín, especialmente en el ámbito de las ciencias económicas*. En este sentido, fueron identificados cinco obstáculos epistemológicos: (a) Distorsiones en la conceptualización e interpretaciones de la función afín y lineal, (b) Manejo limitado de múltiples sistemas de representación; (c) Poco abordaje de la noción de proporcionalidad en el manejo de la función lineal como caso especial e introductorio de la función afín, (d) Desvinculación entre modelos matemáticos reales y concretos y las leyes económicas; y (e) Confusiones entre ecuación lineal y función afín.

Derivado de un estudio histórico, y por tanto, evolutivo, en torno a la función afín, en un contexto de las ciencias económicas, se ha podido identificar no sólo la génesis y el desarrollo epistémico de este tema en el tiempo, sino que también ha permitido detectar una serie de obstáculos epistemológicos presentes en distintos momentos o etapas claves del desenvolvimiento de la función afín en general, y dentro de la economía en particular. Todo lo anterior debe ser tomado en consideración a la hora de la enseñanza de este tema en este contexto.

De esta última oración, se desprende las conclusiones en torno a al tercer objetivo propuesto en la investigación, que fue *reflexionar acerca de las implicaciones didácticas que conlleva la utilización de la historia de la Matemática en la enseñanza de la función afín en el ámbito de las ciencias económicas, en el diseño de un OVA.* Al respecto, la conjugación de historia de la matemática y la tecnología digital, parecen ofrecer una interesante simbiosis, que se concreta en el diseño y creación de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), que toma en consideración los obstáculos epistemológicos detectados a través del análisis histórico y evolutivo; para organizar las actividades de aprendizaje que conforman el OVA. Así mismo, el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, para graficar funciones lineales, facilita el manejo de múltiples sistemas de representación; lo que permite que el estudiante tenga un papel más activo y se presenten de forma más dinámica los contenidos de función afín en contextos de las ciencias económicas.

Recomendaciones

1. Extender el uso de los análisis históricos-epistemológicos a otros conceptos matemáticos que intervienen en las ciencias económicas.
2. Estudiar a profundidad, las implicaciones didácticas y cognitivas de cada uno de los obstáculos epistemológicos identificados a los largo de la investigación.
3. Combinar las tecnologías digitales con enfoques de modelización matemática y aprendizaje basado en proyectos; que permitan contextualizar el aprendizaje de la matemática en áreas de conocimiento como las ciencias económicas.
4. Evaluar el desempeño y rendimiento estudiantil derivado de la implementación y uso del OVA En distintos entornos educativos

REFERENCIAS

Acosta, M. y Joya, A. (2015).*Ingeniería didáctica para la enseñanza de la función lineal: análisis preliminar*. [Documento en línea]. Disponible: https://n9.cl/ucqib [Consulta: 2018, Marzo 12]

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2008). *Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad* [Documento en línea]. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, ALME 23. México: CLAME. Disponible: https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/productos/3803/ [Consulta: 2019, Noviembre 19]

Acuña, M. (2017). *Objetos Virtuales de Aprendizajes en línea*. [Documento en línea]. Disponible:https://www.evirtualplus.com/objetos-virtuales-de-aprendizajes-linea/ [Consulta: 2019, Noviembre 19]

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, N., y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, [Revista en línea], 17, 52-61. Disponible: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4674652 [Consulta: 2019, Noviembre 19]

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*. [Revista en línea]. Disponible:https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf [Consulta: 2018, febrero 28]

Apóstol, T. (1988). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal*. (2ª ed). Colombia: Reverte

Arias, F. (2006).*El Proyecto de Investigación. Introducción a la Metodología científica*. (5ta Edición). Editorial Episteme. Caracas – Venezuela.

Arya, J. y Lardner, R. (2010) *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. (8va. ed.). México: Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.

Ávila, A. (2013). ¿Qué hay detrás de una matematización? El caso de las primeras teorías económicas. *PERSPECTIVAS. Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales* [Revista en línea], 7(2), 3-26. Disponible: http://publicaciones.eco.uaslp.mx/VOL12/Paper01-7(2).PDF [Consulta: 2019, Noviembre 19]

Azcárate, C. y Deulofeu, J.(1990). *Funciones y Gráficas*. España: SINTESIS.

Azócar, R. (2015). *La visión epistemológica de la educación*. [Documento en línea]. Disponible: https://www.aporrea.org/educacion/a207491.html [Consulta: 2018, Marzo 12]

Bachelard, G. (2000). *La Formación del Espíritu Científico*. (23ra edición). Buenos Aires, Argentina: Ediciones Siglo XXI

Balestrini, M. (2006). *Como Se Elabora El Proyecto De Investigación*. (7ma edición). México: Consultores Asociados. Servicio Editorial.

Barajas, C.; Fulano, B.; Ríos, W.; Salazar, L.; Pinzón, A. (2018). Función constante, lineal y afín. En Gómez, Pedro (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD* [Capítulo de libro en línea], 131-185. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible: http://funes.uniandes.edu.co/8703/1/G3_DocumentoBase_FuncionConstanteLinealAfin.pdf [Consulta: 2019, Noviembre 19]

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* [Revista en línea], 1(2), 2-7. Disponible: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6886 [Consulta: 2019, Noviembre 19]

Benítez, M.G. (2010). El modelo de diseño instruccional Assure aplicado a la educación a distancia. *Tlatemoani, Revista Académica de Investigación*, 1, 1-12. Disponible en http://www.eumed.net/rev/tlatemoani/01/pdf/63-77_mgbl.pdf [Consulta: 2019, Noviembre 19]

Bell, E.T. (2016). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de cultura económica.

Bell, E.T (2015). *Grandes Matemáticos*. Buenos Aires: Editorial Lozada.

Belloch, C. (2013). *Diseño instruccional* [Documento en línea]. Unidad de Tecnología Educativa. Universidad de Valencia. Disponible: https://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA4.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Editorial alianza S.A Madrid.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La PenséeSauvage

Bugne, M. (2002). *Epistemología*. (3ra ed.). Buenos Aires: Editorial siglo XXI

Cámara, A. (2000). Aportaciones de la Matemática a la Metodología Económica. *Psicothema* [Revista en línea]. 12(2), 103-107. Disponible: http://www.psicothema.com/psicothema.asp?id=526 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* [Capítulo de libro en línea], 53-112. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible: http://funes.uniandes.edu.co/11904/ [Consulta: 2020, Marzo 7]

Castrillón, E. P. (2011). Propuesta de metodología de desarrollo de software para objetos virtuales de aprendizaje. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* [Revista en línea], 1(34), 113-137. Disponible https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194222473006 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Centro Nacional del Mejoramiento de la Ciencia. *CENAMEC*. (1998). Caracas: M.E

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. [Libro en línea]. Disponible: https://www.researchgate.net/publication/242760000_La_transposicion_didactica_Del_saber_sabio_al_saber_ensenado [Consulta: 2018, Marzo 12]

Cernea, D. y del Moral, M. (2005). *Diseñando objetos de aprendizaje como facilitadores de la construcción del conocimiento* [Documento en línea]. Disponible: https://n9.cl/gqfhj [Consulta: 2020, Marzo 7]

Collette, J. P. (1998). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Contreras, T. (2013). La modelización de la función afín: una mirada socioepistemológica. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa- ALME* 26, V.2 [Libro en línea]. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), México, 1151-1159. Disponible: https://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Cribeiro, J., Madrid, H. y Fraga, J.L. (2014). ¿Relación, función o ecuación? *El Cálculo y su Enseñanza* [Revista en línea], 5(5), 41-56. Disponible: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/CP6.bbf0a982b7788f.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática* [Libro en línea]. Universidad de Complutense Madrid. Editorial Popular. Disponible: http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/tendencias-innovadoras-en-educacion-matematica/ [Consulta: 2018, febrero 25]

D'Amore B. y Fandiño, M. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". México: Ediciones Educación Matemática

Dirección General de Educación a Distancia y Tecnologías de la UNLP. (2017) *Curso de eXelearnig: Instrumentos de diseño: iDevices.*

Dorrego, E. (2000). Flexibilidad en el diseño instruccional y nuevas tecnologías de la información y la comunicación [Documento en línea]. Universidad Nacional Abierta. Dirección de investigación y Postgrado (Compilación con fines instruccionales). Disponible: https://n9.cl/fspk8 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Domínguez, C., Organista, J. y López, M. (2018). Diseño instruccional para el desarrollo de contenidos educativos digitales para teléfonos inteligentes. *Apertura* [Revista en línea], 10(2), 80-93. Disponible: https://doi.org/10.32870/ap.v10n2.1346 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Fernández, A. (2017). *Aplicaciones de las Funciones a las Ciencias Administrativas. Matemática I. Módulo IV*. Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Gadamer, H. (1988). *Verdad y Método. Fundamentos de una hermenéutica filosófica*. Salamanca, España: Sígueme.

Godino, J. Batanero, C y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Universidad de Granada. [Documento en línea]. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/_[Consulta: 2018, mayo 07]

González, F (1995). *La Matemática. Una Excursión hacia su Objeto y Método. Maracay. La Investigación en Educación Matemática*. Maracay: Ediciones COPIHER.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA* [Revista en línea], 45, 17-28. Disponible: https://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf [Consulta: 2018, Marzo 12]

Grossman, S. (2012), *Algebra Lineal*, México D.F.: Mc Graw-Hill/interamericana

Hofmann K. y Kunze R. (1971). *Algebra Lineal*. México D.F.: Prentice Hall.

Heaussler, E. y Paul, R. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. (10ma ed.) [Libro en línea] México: Pearson, Prentice Hall. Disponible: http://fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar/~morellana/Matematicas-para-la-Administracion-y-Economia-Haeussler-Richard.pdf

Larson, R. Hostetler, R y Edwards, B. (2006*). Cálculo (8va edición).* México, D.F.: Editorial Mc Graw Hill

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media*. Lima: IMCA

Lages, E., (2001). *Geometría Analítica y Álgebra Lineal*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA.

Leithold, L. (2004). El cálculo. (7a ed.). México: Oxford Universuty Press-HARLA, México.

Lupiáñez, J. Rico, L. Segovia I y Ruiz-Hidalgo, J. (2015). Educación matemática en España. *Educación* M*atemática del siglo XXI* [Libro en línea]. Disponible:http://www.innovacion.ipn.mx/ColeccionLibros/Documents/matematicas/matematicas.pdf [Consulta: 2018, febrero 03]

Manfredi, V. (2008). *Funciones matemáticas ¿para qué se utilizan? La realidad de la función de las funciones lineales.* [Versión completa en línea] Trabajo de grado de licenciatura no publicado, Instituto Superior de Formación Docente. Argentina. Disponible: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2779659.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Martínez, M. Sánchez, P. (2011). ¿Toda grafica de línea recta es función lineal? [Documento en línea]. Disponible: http://www.elitv.org/documentos/maestria/Memorias2011/Ponencia%205.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Ministerio de Educación de Colombia. (2006). *Objetos virtuales de aprendizaje*. [Páginas Web en línea] Disponible: https://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/libroreda_0.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Muñoz, Y. (2015). *Análisis histórico–epistemológico de la noción de función en la obra la geometría de René Descartes*. [Versión completa en línea] Trabajo de grado no publicado, Universidad del Valle, Instituto de Educación y pedagogía, Colombia. Disponible: https://n9.cl/uv7x [Consulta: 2020, Marzo 7]

Naranjo, M. (2011). *Los obstáculos epistemológicos en el proceso de aprendizaje del límite de funciones matemáticas.* [Versión Completa en línea en línea]. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad del Zulia. Disponible en:http://tesis.luz.edu.ve/tde_arquivos/96/TDE-2012-05-21T14:56:43Z-3045/Publico/naranjo_maria.pdf [Consulta: 2018, Enero 25]

Orellana, M (2002). ¿Que enseñar de un tópico o tema? *Enseñanza de la Matemática* 11(2), 21- 42.

Palella, S. y Martins, F. (2012). *Metodología de la investigación cuantitativa*. Caracas, Venezuela: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Pérez, G. (2004). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes, Métodos*. Madrid, España: Editorial La Muralla.

Petro, L., Salas, D., Puerta, J., Berdella, L. (2018). Diseño e implementación de objetos virtuales de aprendizaje accesibles e interactivos. [Documento en línea]. Disponible: https://www.magisterio.com.co/articulo/diseno-e-implementacion-de-objetos-virtuales-de-aprendizaje-accesibles-e-interactivosn_[Consulta: 2020, Marzo 7]

Reigeluth. Ch. (2012). Teoría instruccional y tecnología para el nuevo paradigma de la educación. *RED, Revista de Educación a Distancia* [Revista en línea], 32, 1-22. Disponible: https://www.um.es/ead/red/32/reigeluth_es.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Rey Pastor, J., y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática*. Madrid: GEDISA

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática* [Revista en línea], 33, 11-27. Disponible: www.fisem.org/web/union [Consulta: 2020, Marzo 7]

Rico, L. (1997). *Organizadores del Currículo de Matemática*. [Documento en línea]. Disponible: http://funes.uniandes.edu.co/522/1/RicoL97-2529.PDF [Consulta: 2018, Marzo 02]

Rodríguez, E. y Valdivé, C. (2011). Análisis histórico de la función afín y la ecuación lineal en la economía desde el enfoque ontosemiótico. *Revista científica teorías enfoques y aplicaciones en las ciencias sociales*. [Revista en línea], 4(8), 17-29. Disponible:http://www.ucla.edu.ve/dac/revistateacs/articulos/Rev8-Art2-RodriguezyOtros.pdf [Consulta: 2018, Marzo 12]

Rodríguez, E. y Valdivé C. (2010). Significado institucional referencial de la función afín y ecuación lineal en la economía. *Gestión y Gerencia* [Revista en línea], 4(2), 63-87. Disponible: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4150698 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Rojas, B. (2014). *Investigación cualitativa fundamentos y praxis.* (3ra edición) Caracas, Venezuela: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Roldán, E (2013) *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica.* [Documento en línea]. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad nacional de Colombia. Disponible en: http://www.bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf [Consulta: 2017, Marzo 10]

Sánchez, P. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula.* [Documento en línea]. Trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá Colombia. Disponible:http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/4047/1/S%C3%A1nchezPe%C3%B1aDianaMarcela2016.pdf [Consulta: 2018, Marzo 12]

Sánchez, C., y Valdés, C. (2007). *Las Funciones un paseo por su historia*. Madrid, España: Nivola libros y ediciones.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw Hill.

Sastre, P., Rey, G. Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de educación matemática UNIÓN.* [Revista en línea]. Disponible:http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf [Consulta: 2018, febrero 29]

Smaldino, S., Russell, J., Heinich, Y., Molenda, M. (2007.) *Instructional Technology and media form learning.* [Libro en línea] USA: Prentice Hall. Disponible: https://www.pearsonhighered.com/assets/preface/0/1/3/4/0134287487.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Sierra, M. (1997). Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria. *Universidad de costa rica Revista eudoxus.* [Documento en línea]. Disponible:http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/122/116 [Consulta: 2018, febrero 27]

Spivak, M. (2005). *Cálculo Infinitesimal*. España: Editorial Reverté

Stewart, J. (2002). *Cálculo con trascendentes tempranas*. (4ta ed.) México: CENGAGE

Stephens, A. (2004). *Implementación de un estudio de caso usando learning objects para determinar la interoperabilidad entre diferentes plataformas e-learning*. [Documento en línea] Medellín: Universidad Eafit. Disponible: https://n9.cl/fgmr [Consulta: 2020, Marzo 7]

Suárez, Y. (2019). Diseño de un plan de formación docente para la integración de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Revista DIALÓGICA* [Revista en línea], 16(2),184-217. Disponible: https://issuu.com/dialogicaupel/docs/ [Consulta: 2020, Marzo 7]

Suárez Huz, Y. (2018). Consolidación de una línea de investigación en TIC y Educación Matemática. En Piña, M., Moreno, F., Vasamón, D., Ochoa, I., et al. (Eds.) *TIC y políticas públicas en educación. Su incidencia en el aula de clase*. Valencia, Venezuela: Universidad de Carabobo, pp. 176-189.

Suárez, Y. (2014).*El mapa de enseñanza-aprendizaje y la web 2.0: organizadores del contenido matemático.* Trabajo de ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. [Versión Completa en línea] Tesis Doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México. Disponible: https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/4064799.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Swkowski, E. (2002). *Cálculo y trigonometría con geometría analítica* (10ma ed.) Bogotá: Thomson.

Tamayo, M. (2003). *El Proceso de la Investigación Científica. Fundamento de investigación con manual de Evaluación de Proyecto*. (4º Edic.). México: Limusa, S.A.

Tiburcio, J. (2017). *Organización matemática de la función lineal y función afín en un libro de texto de segundo año de educación secundaria* [Versión completa en línea] Trabajo de grado de maestría no publicado, Pontificia universidad católica del Perú. Disponible: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/9444 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Trujillo, M., Castro, N. y Delgado, C. (2010) *El concepto de función y la teoría de situaciones* [Libro en línea] Bogotá: Universidad de la Salle. Disponible: https://n9.cl/3ersf [Consulta: 2020, Marzo 7]

Ugalde, W. (2014). Funciones: Desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet* [Revista en línea], 14(1).Disponible:https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1564 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2006). *Manual de Trabajos de Grado y Maestría y Tesis Doctoral.* (4ta. ed). Caracas: FEDUPEL.

Vásquez, A. (2002). Kart Heinrich Rau y el Diagrama Marshalliano de la Oferta y la Demanda. *Revista de Historia Económica* [Revista en línea]. Departamento de Economía Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid. Año XX(1). Disponible: https://e-archivo.uc3m.es/handle/10016/2181 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Wilhelmi, M., Godino, J., Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.) [Libro en línea], *Investigación en Educación*. Disponible: https://core.ac.uk/download/pdf/33252607.pdf [Consulta: 2020, Marzo 7]

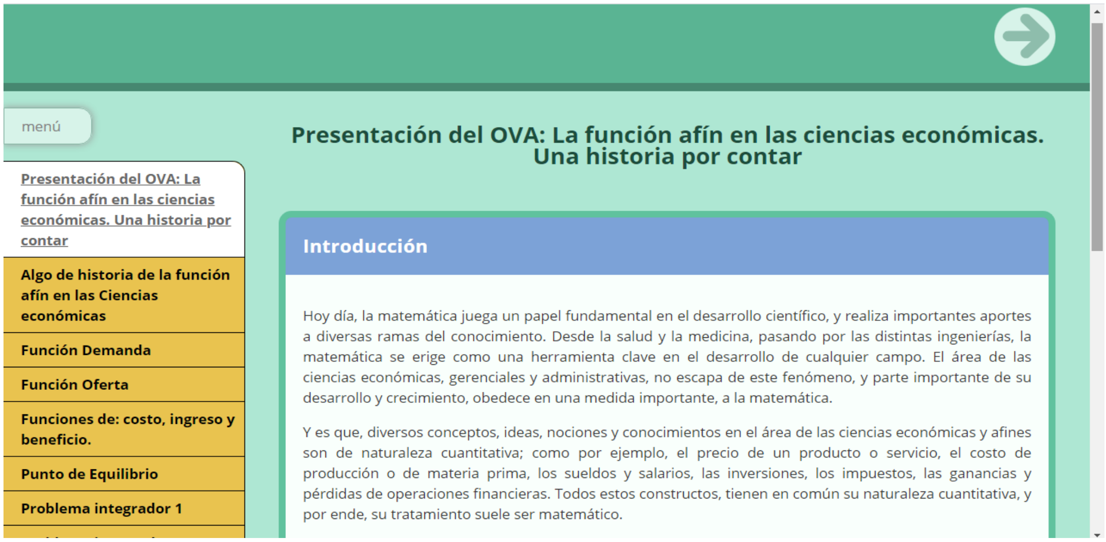
Wiley, D. (2000). *The Instructional Use of Learning Objects*. [Documento en línea]. Disponible:http://members.aect.org/publications/InstructionalUseofLearningObjects.pdf#page=7 [Consulta: 2020, Marzo 7]

Zarategui, J. (2002). ¿Por qué es preferible la función de demanda Marshalliana a la de Walras? *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales* [Revista en línea], 42, 111-124. Disponible: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=774139

Zúniga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de cálculo I.* [Documento en línea]. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Disponible en:http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcww829 [Consulta: 2018, febrero 03]

ANEXO A

OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar


menú
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Función Oferta
Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Punto de Equilibrio
Problema integrador 1
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Introducción
Hoy día, la matemática juega un papel fundamental en el desarrollo científico, y realiza importantes aportes a diversas ramas del conocimiento. Desde la salud y la medicina, pasando por las distintas ingenierías, la matemática se erige como una herramienta clave en el desarrollo de cualquier campo. El área de las ciencias económicas, gerenciales y administrativas, no escapa de este fenómeno, y parte importante de su desarrollo y crecimiento, obedece en una medida importante, a la matemática.
Y es que, diversos conceptos, ideas, nociones y conocimientos en el área de las ciencias económicas y afines son de naturaleza cuantitativa; como por ejemplo, el precio de un producto o servicio, el costo de producción o de materia prima, los sueldos y salarios, las inversiones, los impuestos, las ganancias y pérdidas de operaciones financieras. Todos estos constructos, tienen en común su naturaleza cuantitativa, y por ende, su tratamiento suele ser matemático.


menú
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Conociendo la Función afín.
Hitos importantes en la aparición de la función afín en las ciencias económicas
Conoce algunos destacados matemáticos/economistas que contribuyeron al desarrollo de las ciencias económicas
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Algo de Historia
La definición de función matemática en general, y de la de función afín, en particular, proviene de un largo proceso de evolución y perfeccionamiento; derivado a su vez, de reflexiones, desencuentros, contradicciones, vacíos y obstáculos. En el afán por corregir o refinar las definiciones o enfoques precedentes; fueron emergiendo nuevas configuraciones y concepciones; pero con ellas, surgieron a su vez, nuevos obstáculos, de origen epistemológico.
Destaca en la última etapa, donde se maneja la función afín como modelo que rige leyes económicas, que la introducción de la función afín no se hace sobre la base de modelos reales reconocidos por la literatura especializada, sino que simplemente, desde una concepción netamente matemática, se apuesta a que existan comportamientos de fenómenos económicos que puedan ser modelados por medio de funciones afines. Esto parece indicar un obstáculo epistemológico en la comprensión de la función afín en ciencias


menú
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Conociendo la Función afín.
Hitos importantes en la aparición de la función afín en las ciencias económicas
Conoce algunos destacados matemáticos/economistas que contribuyeron al desarrollo de
Conociendo la Función afín.
La función afín como objeto matemático
Obra publicada con Licencia Creative Commons Reconocimiento Compartir igual 4.0

menú

- **Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar**
- **Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas**
  - Conociendo la Función afín.
  - Hitos importantes en la aparición de la función afín en las ciencias económicas
  - Conoce algunos destacados matemáticos/economistas que contribuyeron al desarrollo de las ciencias económicas

Hitos importantes en la aparición de la función afín en las ciencias económicas

- A partir de 1838, gracias a los trabajos de Cournot, se enuncian las primeras leyes económicas (demanda, oferta). Para mediados del siglo XIX, se comienza a utilizar el análisis matemático en el ámbito de la teoría económica de las riquezas
- Cournot es quien formula y construye por primera vez un modelo matemático que pretende explicar la ley de demanda cuando enuncia que *La venta o la demanda anual D es, para cada mercancía, una función particular F(P) del precio p de la mercancía* Q = F(P).
- Para 1841, se introduce la concepción matemática del punto de equilibrio de la mano de Rau Heinrich Karl. Con esta idea, plantea un nuevo enfoque o perspectiva, cuando asegura que si bien se han empezado a emplear fórmulas matemáticas para estudiar el comportamiento del mercado, quizás es mejor un enfoque geométrico, gráfico.
- Para explicar la idea de punto de equilibrio en economía, partimos de la idea de la existencia de un precio *Pe* en donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales
- En 1870, Jenkin Fleming, en su trabajo sobre representación gráfica de la demanda, traza juntas en un mismo plano, las curvas de oferta y demanda, tratándolas explícitamente como funciones. Representó en un sólo gráfico un sistema de dos ecuaciones (oferta y demanda) con dos incógnitas (precio y cantidad).
- En 1874, Walras define y expresa matemáticamente (de forma simbólica y gráfica), la curva de la demanda,

menú

- **Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar**
- **Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas**
  - Conociendo la Función afín.
  - Hitos importantes en la aparición de la función afín en las ciencias económicas
  - Conoce algunos destacados matemáticos/economistas que contribuyeron al desarrollo de las ciencias económicas

Conoce algunos destacados matemáticos/economistas que contribuyeron al desarrollo de las ciencias económicas

Importantes personajes de la Matemática y la Economía

En esta nota histórica, esbozaremos unas semblanzas de Adam Smith, Alfred Marshall, John Maynard Keynes *y* Vilfredo Pareto, por sus importantes aportes matemáticos al desarrollo de la economía y áreas afines.

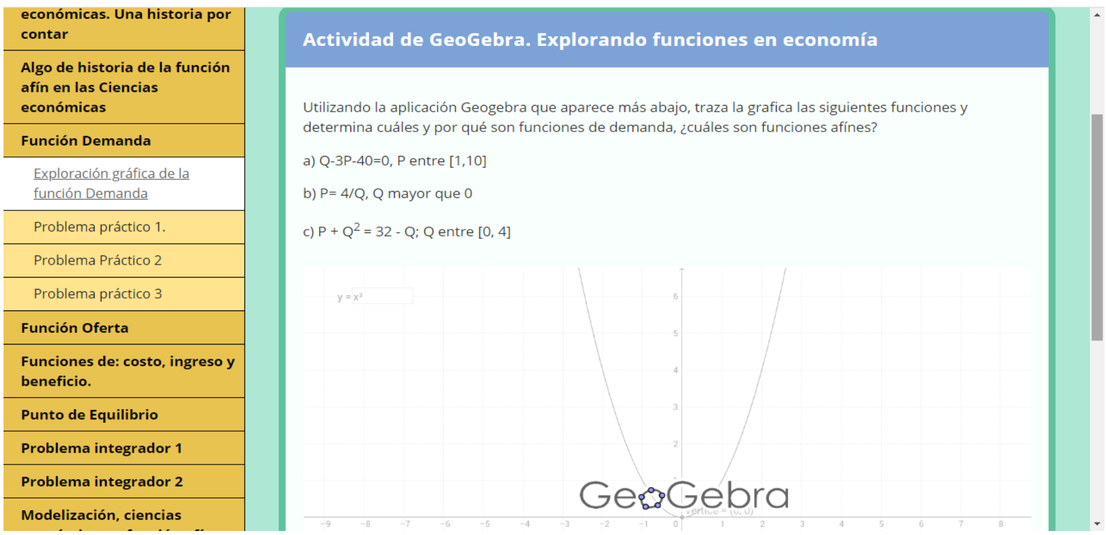
Adam Smith (1723 - 1790). Economista escocés, fundador de la llamada economía clásica. Estudió ciencias morales y políticas en Oxford. En 1759 publica su "Teoría de los Sentimientos Morales " dedicándose más, a partir de ese momento, a la jurisprudencia y a la economía que a fas doctrinas morales. En 1776 muestra su obra cumbre: "Investigación sobre la naturaleza y causas de las riquezas de fas naciones" . Su fama fue inmediata y la reputación de Smith quedó establecida para siempre. Poco antes de su muerte fueron destruidos la mayoría de sus manuscritos por expreso deseo suyo y sin que mediara explicación alguna. Smith fue el gran defensor del *laissez faire* , es decir, de la no intervención del estado en los asuntos

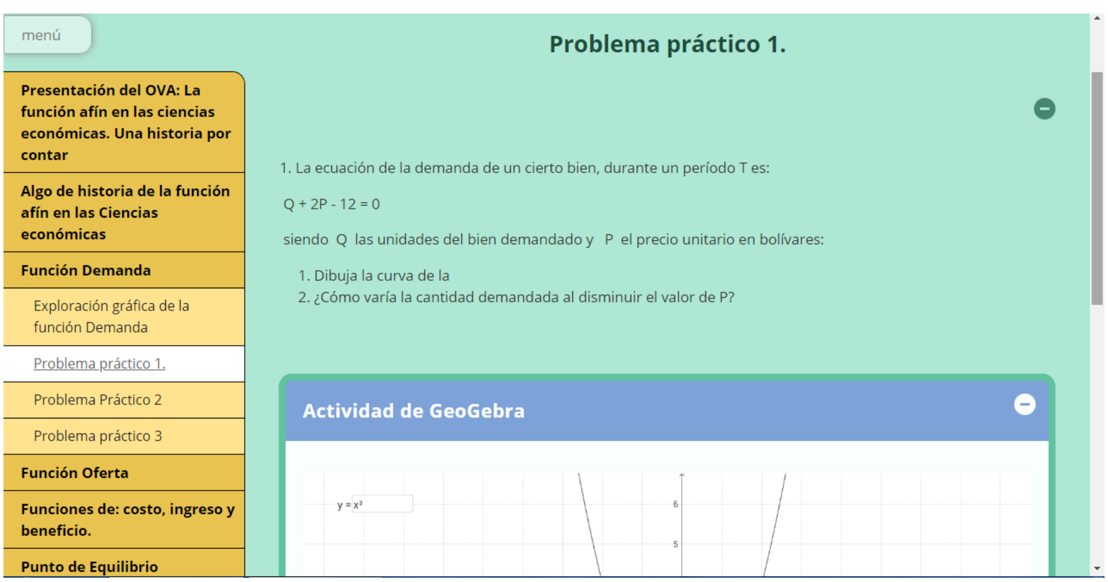
con una cátedra que no llegó a ocupar.

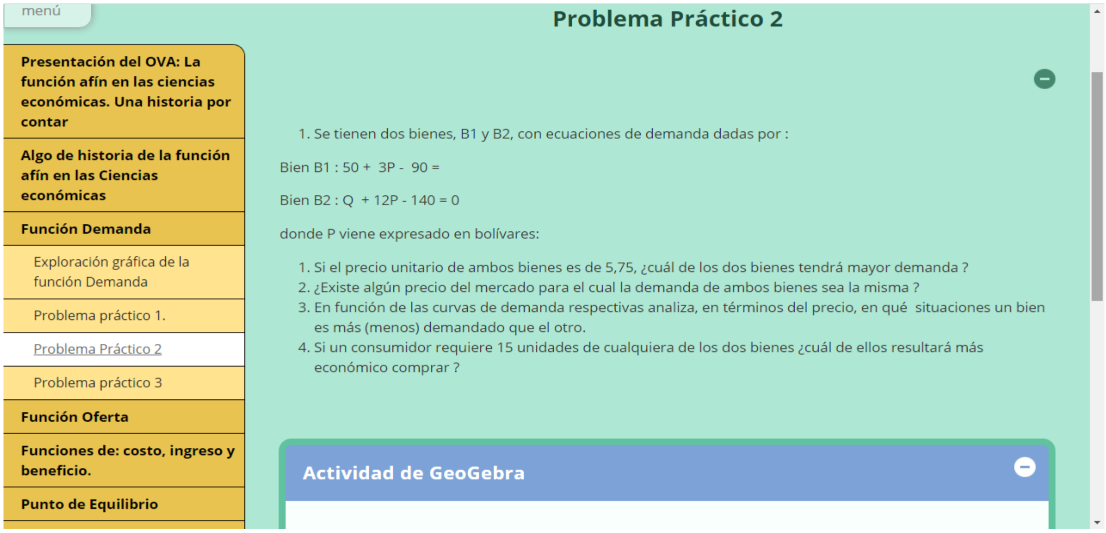
Actividad formativa

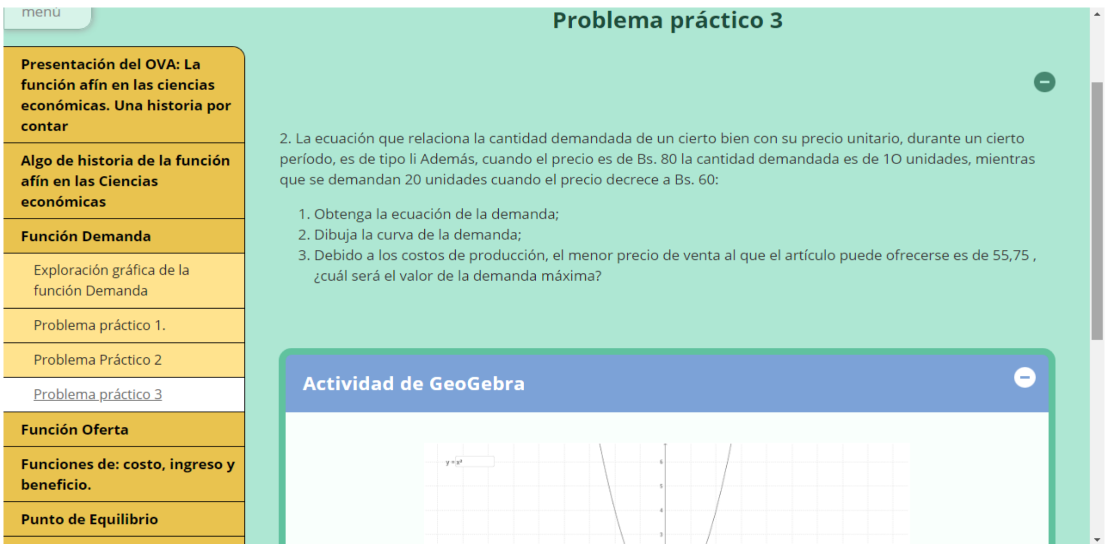
Elabora una infografía, tríptico o afiche con los principales aportes de los personajes nombrados, e incluye dos nuevos.


menú
Función Demanda
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Exploración gráfica de la función Demanda
Problema práctico 1.
Problema Práctico 2
Problema práctico 3
Introducción
En cualquier mercado, la cantidad de un bien, producto o servicio, que es comprado o demandado por determinada población, durante un cierto período de tiempo, depende de muchos factores entre los que cabe mencionar (a) el precio unitario del bien, (b) el precio de los sustitutos, (c) el ingreso de los consumidores, y (d) el número de consumidores, entre otros elementos.
Si bien es cierto que, cada uno de estos factores afecta en mayor o menor medida la cantidad demandada por los consumidores en el mercado; la hipótesis propuesta en este modelo es suponer que todos los factores, a excepción del precio, permanecen constantes, durante un periodo de tiempo dado. De este modo, la cantidad demandada es una función del precio, y por lo tanto, se puede encontrar una relación entre la cantidad demandada Q, y el precio unitario del bien P. A esta relación, entre el precio y la cantidad demandada o comprada, es lo que se denomina como ecuación de la Demanda

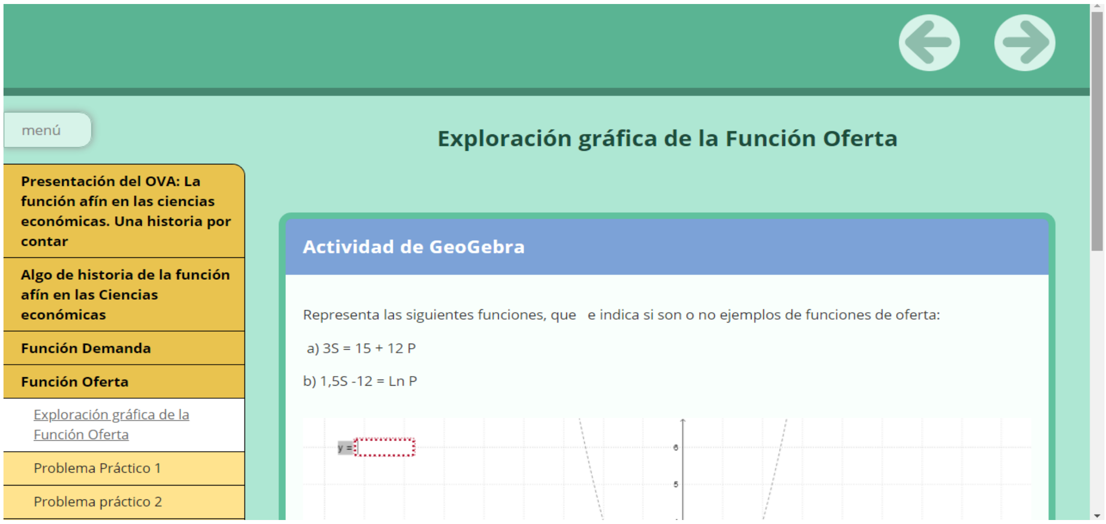

económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Exploración gráfica de la función Demanda
Problema práctico 1.
Problema Práctico 2
Problema práctico 3
Función Oferta
Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Punto de Equilibrio
Problema integrador 1
Problema integrador 2
Modelización, ciencias
Actividad de GeoGebra. Explorando funciones en economía
Utilizando la aplicación Geogebra que aparece más abajo, traza la grafica las siguientes funciones y determina cuáles y por qué son funciones de demanda, ¿cuáles son funciones afines?
a) Q-3P-40=0, P entre [1,10]
b) P= 4/Q, Q mayor que 0
c) P + Q2 = 32 - Q; Q entre [0, 4]
y = x²
GeoGebra

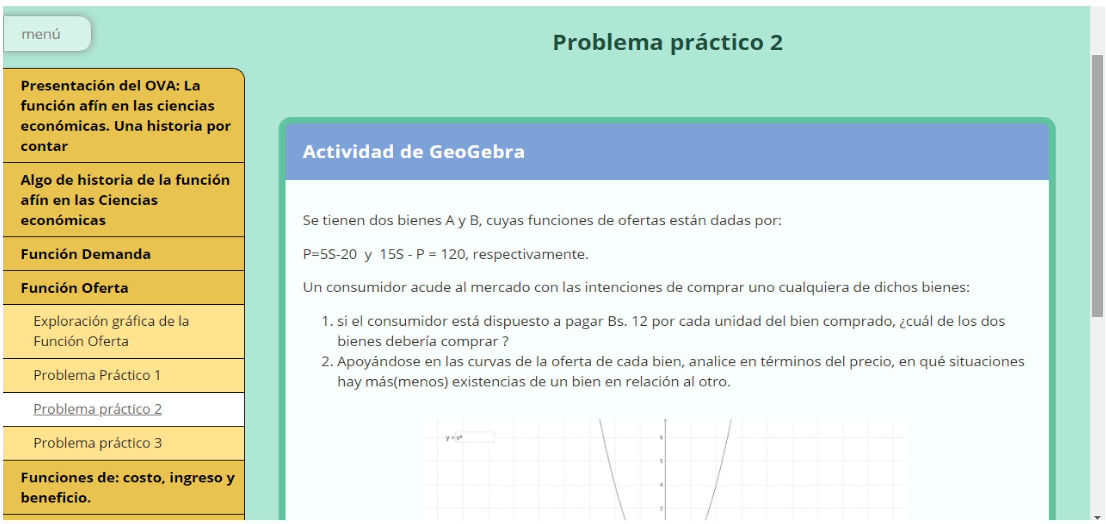

menú
Problema práctico 1.
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Exploración gráfica de la función Demanda
Problema práctico 1.
Problema Práctico 2
Problema práctico 3
Función Oferta
Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Punto de Equilibrio
1. La ecuación de la demanda de un cierto bien, durante un período T es:
Q + 2P - 12 = 0
siendo Q las unidades del bien demandado y P el precio unitario en bolívares:
1. Dibuja la curva de la
2. ¿Cómo varía la cantidad demandada al disminuir el valor de P?
Actividad de GeoGebra
y = x²

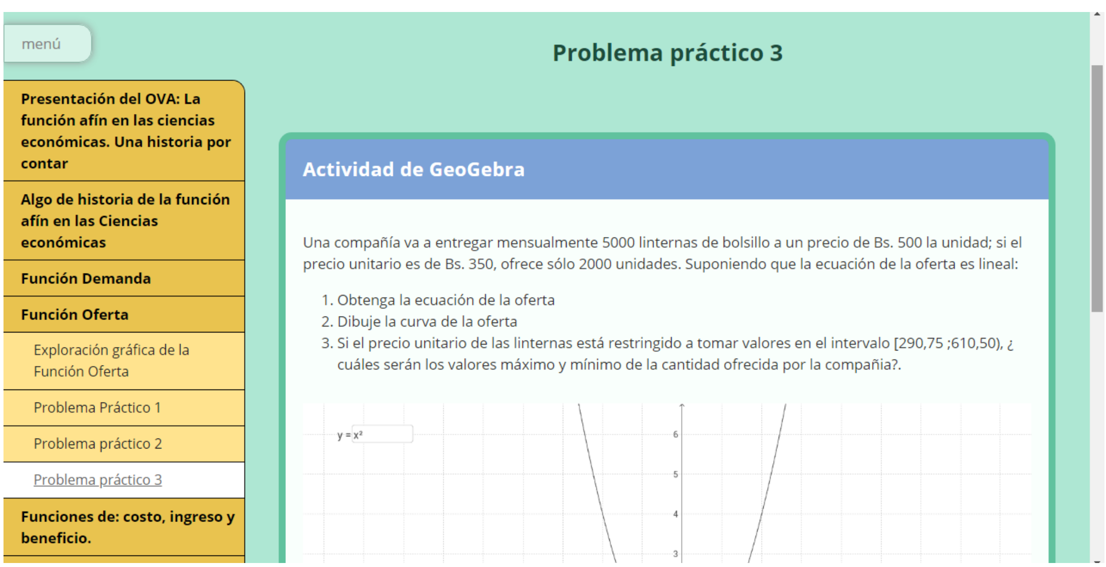

menú
Problema Práctico 2
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Exploración gráfica de la función Demanda
Problema práctico 1.
Problema Práctico 2
Problema práctico 3
Función Oferta
Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Punto de Equilibrio
1. Se tienen dos bienes, B1 y B2, con ecuaciones de demanda dadas por :
Bien B1 : 50 + 3P - 90 =
Bien B2 : Q + 12P - 140 = 0
donde P viene expresado en bolívares:
1. Si el precio unitario de ambos bienes es de 5,75, ¿cuál de los dos bienes tendrá mayor demanda ?
2. ¿Existe algún precio del mercado para el cual la demanda de ambos bienes sea la misma ?
3. En función de las curvas de demanda respectivas analiza, en términos del precio, en qué situaciones un bien es más (menos) demandado que el otro.
4. Si un consumidor requiere 15 unidades de cualquiera de los dos bienes ¿cuál de ellos resultará más económico comprar ?
Actividad de GeoGebra


menú
Problema práctico 3
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Exploración gráfica de la función Demanda
Problema práctico 1.
Problema Práctico 2
Problema práctico 3
Función Oferta
Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Punto de Equilibrio
2. La ecuación que relaciona la cantidad demandada de un cierto bien con su precio unitario, durante un cierto período, es de tipo li Además, cuando el precio es de Bs. 80 la cantidad demandada es de 1O unidades, mientras que se demandan 20 unidades cuando el precio decrece a Bs. 60:
1. Obtenga la ecuación de la demanda;
2. Dibuja la curva de la demanda;
3. Debido a los costos de producción, el menor precio de venta al que el artículo puede ofrecerse es de 55,75 , ¿cuál será el valor de la demanda máxima?
Actividad de GeoGebra


menú
Función Oferta
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Función Oferta
Exploración gráfica de la Función Oferta
Problema Práctico 1
Problema práctico 2
Introducción
Del mismo modo como la demanda se refiere a la cantidad de un bien o servicio que los consumidores están dispuestos a adquirir o comprar; la oferta se refiere a la cantidad de ese bien o servicio que los productores están dispuestos a colocar en el mercado para su venta.
Nuevamente, así como la demanda se ve afectada por distintos factores, con la oferta no pasa distinto. Por ejemplo, (a) los costos de producción, (b) el valor de la mano de obra, (c) el costo de la materia prima; (d) regulaciones y/o normativas legales, (e) infraestructura y equipamiento, (f) comportamiento de los consumidores, así como (g) situaciones económicas locales, regionales, nacionales o globales; son algunos factores que afectan la oferta.
Si se considera la condición ceteris paribus aplicada en el caso del estudio de la demanda, es decir, su


menú
Exploración gráfica de la Función Oferta
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Función Oferta
Exploración gráfica de la Función Oferta
Problema Práctico 1
Problema práctico 2
Actividad de GeoGebra
Representa las siguientes funciones, que e indica si son o no ejemplos de funciones de oferta:
a) 3S = 15 + 12 P
b) 1,5S -12 = Ln P


menú
Problema práctico 2
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Función Oferta
Exploración gráfica de la Función Oferta
Problema Práctico 1
Problema práctico 2
Problema práctico 3
Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Actividad de GeoGebra
Se tienen dos bienes A y B, cuyas funciones de ofertas están dadas por:
P=5S-20 y 15S - P = 120, respectivamente.
Un consumidor acude al mercado con las intenciones de comprar uno cualquiera de dichos bienes:
1. si el consumidor está dispuesto a pagar Bs. 12 por cada unidad del bien comprado, ¿cuál de los dos bienes debería comprar ?
2. Apoyándose en las curvas de la oferta de cada bien, analice en términos del precio, en qué situaciones hay más(menos) existencias de un bien en relación al otro.


menú
Problema práctico 3
Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
Función Demanda
Función Oferta
Exploración gráfica de la Función Oferta
Problema Práctico 1
Problema práctico 2
Problema práctico 3
Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
Actividad de GeoGebra
Una compañía va a entregar mensualmente 5000 linternas de bolsillo a un precio de Bs. 500 la unidad; si el precio unitario es de Bs. 350, ofrece sólo 2000 unidades. Suponiendo que la ecuación de la oferta es lineal:
1. Obtenga la ecuación de la oferta
2. Dibuje la curva de la oferta
3. Si el precio unitario de las linternas está restringido a tomar valores en el intervalo [290,75 ;610,50), ¿ cuáles serán los valores máximo y mínimo de la cantidad ofrecida por la compañía?.
y = x²
6
5
4
3

menú

Funciones de: costo, ingreso y beneficio.

- Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
- Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
- Función Demanda
- Función Oferta
- Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
  - Función Costos
  - Función Ingresos y Beneficios
- Punto de Equilibrio
- Problema integrador 1
- Problema integrador 2
- Modelización, ciencias

Introducción

De esta idea de la matematización de la demanda y la oferta, surgen otros constructos económicos. Por ejemplo, la noción de costos, ingresos y beneficios. Todos son considerados por Cournot como funciones que dependen del precio. Por ejemplo, en el caso de los ingresos, que no son más que las ventas multiplicadas por el precio de la mercancía, pero esto no es más que el producto de la demanda por el precio, nótese inclusive, la relación de proporcionalidad entre ingreso y precio, en función de la demanda, que simbólicamente se representa por la expresión . Pero veamos un poco más en detalle.

Dos de las funciones fundamentales que toda organización de producción cumplen son, por un lado, la elaboración de bienes o servicios para su consiguiente comercialización y venta; y por otro, adquirir insumos, contratar mano de obra o invertir en infraestructura para la producción de tales bienes.

En consecuencia, una de las más importantes decisiones que debe tomar cualquier empresario, está relacionada con la cuestión de ¿qué cantidad debo producir, a qué costo, y con cuanta utilidad o beneficio? Bueno, eso *depende del precio de venta y del costo de producción; esta decisión es guiada por el deseo de maximizar el beneficio, definido corno la diferencia entre el ingreso y el costo total.* Entonces, tenemos la fórmula ***B=I-C***, donde *B* representa los beneficios, *I* los ingresos y *C* los costos totales de producción.

menú

Función Ingresos y Beneficios

- Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
- Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
- Función Demanda
- Función Oferta
- Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
  - Función Costos
  - Función Ingresos y Beneficios

Función Ingresos y Beneficios

Por otro lado, se supone que cualquier empresa que produzca un bien o servicio, lo hace con el propósito de obtener algún tipo de beneficio –usualmente monetario-, producto de la venta de dicho producto. Así, el ingreso *I*, es el dinero total proveniente de la producción de *Q* unidades de un bien, cuyo precio unitario en el mercado es *P*, por lo que se tiene que ***I=PQ***. Además, en *la mayoría de los casos P y Q están a su vez relacionados y en consecuencia, el ingreso puede ser expresado solamente en términos de Q o en términos de P*; por lo que define la función ingreso de un bien, en el período T, "a la función que nos muestra para cada nivel de producción *Q*, el ingreso proveniente de la venta, I. Es decir a la función I=f(Q): con *I*, *Q mayores o iguales a cero.* Su representación gráfica se denomina curva de ingresos.

Ahora bien, ya se ha mencionado que toda empresa desea obtener – y maximizar – sus beneficios. Tomando en consideración que los beneficios corresponden a los ingresos menos los costos, , y que tanto *I*

- Problema integrador 1
- Problema integrador 2
- Modelización, ciencias económicas, y función afín

A la representación gráfica de la función de costo, se le denomina como *curva de Costo.* Y al igual que en el caso de la ecuación de demanda u oferta, es común considerar que la curva de costos sea una recta (o un segmento de recta contenido en ella), por lo que su expresión analítica sería ***C= a+bQ***; con *a*, *b* números reales cualesquiera no nulos simultáneamente.

En este caso, un estudio particular de los valores de *a* y *b*, lleva a considerar que el valor de a representa los costos fijos, basta con considerar en este caso, *Q=0*, para obtener *C=a*. Siendo el costo variable *bQ*. El valor de *b*, que matemáticamente es la pendiente de la recta, *representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien… a este valor lo llamamos costo marginal del bien y lo denotamos por CMa.* En otras palabras, el incremento en el costo de producción cuando se pasa de elaborar *Q* unidades de un bien a *Q+1* unidades, es lo que se denomina costo marginal. En el gráfico siguiente se pueden apreciar las curvas de costos (totales, fijos y variables), representados por función afín.

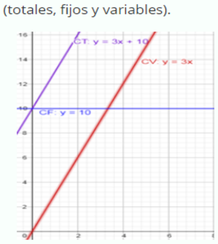


Gráfico. **Curva de costos totales, fijos y variables, representados por función afín**

menú

Problema práctico 3

- Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
- Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
- Función Demanda
- Función Oferta
- Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
  - Función Costos
  - Función Ingresos y Beneficios

Actividad de GeoGebra

Una empresa puede vender un determinado artículo a un precio unitario de Bs.70 . El costo fijo de producción es de Bs.8000, mientras que el costo marginal se estima en Bs. 30/unidad:

1. Obtenga las funciones de costo e ingreso
2. Dibuja sobre un mismo sistema de ejes las curvas asociadas a las funciones anteriores, determina su punto de intersección *y* da una interpretación económica al respecto
3. Obtenga la función de beneficio, dibuja fa curva de beneficio y haz un análisis económico de la misma

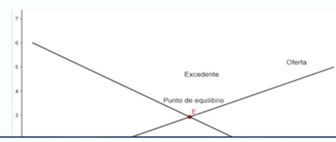
- Punto de Equilibrio
  - Problema práctico 1
  - Problema Práctico 2
  - Problema práctico 3
- Problema integrador 1
- Problema integrador 2
- Modelización, ciencias económicas, y función afín

punto de equilibrio en economía, partimos de la idea de la existencia de un precio *Pe* en donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales; y considera que, si *Pt* es un precio inferior a *Pe*, la cantidad demandada *Qe* supera a la cantidad ofrecida *St*, generándose una situación de escasez en el mercado.

Bajo estas condiciones, y dada la oferta limitada del bien o servicio, se tenderán a invertir mayor cantidad de dinero para la adquisición del producto. Entonces, es aquí donde ambas fuerzas – oferta y demanda – empiezan una lucha o influencia mutua; ya que el alza de precios lleva a la empresa a querer vender más, pero a los compradores a consumir menos; y sólo cuando oferta y demanda sean igualadas, se habrá alcanzado el punto de equilibrio.

Ahora, si se considera un precio *Ph* mayor a *Pe*, entonces, en este caso, se creará lo que denominan los economistas como *excedente*, es decir, hay más productos de los que el mercado consumidor puede adquirir.

En este caso, los productores tendrán, por ejemplo, dificultades para la venta de los bienes generados; y en consecuencia, se acumulará el inventario y los costos que él ocasiona. Dicha situación, además, implica una disminución en la producción del producto, y a una posible reducción en los precios, con el fin de estimular y atraer a los consumidores y compradores. Esto hará que nuevamente se incentive la demanda; y el precio dejará de bajar hasta que se equilibren estas fuerzas, la cantidad demandada sea la misma que la ofertada, alcanzándose así el punto de equilibrio. En el siguiente gráfico



menú

Problema Práctico 2

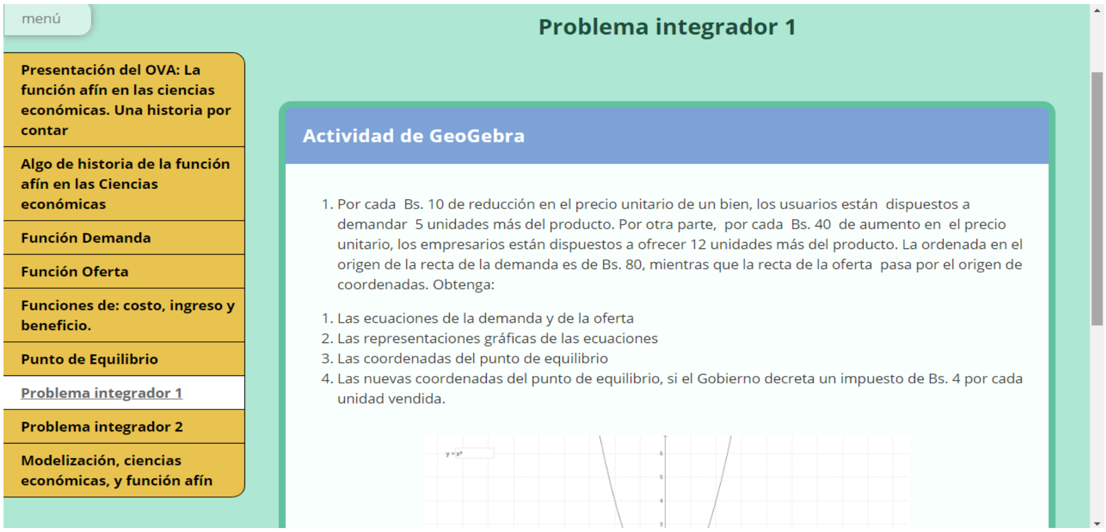
- Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
- Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
- Función Demanda
- Función Oferta
- Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
- Punto de Equilibrio
  - Problema práctico 1
  - Problema Práctico 2
  - Problema práctico 3
- Problema integrador 1

Actividad de GeoGebra

Un determinado bien opera en un mercado de competencia con una ecuación de demanda dada por

Q = 120000 - 20000 P , y una ecuación de la oferta S = 20000 P:

1. ¿Qué efecto tiene sobre el precio y la cantidad de equilibrio del bien, si. el gobierno decide cobrar un impuesto sobre las ventas de Bs. 2 por unidad vendida?
2. ¿Quién paga te el impuesto?
3. ¿Cuál es la cantidad total de impuesto que recauda el Gobierno?



menú

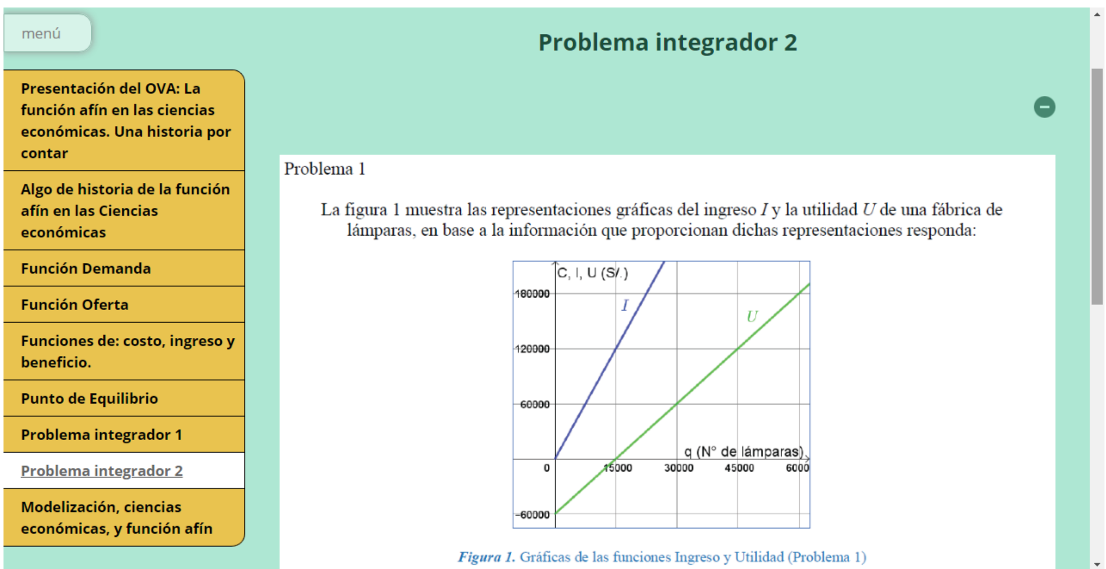
Problema integrador 1

- Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
- Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
- Función Demanda
- Función Oferta
- Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
- Punto de Equilibrio
- Problema integrador 1
- Problema integrador 2
- Modelización, ciencias económicas, y función afín

Actividad de GeoGebra

1. Por cada Bs. 10 de reducción en el precio unitario de un bien, los usuarios están dispuestos a demandar 5 unidades más del producto. Por otra parte, por cada Bs. 40 de aumento en el precio unitario, los empresarios están dispuestos a ofrecer 12 unidades más del producto. La ordenada en el origen de la recta de la demanda es de Bs. 80, mientras que la recta de la oferta pasa por el origen de coordenadas. Obtenga:

1. Las ecuaciones de la demanda y de la oferta
2. Las representaciones gráficas de las ecuaciones
3. Las coordenadas del punto de equilibrio
4. Las nuevas coordenadas del punto de equilibrio, si el Gobierno decreta un impuesto de Bs. 4 por cada unidad vendida.



menú

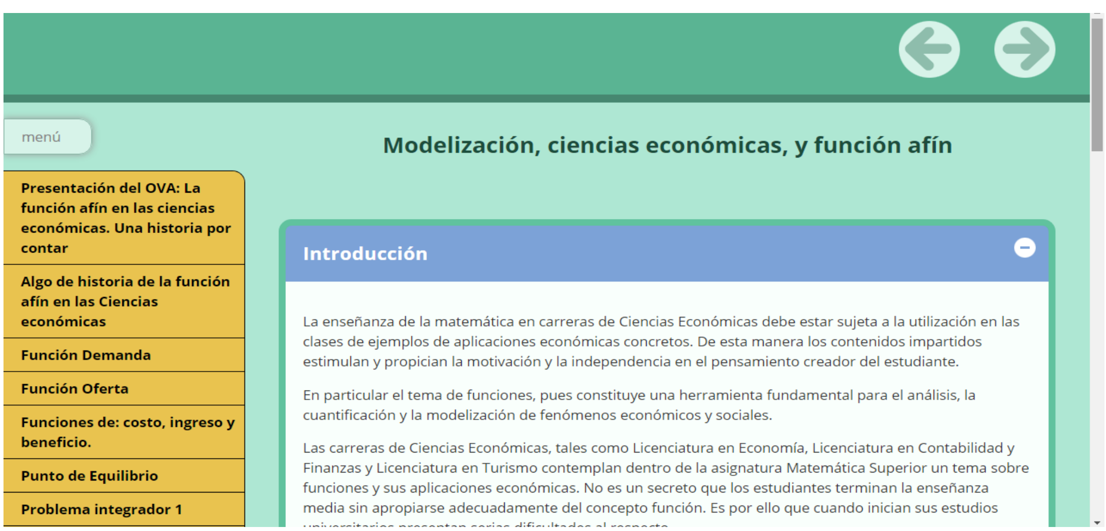
Problema integrador 2

- Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
- Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
- Función Demanda
- Función Oferta
- Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
- Punto de Equilibrio
- Problema integrador 1
- Problema integrador 2
- Modelización, ciencias económicas, y función afín

Problema 1

La figura 1 muestra las representaciones gráficas del ingreso I y la utilidad U de una fábrica de lámparas, en base a la información que proporcionan dichas representaciones responda:

Figura 1. Gráficas de las funciones Ingreso y Utilidad (Problema 1)



menú

Modelización, ciencias económicas, y función afín

- Presentación del OVA: La función afín en las ciencias económicas. Una historia por contar
- Algo de historia de la función afín en las Ciencias económicas
- Función Demanda
- Función Oferta
- Funciones de: costo, ingreso y beneficio.
- Punto de Equilibrio
- Problema integrador 1

Introducción

La enseñanza de la matemática en carreras de Ciencias Económicas debe estar sujeta a la utilización en las clases de ejemplos de aplicaciones económicas concretos. De esta manera los contenidos impartidos estimulan y propician la motivación y la independencia en el pensamiento creador del estudiante.

En particular el tema de funciones, pues constituye una herramienta fundamental para el análisis, la cuantificación y la modelización de fenómenos económicos y sociales.

Las carreras de Ciencias Económicas, tales como Licenciatura en Economía, Licenciatura en Contabilidad y Finanzas y Licenciatura en Turismo contemplan dentro de la asignatura Matemática Superior un tema sobre funciones y sus aplicaciones económicas. No es un secreto que los estudiantes terminan la enseñanza media sin apropiarse adecuadamente del concepto función. Es por ello que cuando inician sus estudios

Usos de la función afín en ciencias económicas

La función lineal puede ser aplicada para:

- Determinar ecuaciones de demanda, oferta y costo que tengan un comportamiento lineal.
- Determinar el punto de equilibrio entre el ingreso y el costo y entre la oferta y la demanda, así como el precio de mercado.
- Determinar la tasa de cambio del nivel de producción de dos productos.
- Analizar gráficamente el comportamiento de funciones de ingreso, costo, ganancia, producción, oferta y demanda.

Modelizando en economía, con la función afin

Funciones lineales

En los supermercados las cajeras disponen de balanzas en las cuales se puede teclear el precio por kilogramo de la verdura que se pesa. Estas balanzas emiten un ticket donde se indica el precio total a pagar, correspondiente a la cantidad de verdura pesada.

La tabla 3.1 presenta las distintas cantidades pesadas y el precio total para cada una de ellas, registrados para el tomate:

Tabla 3.1

Peso (g)	Precio total ($)
100	0,40
200	0,80
250	1,00
600	2,40
1.000	4,00

Estos registros se pueden modelizar mediante la función definida como:

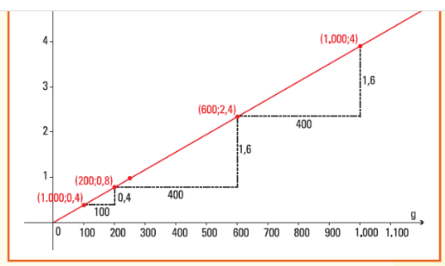
f: { $x \in \mathbf{R}$ / $x \geq 0$} $\rightarrow$ { $f(x) \in \mathbf{R}$ / $f(x) \geq 0$}

$f(x)$ = costo de adquirir x gramos de tomate.

Si a partir de los datos de la tabla 3.1 realizamos un gráfico de esta función, obtenemos el gráfico 3.1.

el eje x), igual diferencia de precio a pagar (sobre el eje y). Esta condición nos indica que la función cumple la propiedad de **proporcionalidad**;

2) los puntos de la función se pueden unir mediante una **línea recta** (gráfico 3.2).



En general, muchos fenómenos y situaciones de la vida diaria, se comportan de forma que las funciones que los representan verifican que los cambios en la variable dependiente (y) son proporcionales a los que se aplican a la variable independiente (x).

Ficheros adjuntos

- Modelización, ciencias económicas, y función afín.pdf (Ventana nueva)

Problema integrador 2

Modelización, ciencias económicas, y función afín

Aprendiendo a modelizar en economía con la función afin

Mis primeras modelizaciones matemática en ciencias económica

Caso práctico 2

Suponga que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 pares cuando el precio es de \$35,00 (pesos por par) y 35 pares cuando el precio es de \$30,00.

1. Determinar la ecuación de oferta suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionados linealmente.
2. Cuando se incrementa el precio ¿qué le ocurre a las cantidades ofrecidas?

Posible solución

Caso práctico 3

Cuando en una industria se producen x toneladas de producto al día, $0 \leq x \leq 16$, el costo total de producción y el ingreso total en cientos de pesos están dados respectivamente por las ecuaciones $C(x)= 3x+12$ y $I(x)=5x$.

1. Halle el punto de equilibrio. Interprete.
2. Represente gráficamente las dos funciones anteriores en un mismo gráfico.
3. ¿Para qué valores de x se producen ganancias y para qué valores de x se producen pérdidas?

parámetro asociado a la demanda). El valor de b, que matemáticamente es la pendiente de la recta, representa el aumento de costo necesario para producir una unidad adicional del bien (*costo marginal* del bien)

- El ingreso I, es definido como el dinero total proveniente de la producción de Q unidades de un bien, cuyo precio unitario en el mercado es P; Simbólicamente: I=PQ; por lo que se puede considerar la función ingreso definida como *I = f(Q).*
- Como los beneficios se definen en atención a los ingresos y los costos, y ambos depende de la demanda Q, entonces es posible hablar de la función beneficios definida como *B = f(Q).*

Actividad: Trazar una línea del tiempo

Elaborar una línea del tiempo con los principales acontecimientos acerca de la función matemática en los conceptos de economía

CURRICULUM VITAE