



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO LUIS BELTRÁN PRIETO FIGUEROA
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
MAESTRÍA INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA
MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**ARGUMENTOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES DE QUINTO AÑO
DE LA ETIR PEDRO LEÓN TORRES EN LA SOLUCIÓN
DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA.**

AUTOR: ROSMERY SÁNCHEZ.

TUTOR: DR. DONES COLMENÁREZ

BARQUISIMETO, ABRIL DE 2021




UNIVERSIDAD PEDAGOGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
SECRETARIA

B 33447


ACTA

Nosotros, miembros del jurado Examinador del Trabajo de Grado de Maestría titulado: **ARGUMENTOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES DE QUINTO AÑO DE LA ETIR PEDRO LEÓN TORRES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA**, presentado por la ciudadana: **ROSMERY CELINDA SÁNCHEZ ALBARRÁN**, titular de la Cédula de Identidad N° V- 18.862.106 como requisito parcial para optar al Título de **MAGISTER EN MATEMÁTICA, MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**, ofrecido por la Maestría Interinstitucional en Matemática **UCLA-UNEXPO-UEPEL**, hacemos constar que hoy **14 de octubre de 2021**, se realizó el examen público de Defensa de Trabajo de Grado, de acuerdo a lo establecido en los Artículos 62 y 67 del Capítulo X sobre la Elaboración, Presentación y Evaluación de Trabajos de Grado del reglamento interno de la Maestría Interinstitucional en Matemática. Una vez rendido el examen, este jurado emite siguiente veredicto: El trabajo de Grado fue: **APROBADO**. Dando fe de ello, levantamos esta acta en Barquisimeto a los catorce **DÍAS DEL MES DE OCTUBRE DE DOS MIL VEINTIUNO**.


Dra. Jenny Pérez
C.I. N° 7.407.770
(Jurado Principal)




Dra. Marilex Porteles
C.I. N° 15.960.723
(Jurado Principal)


Dr. Dónes Colmenárez
C.I. N° 11.075.956
Tutor (Presidente del Jurado)

ÍNDICE GENERAL

	pp.
ÍNDICE GENERAL.....	ii
LISTA DE CUADROS.....	iv
LISTA DE FIGURAS.....	vi
RESUMEN.....	vii
INTRODUCCIÓN.....	1
 CAPÍTULO I	
EL PROBLEMA.....	3
Objetivo General de la Investigación.....	6
Objetivos Específicos de la Investigación.....	6
Justificación de la Investigación.....	6
 CAPÍTULO II	
MARCO TEÓRICO.....	8
Argumentación y Argumento.....	8
Elementos constitutivos de un Argumento.....	10
Proceso de Argumentar.....	11
Argumentación Escolar.....	12
Clasificación de los Argumentos.....	13
Niveles Argumentativos.....	14
Resolución de Problemas.....	16
Elementos del Proceso de Resolución de Problemas.....	18
Modelos para la Resolución de Problemas.....	19
Fases para Resolver un Problema.....	19
Antecedentes.....	22

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO.....	25
Naturaleza del Estudio.....	25
Diseño de la Investigación.....	25
Población y Muestra.....	26
Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos.....	27
Técnicas de Procesamiento y Análisis de Datos.....	28

CAPÍTULO IV

Presentación y Análisis de Resultados	33
---	----

CAPÍTULO V

Conclusiones.....	53
Recomendaciones.....	58

REFERENCIAS.....	60
-------------------------	-----------

ANEXOS

A Instrumento 1: Problema de Matemática.....	65
B Respuesta de los estudiantes al instrumento 1.....	67
C Aplicación del instrumento: lista de cotejo 1 por ítem.....	88
D Aplicación del instrumento: lista de cotejo 2 por ítem.....	97
E Aplicación del instrumento: lista de cotejo 3 por ítem.....	102

LISTA DE CUADROS

CUADRO	pp.
Cuadro N° 1. Clasificación de los Argumentos.	14
Cuadro N° 2. Niveles Argumentativos según Tamayo (2012).	15
Cuadro N° 3. Adaptación de los Niveles Argumentativos de Tamayo	16
Cuadro N° 4. Modelos para la Resolución de Problemas.	19
Cuadro N° 5. Elementos de los argumentos empleados por los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” en la solución de un problema de matemática. Con la estructura argumentativa de Tolmin (1958)	30
Cuadro N° 6. Distribución de los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” por elementos de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta.	31
Cuadro N° 7. Clasificación de los argumentos empleados por los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” en la solución de un problema de matemática. Con las Categorías de Reid y Knipping (2010).	31
Cuadro N° 8. Distribución de los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” por categoría de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta.	32
Cuadro N° 9. Niveles Argumentativos empleados por los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” en la solución de un problema de matemática. Con los Niveles Argumentativos de Tamayo (2012).	33

Cuadro N° 10.	Distribución de los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” por niveles argumentativos empleados en la actividad de matemática propuesta.	34
Cuadro N° 11.	Elementos identificados en el argumento empleado por el estudiante 1 (E1) de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” con respecto al ítem 1.	36
Cuadro N° 12.	Distribución de los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” por elementos de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta, en el año escolar 2020-2021.	38
Cuadro N° 13.	Garantías empleadas por los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” en la solución de problemas de matemática.	42
Cuadro N° 14.	Categoría del argumento empleado por el estudiante 4 (E4) de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” con respecto al ítem 3.	44
Cuadro N° 15.	Distribución de los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” por categoría de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta, en el año escolar 2020-2021.	45
Cuadro N° 16.	Desglose gráfico de los niveles argumentativos.	48
Cuadro N° 17.	Nivel argumentativo del el estudiante 4 (E4) de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” con respecto al ítem 4.	51
Cuadro N° 18.	Distribución de los estudiantes de 5to. Año de la ETIR “Pedro León Torres” por niveles argumentativos empleados en la solución del problema de matemática propuesta, en el año escolar 2020-2021.	53

LISTA DE FIGURAS

FIGURAS	pp.
FIGURA N° 1. Estructura de un Argumento.	12
FIGURA N° 2. Definición de Problema.	17
FIGURA N° 3. Operaciones mentales planteadas por Polya.	21



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO LUIS BELTRÁN PRIETO FIGUEROA
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
MAESTRÍA INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA
MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**ARGUMENTOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES DE QUINTO AÑO
DE LA ETIR PEDRO LEÓN TORRES EN LA SOLUCIÓN
DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA.**

Autor: Rosmery Sánchez.

Tutor: Dr. Dones Colmenárez

RESUMEN

El presente trabajo se enmarca dentro un enfoque cuantitativo bajo el paradigma positivista, cuyo nivel de investigación es descriptivo e interpretativo y su modalidad es una investigación de campo, tuvo como fin principal estudiar los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR Pedro León Torres del lapso escolar 2020-2021, en el que se identificó los elementos del argumento empleado por los estudiantes con la definición de Toulmin (1958), se clasificaron los argumentos mediante la categorización de Reid y Knipping (2010), quienes distinguen cuatro categorías amplias de argumentos por el uso, o no uso, de representaciones y luego se evaluó la calidad de los argumentos según Tamayo (2012) mediante los niveles de la argumentación definidos por él. Se utilizó lista de cotejo y otros cuadros elaborados por la investigadora para poder recoger y analizar la información extraída de un problema matemático propuesto a los estudiantes, encontrando evidencia en las respuesta de los estudiantes, de la presencia y uso del argumento, su papel e importancia al momento de llevarse a cabo los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en cualquier nivel educativo, el cual permite el desarrollo de habilidades argumentativa en la matemática por parte de los estudiantes.

Descriptores: Argumentos, Argumentación, Niveles de Argumentación y Resolución de Problemas.

INTRODUCCIÓN

Actualmente la propuesta educativa que se maneja en Venezuela apunta hacia la formación de jóvenes reflexivos, críticos y constructivos, con la intención de que ellos puedan mirar el rol que juegan las matemáticas en nuestro entorno, por lo que es necesario orientar el desarrollo de procesos matemáticos, no sólo para representar, calcular y modelar, sino también incluir actividades como resolución de problemas que inviten a argumentar y comunicar saber desde diferentes vías de solución.

Este desafío que se le presenta al educador de enseñar un contenido a los estudiantes y propiciar canales de aprendizaje que favorezcan la comprensión de un contenido matemático, motiva la creatividad del docente en la investigación, ya que la idea de aprendizaje forma parte de nuestro sentido común y en el caso de los educadores, forma parte de un “sentido común pedagógico” según Fairstein y Gyssels (2003) el cual atrae nuestro interés.

Por lo que el presente trabajo está orientado a observar aquellos detalles que favorecen estos procesos y reflexionar sobre el alcance que los mismos tienen en el aprendizaje, por ello se busca mirar como desde la resolución de problemas el estudiante manifiesta y desarrolla habilidades argumentativas mediante su razonamiento, explicando el porqué de las posibles soluciones a su problema, fortaleciendo y haciendo más consciente la construcción de su conocimiento.

Es por eso que en este estudio, no sólo se identificaron si los estudiantes emplean argumentos al resolver un problema de matemática sino también se clasificaron y estudió la calidad de los argumentos que utilizaron, por lo que un problema matemático será el instrumento inicial para extraer y recoger información que luego será analizada en esta investigación, que consta de los siguientes capítulos:

En el capítulo I se describe y se define el problema de la investigación, se expone el objetivo general y los objetivos específicos que definen este estudio, además de la justificación que explica la importancia que tuvo la realización de este trabajo.

En el capítulo II se presenta el marco teórico donde se definen aquellos conceptos que se consideran fundamentales para este trabajo y los antecedentes que respaldan y dan fortaleza a la investigación, desde su estudio y sus resultados.

En el capítulo III se muestra la metodología que se empleó en esta investigación, allí se explican todos aquellos elementos que dieron forma al camino seleccionado para alcanzar el objetivo de la investigación, así como el paradigma, el método, los participantes, las técnicas e instrumentos empleados para llevar a cabo este estudio.

En el capítulo IV se encuentran los resultados en torno a la argumentación, analizado desde tres vertientes que fueron enmarcados en el primer capítulo de este trabajo de investigación, para ello se utilizaron instrumentos como lista de cotejo y otros cuadros elaborados por la investigadora para poder recoger y analizar la información.

En el capítulo V se establecen las conclusiones y recomendaciones de esta investigación los cuales se derivaron de los resultados encontrados y reflejados en el capítulo anterior, con la intención de que sirva como motivación en la praxis educativa para futuras investigaciones.

Para finalizar, se presentaron las referencias consultadas, así como los anexos afines a la investigación, entre los cuales encontraremos, el problema matemático que fue propuesto a los estudiantes, las respuestas dadas por los estudiantes en cada uno de los ítems propuestos en el problema y el llenado de los instrumentos utilizados para recabar la información referente al estudio realizado.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

La matemática es una ciencia, producto de más de dos mil años de trabajo del hombre, una obra de arte que aún nos sigue maravillando y deslumbrando con el pasar de los siglos, cuyos fundamentos son sólidos desde sus inicios hasta nuestros días, una matemática que se ha ido desarrollando y fortaleciendo por un sin fin de aportes e investigaciones que buscan responder y explicar todas aquellas preguntas que el hombre sujeto a circunstancias y tiempos específicos ha logrado responder, por lo que ahora, todo aquel que busca comprender, modelar, interpretar o responder sobre aquellos fenómenos de su entorno con ayuda de la matemática, por lo que justifica con argumentos su razonamiento con fundamentos teóricos ya validados y aceptados con el tiempo por una comunidad científica.

Es en este sentido, donde vemos como el argumento se encuentra estrechamente unido a la matemática, Duval (1999) define el argumento como “todo lo que es utilizado, para justificar o para refutar una proposición” $p(2)$, por lo que pasa a ser un elemento fundamental en el hacer matemática, que incluso el mismo autor indica que este puede ser “el enunciado de un hecho, un resultado de la experiencia, un ejemplo, una definición, el recuerdo de una regla, creencia comúnmente compartida o incluso la explicación de una contradicción” $p(2)$, en el que expone de una manera sencilla cómo identificar el argumento y nos hace ver entre líneas sus rasgos característicos en el que se puede expresar por qué se cree que tal cosa es, note que son algunas expresiones que se manifiestan durante la formación matemática.

De este modo, nos causa interés el empleo y relevancia que se le da al argumento, a la argumentación matemática, puesto que encontramos diversas formas de argumentar para validar o no una aseveración, ya que además permite explicar el por qué de la solución de un problema matemático que emerge del sistema de prácticas educativo bajo diferentes contextos, por ello Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard, Mante; Arsac; Recio (citados en Llanos y Otero, 2012) plantean que el problema de la

argumentación matemática ha sido abordado desde referenciales didácticos, más específicamente dentro de la llamada visión epistemológica de la didáctica de la matemática, por la intervención que esta pueda tener con los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Es por ello que enseñar y aprender matemática se fundamenta en todas las actividades que tienen como finalidad la construcción del conocimiento, además de todos aquellos estudios referidos a la argumentación que luego terminan por ser considerados como un aspecto clave en el aprendizaje. Posada (2015) afirma que ésta repercute de manera directa al describir nuevas formas de cómo aprendemos y en el cuestionamiento de los contenidos de los modelos educativos tradicionales, en donde la argumentación no ha tenido un lugar central. De este modo, vemos que el autor defiende el hecho de que la argumentación es esencial en el proceso de aprendizaje, por lo que nos invita a evaluar y reflexionar sobre el alcance que este tiene en aquellos modelos, estrategias así como de actividades educativas que son empleadas en estas últimas décadas para que aprenda el estudiante.

Por lo que al mirar como docente aquellos detalles de la praxis educativa, se puede percibir y descubrir una gran variedad de elementos que pueden hacer significativo el aprendizaje de las matemáticas, por ello Alcolea (2013) refiriéndose al caso de las matemáticas, considera que “el proceso de resolver un problema y seguir un método comprensible de razonamiento para lograr esa solución, ya tiene rasgos argumentativos” (p.48), incluso el autor afirma que “a veces, la solución del problema es en sí mismo un argumento” (p.48), de modo que resolver problemas matemáticos se encuentra estrechamente vinculado a los argumentos que puedan emplear los estudiantes en este proceso, lo que a su vez permite que él pueda desarrollar competencias básicas en su formación lógica matemática.

Por consiguiente, Hofstadter (citado por Pérez y Beltrán, 2011) plantea que “las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere

explicaciones”]. Note que el autor en este proceso de resolución de problemas sugiere dar libertad en la actividad al estudiante para que este pueda dar solución a un problema desde su mayor herramienta como lo es el conocimiento sin establecerle patrones ni exactitud en el manejo de los conceptos y así pueda desarrollar habilidades que le permitan juzgar su razonamiento y sus argumentos.

En este sentido se entiende, que resolver un problema de matemática tiene sus propias bondades, que favorece algunas habilidades en el estudiante, Ceballos y Blanco (2008), afirman, luego de analizar dos currículos que allí se “propone una puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas, la aplicación de estrategias de resolución, la selección de las técnicas adecuadas y la puesta a prueba de la estrategia elegida entre otros” (p.) por lo que es de interés observar qué competencias o capacidades se desarrollan desde un punto de vista argumentativo al enfrentarse a este tipo de actividades, en los que la resolución de problemas desde sus procesos permiten reflexionar, analizar y aprender.

Por tal motivo, surgió la necesidad de realizar una investigación sobre la argumentación matemática empleada por los estudiantes de la Escuela Técnica Industrial Robinsoniana “Pedro León Torres”, ya pronto a iniciarse en estudios superiores, ya que su forma de argumentar, debe estar motivada a ir más allá de la memorización mecánica de los contenidos propios de su nivel de estudio, así como el hecho de estimular su capacidad de razonar, al ser más conscientes, reflexivos y críticos al pensar, además de ser estudiantes capaces de juzgar lo que piensan, lo que leen, lo que dicen y lo que hacen.

Bajo este escenario y en esta dirección se orienta la motivación de hacer ésta investigación sobre los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de las diferentes menciones de la ETIR Pedro León Torres cuando se enfrentan en la solución de problemas de matemática, por lo que surgen las siguientes interrogantes ¿Qué elementos del argumento se encuentran presentes en la estructura argumentativa de los estudiantes en la solución de problemas de matemática? ¿Cómo se clasifican los argumentos que emplean los estudiantes? ¿Cuál es el nivel de argumentación de los estudiantes en la solución de problemas de matemática?

Objetivo General de la Investigación

Estudiar los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR Pedro León Torres en la solución de problemas de matemática.

Objetivos Específicos de la Investigación

- Identificar los elementos de los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR Pedro León Torres en la solución de problemas de matemática.
- Clasificar los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR Pedro León Torres en la solución de problemas de matemática.
- Establecer los niveles argumentativos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR Pedro León Torres en la solución de problemas de matemática.

Justificación

En educación matemática siempre encontramos una gama de estudios de diferentes investigadores interesados en aportar, profundizar, fortalecer y embellecer el conocimiento propio de esta área, pues sabemos que esta ciencia es rica, valiosa y trascendente en cualquier nivel de estudio, por lo que una gota de conocimiento que se coloque o se pueda dar, como resultado que se derive de una inquietud de la praxis educativa, es una gota que hace inmenso el mar de conocimiento en educación matemática.

Esto lleva a mirar con ojos de lupa todos aquellos elementos y detalles que forman parte importante de la construcción de conocimientos en educación matemática, dentro de este escenario encontramos el argumento matemático, muy comúnmente utilizado por todos, ya que no sólo es el docente que lo emplea y se vale de este como arma para explicar y dar a entender un contenido, sino que a su vez el estudiante también lo utiliza

y se vale de este como escudo para explicar y justificar su forma de razonar y resolver un problema matemático.

Por lo tanto, es un punto de concurrencia, tanto para estudiantes cómo para profesores, reflexionar sobre como el argumento puede transformar una idea en un principio que se acepte, por ello debemos prestar atención a los tipos de declaraciones y a su funcionalidad en el ámbito educativo para mirar el argumento como un recurso propio de los procesos de enseñanza y aprendizaje que trasciende en aquellos que se valen de este para llegar a validar y consolidar su conocimiento, logrando un alcance máximo en el desarrollo del pensamiento matemático.

De este modo, la argumentación inmersa en la práctica y construcción del conocimiento matemático de los estudiantes en las distintas etapas de educación es parte esencial de su formación académica ya que son estos los matices que explican y responden a los diferentes planteamientos, preguntas e interrogantes que se van presentando durante cada nivel de estudio e incluso en situaciones futuras desde el ámbito laboral, por lo que es importante promover en ellos un saber de utilidad para la vida y no para el momento.

De esta manera, este estudio podrá orientar y servir de ayuda en otras investigaciones futuras con el propósito de estudiar la argumentación empleada por estudiantes de cualquier nivel educativo y obtener hallazgos relacionados con este, que permitan tener una visión más amplia y detallada del tratamiento que se puede utilizar en aquellas estrategias y actividades educativas propuestas al estudiante, desde la construcción de un conocimiento fundamentado en argumentos en el que explique y justifique su razonamiento al solucionar problemas matemáticos y a su vez sirva de referencia al campo de la Didáctica de las Matemáticas.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se encuentra la teoría que nutre y fortalece esta investigación, está dividido en dos partes. En la primera parte encuentra la base teórica que fundamenta este estudio sobre el argumento matemático y en la segunda parte se presenta la revisión de trabajos realizados sobre el uso del argumento por los estudiantes en matemática.

Argumentación y Argumento

La argumentación y el argumento son términos que son empleados con frecuencia, en muchos contextos e incluso para algunos autores son sinónimos, ya que ciertamente se encuentran estrechamente relacionados, sin embargo, en este trabajo serán tratados por separado, a continuación se darán varias definiciones en la que se visualiza la diferencia entre estos dos términos. Las tres primeras definiciones están referidas al argumento, seguido de dos definiciones sobre la argumentación matemática y luego se establece diferencia mediante algunos autores.

Toulmin (citando en Duval, 1999) expone que el argumento es todo aquello que ofrece, o todo lo que es utilizado, para justificar o para refutar una proposición. Aquello puede ser el enunciado de un hecho, un resultado de la experiencia, un ejemplo una definición, el recuerdo de una regla, creencia comúnmente compartida o incluso la explicitación de una contradicción. Todas se justifican cuando alguien las utiliza para decir ¿por qué? se acepta o se rechaza una proposición. Por otra parte, también plantea que el argumento es la respuesta a la pregunta de por qué enuncia o cree tal cosa. Note que el autor nos da una caracterización que permite reconocer de manera sencilla un argumento, presentando las pinceladas que vislumbran de cómo se identifica y cuando se emplea este término.

Por su parte, Sánchez (2008), plantean que el argumento es un enunciado formado por un conjunto de ideas que sustentan un punto de vista o una proposición ante un hecho o situación. Por lo que podría decirse que un argumento es una porción de conocimiento que fundamenta esa idea.

Según la Visión Formalista de la matemática, un argumento o argumento deductivo es la aplicación de las reglas de inferencia dentro del sistema formal que permite llegar al teorema. En esta oportunidad se le llama argumento a aquellos fundamentos matemáticos ya validados que permiten justificar el porqué de un proceder matemático.

Driver y Newton (2000), consideran la argumentación como una actividad individual a través de la reflexión y de la escritura, o como una actividad social que tiene lugar dentro de un grupo. Además la definen como un proceso por el que se da una razón a favor o en contra de una proposición o línea de acción.

En este orden de ideas, Alcolea (2013) plantea que la argumentación debe entenderse como una actividad metacognitiva, que resulta cuando la supuesta validez de una acción cotidiana está en duda por nuestros propósitos, además describe la argumentación como las técnicas o métodos utilizados para establecer una declaración.

Por su parte, Toulmin (citado por Toro, 2020) admite que la argumentación es como un acto de comunicación de datos, afirmaciones y justificaciones, más que un proceso de interacción social, acá el autor se refiere a elementos muy específicos que forman una estructura argumentativa al momento de llevarse a cabo y ser expresado la argumentación.

De las dos definiciones que han sido abordadas entre los párrafos anteriores se establece una línea de diferencia y a su vez un lazo que los relaciona, Smith (citado por Mendo, 2010) expresa que un argumento matemático puede definirse como una secuencia de instrucciones matemáticas que tiene como objetivo convencer, mientras que la argumentación puede ser considerada como un proceso en el que un discurso lógico matemático se desarrolla.

Además, Alcolea (2013) establece la siguiente diferencia, un argumento es el producto reconocible en una argumentación. Cuando argumentamos, es decir, cuando estamos ante la práctica de argumentar, estamos sumidos en una argumentación y estamos tejiendo o usando argumentos, que quedarán conformados y determinados en función del contexto. De ahí que al acabar de argumentar, cuando la argumentación ha llegado a su fin, seamos capaces de identificar, analizar y evaluar los argumentos

presentes en la argumentación. Así que los argumentos son los productos o manifestaciones de la argumentación.

Otro punto de vista, es el Krummheuer (citado por Mendo, 2015) que considera que la argumentación es el proceso y el argumento es el producto. Es decir, que al trabajar juntos la función es dejar en manifiesto una explicación fundamentada de por qué eso es así, el cual dependerá de un conocimiento teórico, un saber lógico y de un razonamiento matemático.

Elementos Constitutivos de un Argumento

Un argumento está constituido por elementos que le definen y le dan forma, para poder desglosarlo es necesario hablar de un modelo clásico muy utilizado en el estudio y análisis de los argumentos, conocido como el "diseño de un argumento" propuesto por Toulmin (1958), en el que propone seis componentes para los argumentos, que se describen a continuación por Rodríguez (citado por Jaimes, 2019):

- **Conclusión**, es la tesis que se va a defender, el asunto a debatir, a demostrar o a sostener en forma oral o escrita. Expresa la conclusión a la que se quiere arribar con la argumentación.
- **Datos**, es la evidencia, aporta la razón (información) en la que la aserción se basa. Está formada por hechos o condiciones que son observables. Es el argumento que se ofrece para soportar la aserción (premisa o tesis).
- **Garante**, la aserción y la evidencia no son suficientes para establecer una argumentación sólida. Faltan otros elementos que indiquen cómo a partir de una evidencia se obtiene una aserción (Toulmin, 1958). Tal elemento es la garantía, parte esencial del argumento, que permite evaluar si la aserción se basa en la evidencia, siendo el puente del cual ambas dependen.
- **Respaldo**, la misma garantía también necesita de un respaldo o apoyo que puede ser un estudio científico, un código, una estadística, o una creencia firmemente arraigada dentro de una comunidad. El respaldo apoya a la garantía, mientras que la evidencia apoya a la aserción.

- **Cualificador Modal**, es el grado de certeza, la fuerza de la aserción, los términos y las condiciones que la limitan. Es la concesión que se les hace a los otros.
- **Refutación**, es la reserva o refutación es la excepción de la aserción (conclusión) presentada, es por ello que al proyectar un trabajo o al reportarlo, el investigador debe anticiparse a objeciones que la audiencia le pueda formular. Debe prever las debilidades y transformarlas en asunto de su indagación, con lo cual crecerían significativamente las posibilidades de desarrollo argumental de la causa (aserción) que se trata de instaurar.

Proceso de Argumentar

En matemática cuando se afirma o se quiere garantizar la verdad o falsedad de ciertas aseveraciones, digamos que es cuando entra en escena el proceso de argumentar, ya que como expone Toulmin (Citado por Álvarez, Ángel, Carranza, Soler, 2014) un argumento tiene lugar cuando a partir de unos hechos o datos se elabora una afirmación (conclusión).

En este sentido, partiendo de la teoría de Toulmin, los autores Álvarez, Ángel, Carranza, Soler, (2013) explican el proceso de argumentar consiste:

El paso de los datos a la conclusión es el garante y, generalmente, hace referencia a una regla, norma o principio general. El garante, a su vez, se sustenta en un grupo de afirmaciones que hacen parte de un conjunto de contenidos o creencias denominado respaldo. Las refutaciones o reservas son el conjunto de circunstancias en las cuales el garante se podría anular y el cualificador modal es una construcción lingüística que acompaña a la conclusión, atenuándola, indica el grado de probabilidad o de fuerza de la conclusión.

En la a figura 1 que se presenta a continuación observamos el modo en que se representa el argumento, el cual se deriva del proceso de argumentar que fue explicado en el párrafo anterior, allí se visualizan los 6 elementos propuestos por Tolmin que definen un argumento.

Figura 1. Estructura de un Argumento



La Argumentación Escolar

La argumentación juega un papel muy importante en el ámbito de la educación, durante la formación académica de todos, de manera particular en el aprendizaje de las ciencias y muy especialmente en la matemática, ya que permite desarrollar muchas habilidades que favorecen la construcción de un conocimiento más sólido y significativo, un conocimiento propio de la ciencia, por lo que es necesario que a los estudiantes se les estimule a descubrir y valorar su trascendencia, Sardá y Sanmartí (2000) (Citado en Buitrago, Mejía, Hernández, 2013), observaron que la argumentación incluida en la enseñanza y el aprendizaje:

- Favorece su comprensión, ya que es necesario relacionar los contenidos científicos con problemáticas reales.
- Diferentes formas de razonamiento.
- Mejora la comprensión de la naturaleza de la ciencia.
- Potencia y beneficia la capacidad de comunicación.
- Estimula el pensamiento crítico y la capacidad de decisión.
- El diálogo argumentativo favorece el aprendizaje de los alumnos.

Esto nos lleva a mirar con agrado las bondades que gana el estudiante y que como docente compete estimular, al incluir la argumentación durante la construcción del conocimiento, durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje, además de ser éste visto, como un eje transversal en el aprendizaje de la ciencia que contribuye en la riqueza del saber y de manera muy particular de la matemática, en la que también se pueden desarrollar otras habilidades que fortalecen el conocimiento.

Clasificación de los Argumentos

La definición y a su vez el desglose de los elementos propios de un argumento matemático, lleva a una categorización de este, dado a que no todo el tiempo los argumentos se estarán presentando de la misma manera, los autores Reid y Knipping (2010) definieron cuatro categorías amplias de argumentos por el uso, o no uso, de representaciones:

- **La categoría empírica**, son aquellos en los que se usan ejemplos específicos pero no representan una clase general.
- **La categoría genérica**, son aquellos en los que se usan ejemplos específicos como representaciones de una clase general.
- **La categoría simbólica**, son aquellos en los que las palabras y los símbolos se usan como representaciones.
- **La categoría formal**, son aquellos en los que se usan simbologías y palabras sin representar nada.

Dentro de estas cuatro categorías Reid y Knipping (2010) también identifican varios subcategorías, que están plasmados en el cuadro que se presenta a continuación:

Cuadro 1

Clasificación de los Argumentos.

CATEGORÍA	SUB-CATEGORÍA
-----------	---------------

Argumentos empíricos Ejemplos no representativos. Argumentos geométricos	Enumeración simple Extendiendo un patrón Experimento crucial Tipo o tipos Esquema de prueba perceptual
Entre ejemplos no representacionales y ejemplos representativos	Prueba por agotamiento Contraejemplo
Argumentos genéricos Ejemplos como representaciones	Ejemplo genérico numérico Ejemplo genérico de hormigón Ejemplo genérico pictórico Ejemplo genérico situacional
Entre lo genérico y lo simbólico	Argumentos geométricos
Argumentos Simbólicos: Palabras y símbolos como representaciones	Narrativa Simbólico.
Entre símbolos representativos y no representacionales	Manipulativo
Argumentos formales: símbolos no representacionales	

Fuente: Tomado de Reid y Knipping (2010).

Reid y Knipping (2010), tienen una propuesta amplia y detallada, sin embargo para fines de esta investigación solo estaremos utilizando las cuatro (4) categorías generales de los argumentos ya nombradas al inicio (empíricos, genéricos, simbólicos y formales), la cual nos permite observar el modo en que se representan los argumentos.

Niveles Argumentativos

La estructura argumentativa descrita por Toulmin, permite identificar los elementos principales de un argumento dado por el estudiante en las actividades que realiza; sin embargo, no siempre se expresan con claridad. Para analizar y definir la calidad del argumento, Tamayo (2012), propone un conjunto de cinco niveles argumentativos que surgen de la necesidad de ahondar las explicaciones que dan los estudiantes sobre los conceptos científicos en la medida que se van apropiando del lenguaje adecuado que facilite describir, relacionar e interpretar situaciones propias de su contexto, a continuación se presenta un cuadro en el que se define cada nivel propuesto por el autor:

Cuadro 2

Niveles Argumentativos según Tamayo (2012).

Niveles Argumentativos	Características
Nivel 1	Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia.
Nivel 2	Comprende argumentos en los que se identifica con claridad los datos y una conclusión.
Nivel 3	Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.
Nivel 4	Comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones haciendo uso de cualificadores o respaldo teórico.
Nivel 5	Comprende argumentos en los que se identifican datos conclusión(es) y contraargumento(s).

Fuente: Tomado de Jaimes, (2019).

En el cuadro anterior se presentan y se exponen los cinco niveles argumentativos, que se utilizaron en este trabajo de investigación para evaluar la calidad de los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR Pedro León Torres cuando se enfrentan en la solución de problemas de matemática, permitiendo analizar aquellas características asociadas a cada nivel en la que vemos cómo se van incorporando de forma progresiva los elementos de un argumento definido por Toulmin (1958) (datos, tesis, garante, respaldo, cualificador modal y refutaciones).

Por su parte, Rodríguez, Pamplona y Torres (2019), hacen una adaptación de los niveles de argumentación propuestos por Tamayo (2012) en el que explican y describen algunos detalles que se encuentran asociados a cada nivel, permitiendo una mayor comprensión de los niveles argumentativos, se presenta en el cuadro que continua

Cuadro 3

Adaptación de los Niveles Argumentativos.

Niveles Argumentativos	Características
Nivel 1	Elabora argumentos que son una descripción simple de la vivencia; es decir, en este nivel el estudiante no hace ningún tipo de análisis, sino que se limita a utilizar sus herramientas lingüísticas para narrar lo que capta con sus sentidos.
Nivel 2	Elabora argumentos en los que se identifican con claridad los datos (<i>data</i>) y una conclusión (<i>Claim</i>). En esta etapa, el estudiante concibe la totalidad de los datos y los analiza para emitir una conclusión.
Nivel 3	Elabora argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos (<i>data</i>), conclusiones (<i>Claim</i>) y justificación. No solo percibe los datos y emiten varias conclusiones, sino que estas están soportadas o justificadas.
Nivel 4	Elabora argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones (<i>warrants</i>) haciendo uso de calificadores (<i>qualifiers</i>) o respaldo teórico (<i>backing</i>). En este punto, el estudiante tiene claros los datos, emiten conclusiones con sus respectivas justificaciones y usa respaldos. Esto significa que amplía su conocimiento al de otras personas que hablan del tema y esto genera fundamentos o garantías sobre sus propias deducciones.
Nivel 5	Elabora argumentos en los que se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumentos(s). Este es el nivel máximo de argumentación, pues reconoce a la perfección las anteriores etapas dadas en los niveles argumentativos y, adicionalmente, conoce cuales son las posibles posturas contrarias a la posición por él.

Fuente: Tomado de Rodríguez, Pamplona y Torres (2019).

Dentro de este marco, podemos visualizar lo importante que es identificar los elementos del argumento, ya que estos son de gran ayuda al momento de establecer en qué nivel argumentativo se encuentran los estudiantes, note que los autores los mencionan al definirlos. A continuación presentaremos un cuadro que fue elaborado a partir de esta revisión y fue mucha ayuda en esta investigación, allí se presentan los niveles argumentativos a través de esquemas, que ya hemos mencionado y serán estudiados, entendiéndose como etapas en el que un estudiante puede estar ubicado en un solo nivel, de acuerdo a la estructura argumentativa que presente su argumento, veamos a continuación este cuadro resumen:

Cuadro 16.

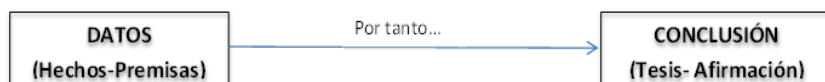
Esquema de los niveles argumentativos.

NIVEL 1



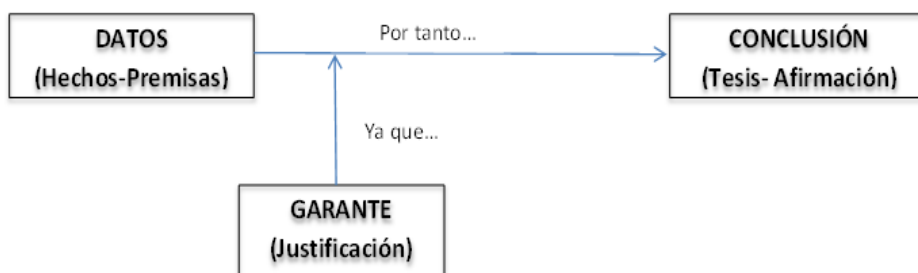
El estudiante se limita a describir, caracterizar y explicar lo que observa, es decir, lo que perciben y captan sus sentidos del problema matemático propuesto, por lo que solo se queda en las evidencias encontradas.

NIVEL 2



El estudiante extrae información, evidencias, datos del problema matemático propuesto y llega a una conclusión.

NIVEL 3



El estudiante no solo extrae información, evidencias, datos del problema matemático propuesto y llega a una conclusión, sino que además defiende su respuesta con algún fundamento matemático, bien sea alguna ley, regla, definición, propiedad, que explica y justifica el paso de los datos a la conclusión.

Cuadro (cont.)

NIVEL 4



El estudiante en esta etapa extrae información y datos del problema matemático propuesto, llegando a una conclusión, justifica su respuesta con algún fundamento matemático, ley, regla, definición o propiedad, y además ofrece un respaldo al aportar otros ejemplos o datos que validen al garante, que incluso puede ser hasta la aplicación de un teorema, acá también podemos encontrar algún cualificador modal.

NIVEL 5



El estudiante en esta etapa extrae información y datos del problema matemático, llega a una conclusión, justifica su respuesta con algún fundamento matemático, ley, regla, definición o propiedad, ofrece un respaldo y apoyo que valide al garante, puede agregar algún cualificador modal y además expone una excepción en la que falle su afirmación o explica el por qué se cumple para todo.

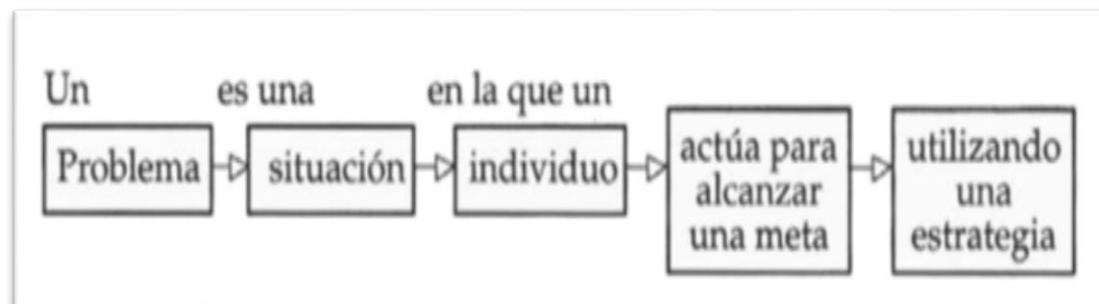
Fuente: Elaboración propia con base en la estructura del argumento de Toulmin y los niveles argumentativos de Tamayo (2012).

En ese cuadro encontramos la relación entre dos de los objetivos de esta investigación, en el que se visualizan los elementos del argumento presente en la respuesta del estudiante y se establece el nivel argumentativo en que este se encuentra.

Resolución de Problemas de Matemática

En matemática ya desde primaria, los estudiantes realizan actividades en las que resuelven problemas de algún contenido propio de la matemática, e incluso forma parte del currículo, ya que permite desarrollar habilidades del pensamiento matemático ya desde temprana edad. Entendido desde una forma más básica el problema puede entenderse como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere. Newell y Simón (citado en Lisset Poggioli 2009).

Figura 2. Problema.



Fuente: Tomado de Poggioli (2009).

Sin embargo, formalizando refiriéndonos a problemas del área de la matemática, continuación presentamos la definición dada por algunos autores:

Según Dijkstra (citado en Poggioli, 2009), la resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que involucra conocimiento almacenado en la memoria a corto y a largo plazo.

Asimismo Méndez (citado por Rizo y Aguilar, 2018), la resolución de problemas consiste en hallar una respuesta adecuada a las exigencias planteadas, pero realmente

la solución de un problema no debe verse como un logro final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental, debe implicar un análisis de la situación ante la cual se halla, en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades, en la puesta en práctica de métodos de solución, entre otros.

Por su parte, Echenique (citado en Meneses y Peñaloza, 2019) plantea que la resolución de problemas es la actividad más complicada e importante que se plantea en matemáticas. Los contenidos del área cobran sentido desde el momento en que es necesario aplicarlos para poder resolver una situación problemática.

Trigo (citado por Escalante, 2015) define que la resolución de problemas es la fase que supone la conclusión de un proceso más amplio que tiene como pasos previos la identificación del problema y su modelado. Lo que nos lleva a mirar una matemática cercana a nuestro entorno, a nuestra cotidianidad, a nuestro quehacer diario, y que los estudiantes pueden describir y modelar desde la matemática.

Por otra parte otros autores expresan que la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas”.

Elementos del Proceso de Resolución de Problemas

Al momento de enfrentarnos y buscar la solución de un problema matemático, se pueden observar características y elementos comunes entre los estudiantes durante este proceso, según Andre (citado en Poggioli, 2009), el proceso de resolución de problemas puede describirse a partir de los siguientes elementos considerados y nombrados a continuación:

- Una situación en la cual se quiere hacer algo, pero se desconocen los pasos precisos para alcanzar lo que se desea.

- Un conjunto de elementos que representan el conocimiento relacionado con el problema.
- El solucionador de problemas o sujeto que analiza el problema, sus metas y datos y se forma una representación del problema en su sistema de memoria.
- El solucionador de problemas que opera sobre la representación para reducir la discrepancia entre los datos y las metas.
- Al operar sobre los datos y las metas, el solucionador de problemas utiliza o puede utilizar los siguientes tipos de información como: la información almacenada en su memoria de largo plazo en forma de esquemas o producciones, los procedimientos heurísticos, los algoritmos y las relaciones con otras representaciones.
- El proceso de operar sobre una representación inicial con el fin de encontrar una solución al problema, se denomina búsqueda.
- La búsqueda continúa hasta que se encuentra una solución o el solucionador de problemas se da por vencido.

Modelos para la Resolución de Problemas

Existen diferentes propuestas sobre cómo se puede abordar un problema matemático. A continuación presentamos un cuadro comparativo en el que se describen algunos modelos empleados en la resolución de problemas, es decir, allí se pueden visualizar las etapas, pasos o fases que plantean algunos autores al buscar dar solución a un problema de matemática:

Cuadro 4

Modelos para la Resolución de Problemas.

POLYA (1981)	MASON BURTON Y STACEY (1988)	BRANDSFORD Y STEIN (1993)	MIGUEL DE GUZMÁN (1995)
Comprender el problema Estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida. Idear un plan de actuación que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta. Llevar a cabo el plan ideado previamente. Mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.	Abordaje: Comprender el problema. Concebir un plan. Ataque: Llevar a cabo el plan. Revisión: Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan	Identificación del problema. Definición y representación del problema. Exploración de posibles estrategias. Actuación fundada en una estrategia. Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.	Familiarización con el problema. Búsqueda de estrategias. Llevar adelante la estrategia. Revisar el proceso y sacar consecuencias.

Fuente: Tomado de Ceballos y Blanco (2008)

Fases para Resolver un Problema

En esta parte se hace mención al estudio y aporte realizado por George Pólya quien contribuye con cuatro fases, pasos o etapas en la resolución de problemas y es un referente de alto interés en este tópico, cuyos aportes surgen al percibir las dificultades que solían presentarse al resolver un problema de matemática, este método está basado cuatro pasos que son entender el problema, diseñar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás, a continuación Pólya (citado en Meneses y Peñaloza, 2019) explica:

- **Paso 1: Entender el problema,** en este primer paso el estudiante debe entender claramente lo que se les pide en el problema antes de proponer alguna operación que permita encontrar la solución, por lo que es necesario identificar los datos suministrados; con respecto a este primer paso Escalante (2015), sugiere leer bien, replantear el problema con sus propias palabras, reconocer la información que proporciona, hacer gráficos, tablas, incluso a veces se tiene que leer más de una vez.

- **Paso 2: Configurar un plan**, en este segundo paso etapa el estudiante utiliza sus conocimientos, imaginación y creatividad para establecer una estrategia que le permita encontrar y resolver el problema, con respecto a este segundo paso Escalante (2015), expone que en esta etapa, se plantean las estrategias posibles para resolver el problema y seleccionar la más adecuada.
- **Paso 3: Ejecutar el plan**, en este paso el estudiante implementa la estrategia que escogió para solucionar el problema. Con respecto a este tercer paso Escalante (2015), expone que en esta etapa, ya se tiene el plan seleccionado, así que se aplica
- **Paso 4: Mirar hacia atrás**, en este último paso el estudiante revisa su trabajo y se asegura de no haber cometido algún error; se puede orientar con preguntas como: ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema? ¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general? Si al resolver los problemas los estudiantes emplean en forma consiente y cuidadosa cada uno de los anteriores pasos, aprenderán a diseñar y poner en práctica estrategias que les permitan alcanzar el éxito, con respecto a este cuarto paso Escalante (2015), expone que en esta etapa, luego de resolver el problema, revisar el proceso seguido, es decir, examinar la solución. Cerciorarse si la solución es correcta, si es lógica y si es necesario, analizar otros caminos de solución.

Por otra parte Borragán (citando en Escalante, 2015) comenta que según Pólya, en la solución de un problema los estudiantes aplican las cuatro operaciones mentales de manera flexible; esto decir; que estos pasos no se trabajan necesariamente en una secuencia lineal, el cual podemos visualizar en la siguiente figura:

Figura 2. Operaciones Mentales Planteadas por Pólya.



Fuente: Tomado de Escalante (2015).

En este trabajo no nos enfocaremos en el orden en que se llevan a cabo las operaciones mentales que plantea el autor en los estudiantes, sino en los beneficios que gana el estudiante al resolver un problema de matemática con respecto al fortalecimiento y uso de los argumento como parte fundamental durante sus procesos de enseñanza y aprendizaje, desde cualquiera de las etapas en la que se encuentre al momento de enfrentarse en la solución de problemas de matemática.

ANTECEDENTES

En este apartado, se presta atención a investigaciones precedentes que señalan algunos aspectos y rasgos característicos entorno a los argumentos, particularmente al que emplean los estudiante en la solución de problemas de matemática, los cuales son apoyo y fundamento de este estudio.

Tamayo (2012), estudió el pensamiento crítico en niños desde tres categorías: solución de problemas, argumentación y metacognición, para el cual diseñó diez actividades, las cuales fueron aplicadas a 2.200 niños de 56 instituciones educativas públicas. Entre los principales resultados obtenidos, describe la estructura argumentativa empleada por los niños durante las diferentes actividades presentadas y realizadas en el aula y concluye con algunas recomendaciones respecto a la didáctica

de las ciencias, orientadas a cualificar los procesos argumentativos. Este estudio guarda relación con esta investigación ya que describe las estructuras y rasgos argumentativos empleadas por los niños con ciertas actividades propuestas con algunas de las teorías utilizadas para llevar a cabo los objetivos que de este estudio.

Álvarez, Ángel, Carranza y Soler (2014), realizaron un estudio con el fin de brindar ciertos elementos que ayuden con la transformación de la práctica educativa, por lo que presentaron algunas descripciones de procesos fundamentales en la actividad matemática: conjeturar y argumentar, llegando a la conclusión de que el proceso de argumentar debe estar presente en toda fase de desarrollo de la actividad matemática para así poder potenciar el pensamiento matemático y propiciar habilidades o competencias argumentativas, que van desde identificar y analizar argumentos en textos o ambientes educativos, hasta construirlos. Además de que las actividades matemáticas deben generar momentos de reflexión para que los procesos de conjeturar y argumentar aporten al desarrollo del pensamiento matemático y al desarrollo de otro tipo de competencias que atañen a los distintos campos del saber. Es de interés para esta investigación, dado a que uno de los problemas allí propuestos, se colocó en el instrumento aplicado a los estudiantes, ajustado a los fines de esta investigación.

Mendo (2015), realizó un trabajo de investigación que muestra evidencias de un análisis a los argumentos matemáticos expuestos por un grupo de estudiantes al resolver una secuencia didáctica sobre la integral impropia en un ambiente de uso de tecnología, con el propósito de identificar las líneas de razonamiento y argumentación y describir su pensamiento matemático. Los resultados de esta investigación muestran que en un ambiente de interacción y debate favorecen la aparición de argumentos y que la tecnología tiene un rol determinante en la conformación de los argumentos matemáticos particularmente para exponer y defender sus analogías al transitar entre las diferentes representaciones durante su solución. Esta investigación es de interés y apoyo para este estudio ya que utilizaron el modelo argumentativo de Toulmin (1958), para describir la construcción y estructura de los argumentos de los estudiantes.

Posada (2015), realizó un estudio referente a la argumentación y aprendizaje de la ciencia, cuyo propósito fue evaluar la calidad de los argumentos de los estudiantes

al implementar un programa pedagógico basado en la argumentación como herramienta para potenciar habilidades científicas en los niños; por lo que analizaron la relación entre la argumentación y el aprendizaje de la ciencia a nivel escolar. El autor hizo énfasis en la argumentación como fenómeno social y en la importancia de incorporar la argumentación en las prácticas pedagógicas científicas especialmente a nivel escolar. Este estudio es un referente para esta investigación ya que se centra en analizar la relación entre la argumentación y el aprendizaje, evaluando la calidad de los argumentos empleado por los estudiantes, que también se hará en este trabajo, además de que observó las bondades que se derivan de implementar la argumentación como herramienta en el proceso de aprendizaje a nivel escolar.

Jaimes (2019), realizó una investigación sobre la argumentación en la enseñanza de los fundamentos pedagógicos de primera infancia, en el que diseñó una unidad didáctica con cuatro secuencias, que permitió desarrollar actividades enfocadas en los procesos argumentativos. Realizó un análisis considerando los componentes de la estructura argumentativa y los niveles de argumentación, en donde observó la interpretación y análisis en cuanto a la calidad de los argumentos, antes y luego de emplear la didáctica, allí obtuvo como resultado que los argumentos construidos por los estudiantes mejoraron en su estructura, así como en la coherencia de sus ideas y la apropiación de los contenidos. Para esta investigación fue de gran apoyo ya que el autor entre sus resultados pudo observar la importancia del argumento en el aprendizaje, la calidad de los argumentos empleado por los estudiantes en las actividades propuestas e incluso analizó los componentes de la estructura argumentativa según Toulmin, que también fueron empleados en esta investigación.

Toro (2020), cuya investigación tuvo como objetivo central identificar los niveles argumentativos y los modelos explicativos del concepto del origen del universo con estudiantes del séptimo grado, en la se propuso una unidad didáctica, cuya estructura estaba dirigida a estudiantes entre los 12 y 15 años de edad, entre los que se valoró la calidad del argumento mediante los niveles argumentativos propuesto por Tamayo (2012). Entre los principales resultados, se llegó a que la intervención didáctica y la labor docente, suscitaron en los estudiantes la construcción de un modelo explicativo

más completo acerca del origen del universo, asimismo, se identificó en los argumentos elaborados por los estudiantes una mejor estructura, mayor coherencia. Concluyendo y motivando a trabajar en clase de ciencias la argumentación, ya que favorece el aprendizaje de conceptos y el desarrollo de pensamiento crítico, además, del conocimiento científico escolar, siendo relevante en este estudio, por el hecho de que los resultados realzan la trascendencia que tiene emplear los argumentos en la enseñanza y aprendizaje de cualquier contenido.

Vargas, Fernández, y Ruiz (2020), realizaron un estudio en el que analizaron los argumentos dados por docentes en formación al justificar la veracidad de enunciados referidos a la derivabilidad de una función en un punto. Empleando una adaptación del modelo de Toulmin, centrándose en la garantía dada y el respaldo presente, también identificaron el elemento matemático en el que se basaba la justificación, cómo lo empleaba y la forma en que representaba el argumento. Entre los principales resultados, encontraron que para argumentar se recurre principalmente a resultados matemáticos o reglas utilizados muchas veces sin respaldo. Este estudio fue de interés y apoyo para esta investigación, dado a que el modelo de Toulmin incluso con adaptaciones permite mirar la estructura argumentativa del argumento dado por los estudiantes durante el aprendizaje de la matemática.

Desde una perspectiva más general, estos trabajos de investigación fueron de gran importancia para el abordaje de este estudio ya que aunque pertenecen a diferentes autores guardan cierta relación con lo que se realizó en esta investigación, además de que sus aportes y análisis brindan elementos de orden teórico y metodológico que guiaron el desarrollo de este estudio, por el hecho de que se trabajó en torno al argumento empleado por estudiantes cuando se enfrentan con la solución de problemas matemáticos, observando cómo se llevan a cabo los procesos de argumentación, mostrando características propias y comunes entre los resultados obtenidos con respecto a los grupos de cada investigación.

CAPITULO III

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se expone la metodología que se llevó a cabo en el desarrollo de la investigación, considerando, la naturaleza del estudio, el diseño de la investigación, la

población, la muestra, las técnicas e instrumentos de recolección de datos, las técnicas de procesamiento y análisis de datos.

Naturaleza de la Investigación

Esta investigación se enmarca dentro del enfoque cuantitativo, bajo el paradigma positivista, ya que el investigador se separa del objeto de estudio para no interferir, ni modificar la realidad, dejando por fuera sus propios valores donde el conocimiento es visto como algo objetivo y externo al sujeto investigador (Piñero y Rivero, 2013).

El nivel de investigación es de tipo descriptivo e interpretativo dado a que permite describir, caracterizar y clasificar los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” al resolver y dar solución a un problema de matemática, además; de que este nivel de investigación, según, Arias (2006) se refiere al grado de profundidad con que se aborda un fenómeno u objeto de estudio, cuyo interés es el que persigue esta investigación en torno al argumento.

La modalidad es la estrategia general que adopta el investigador para responder al problema planteado, en este caso la investigación es de campo ya que consiste en la recolección de datos directamente de los sujetos investigados, expresado en el Manual UPEL (2016), con el propósito de que el análisis sistemático de esta investigación sea de describirlos e interpretarlos.

Diseño de la Investigación

El diseño de la investigación se refiere a la explicación del modelo metodológico asumido, según manual UPEL (2016), también se puede entender como la articulación lógica de todos los componentes que integran la investigación durante el proceso efectivo desde las primeras ideas hasta su comunicación escrita, Mendizabal (2006).

En esta parte, se deja en claro los pasos a seguir en esta investigación para lograr el objeto de estudio, en un primer momento, los datos se toman directamente de los sujetos investigados mediante la aplicación de un problema matemático de cuatro (4) ítems, que los estudiantes realizaron y respondieron, explicando en su mayoría los procedimientos que llevaron a cabo para responder las preguntas de la actividad, lo cual se hizo de forma individual.

En un segundo momento, para responder a los objetivos de esta investigación se elaboraron tres listas de cotejo dicotómicas para extraer la información entorno al argumento empleado por los estudiantes, de una manera objetiva en la que no se alteran las observaciones del objeto de estudio de esta investigación y en la que también se puedan extraer factores que afectan en este caso el uso de argumentos en la solución de problemas matemáticos, sin controlar ningún factor debido a su carácter de investigación no experimental.

Las listas de cotejo se confeccionaron tomando como base a los autores, Toulmin (1958) para identificar los elementos del argumento empleado por los estudiantes además de algunos resultados y cuadros de Jaimes (2019); Reid y Knipping (2010) al clasificar los argumentos empleados por los estudiantes, así como algunos de los resultados y conclusiones de Vargas, Fernández y Ruíz (2020) así como también los de Cervantes y Cabañas (2019); por último, a Tamayo (2012) al determinar los niveles de argumentación dados por los estudiantes así como algunos de los hallazgos y resultados de Rodríguez, Pamplona y Torres (2019).

Población y Muestra

Arias (2006), considera la población objetivo, al conjunto finito o infinito de elementos con características comunes para los cuales serán extensivas las conclusiones de la investigación. Ésta queda delimitada por el problema y por los objetivos del estudio y la muestra es un subconjunto representativo y finito que se extrae de la población accesible, en este trabajo nuestra población de estudio

corresponde a los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” correspondiente al año escolar 2020-2021 y la muestra son 15 estudiantes del año escolar ya indicado, cuyo tipo de muestreo fue no probabilístico causal o accidental, ya que en ese período de tiempo en que se realizó la investigación nos encontrábamos en pandemia por COVID-19, por lo que se debían respetar las restricciones y medidas de seguridad que fueron sugeridas e implementadas a nivel internacional, nacional, regional y de manera particular en las instituciones educativas, en donde fueron suspendidas las actividades presenciales, además del temor y cuidado que había en el entorno, por parte de los docentes y los representantes de no permitir que sus hijos se acercaran a los planteles.

Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Según Arias (2006) la técnica es el procedimiento o forma particular de obtener datos o información y un instrumento de recolección de datos es cualquier recurso, dispositivo o formato (en papel o digital), que se utiliza para obtener, registrar o almacenar información. En esta investigación se les hizo llegar a los estudiantes el instrumento a través del correo electrónico, otros lo descargaron por la página de la institución y algunos representantes se acercaron a retirar una copia en el plantel ya que para la fecha en que se aplicó el instrumento nos encontrábamos en pandemia de COVID-19 por lo que se debía cumplir y seguir con las medidas de seguridad establecidas para el momento.

Dadas las condiciones que anteceden, el instrumento que se utiliza en primer momento para la recolección de información, fue un problema matemático, cuya estructura era la de un cuestionario de preguntas abiertas (4 ítems) en las que según Arias (2006) se le da la libertad al estudiante de responder y desarrollar su respuesta de manera independiente, este se puede visualizar en el (Anexo A).

En este sentido, Jaimes (2019) define los cuestionarios como instrumentos de investigación que permiten mediante preguntas obtener información de las personas a

las que se consulta. Cabe destacar que el problema seleccionado fue extraído de un instrumento que fue validado y aplicado por los autores Álvarez, Ángel, Carranza y Soler (2014), con una ligera ampliación en los ítems, que favorecen el rumbo de esta investigación, por lo no fue necesario realizar una nueva validación.

De este modo, la estructura del instrumento (Problema de Matemática) propuesto a los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres”, es una invitación a responder los ítems de la actividad, de forma libre, desde lo que entienden y creen sea la estrategia adecuada para responder, por lo que era necesario describir los procedimientos e ideas que le surgieron durante la solución del problema, para extraer la información relacionada con los argumentos que ellos emplean al resolver un problema de matemática, para así ser estudiados y analizados.

Técnicas de Procesamiento y Análisis de Datos

El proceso de análisis se llevó a cabo mediante el contraste de información del problema matemático propuesto a los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres” siendo este el primer instrumento utilizado en esta investigación, junto a los otros tres instrumentos, las tres listas de cotejo elaboradas a partir de la estructura argumentativa propuesta por Toulmin (1958), la clasificación de Reid, y Knipping (2010) y los niveles argumentativos propuestos por Tamayo (2012) con respecto a los argumentos empleados por los estudiantes al resolver y dar solución a un problema matemático, estas listas de cotejo también denominada lista de control o de verificación, es un instrumento que indica la presencia o ausencia de un aspecto o conducta a ser observada, Arias (2006).

A continuación presentamos el instrumento (Cuadro. N° 5) que nos permitió identificar los elementos de los argumentos que emplearon los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres” al resolver el problema matemático propuesto, el cual es una lista de cotejo que se construyó a partir de la estructura argumentativa de Toulmin (1958).

Cuadro N° 5.

Elementos de un argumento empleados por los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres”.

ELEMENTOS	CRITERIOS	Estudiante	
		Si	No
Datos	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.		
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.		
	Los datos presentados son válidos.		
Conclusión o Tesis	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.		
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.		
	La tesis presentada es válida.		
Garante	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.		
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.		
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.		
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.		
Respaldo	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.		
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.		
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.		
Cualificador Modal	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: quizá, seguramente, típicamente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente, tal vez. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, en consecuencia, por tanto.		
	El cualificador modal presentado es válido.		
Refutaciones	El estudiante hace alguna excepción a su afirmación.		

El siguiente (Cuadro. N° 6) es un cuadro resumen de los datos obtenidos en el cuadro anterior (Cuadro. N° 5), una lista de cotejo en la que se identifican los elementos de los argumentos que emplearon los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres” en la solución del problema de matemático propuesto.

Cuadro N° 6

Distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” por elementos de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta.

ELEMENTOS DE LOS ARGUMENTOS						
Ítems	DATO(S)	CONCLUSIÓN	GARANTÍA(S)	RESPALDO	CUALIFICADOR MODAL	REFUTACIÓN
(a)						
(b)						
(c)						
(d)						

El siguiente instrumento (Cuadro N° 7) nos permitió clasificar los argumentos que emplearon los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” al resolver el problema matemático propuesto, a partir, de las cuatro categorías definidas por los autores los autores Reid y Knipping (2010) sobre los argumentos según el uso, o no uso, de representaciones.

Cuadro N° 7.

Clasificación de los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres”.

CATEGORÍA	CRITERIOS	Estudiante	
		Si	No
EMPÍRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos o casos concretos de la actividad propuesta, pero que no representan nada.		
	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos específicos que no representa una clase general, sino particular.		
	El argumento que presenta el estudiante es un dibujo particular como justificación.		

Cuadro (cont.)

GENÉRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos de un caso representativo a una clase más grande, que luego se puede llevar y expresar de forma general		
	El argumento empleado por el estudiante se basa en pruebas y justificaciones visuales basadas en figuras, imágenes, dibujos con respecto a una clase		
SIMBÓLICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de palabras y letras como representaciones.		
	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de símbolos como representaciones.		
FORMAL	El estudiante emplea argumentos con la sintaxis matemática.		

	El estudiante emplea argumentos en un contexto matemático, por lo que la estructura y rigurosidad es la de una prueba o demostración matemática.		
--	--	--	--

El siguiente (Cuadro. N° 8) es un cuadro resumen de los datos obtenidos en el cuadro anterior (Cuadro. N° 7), una lista de cotejo en la que se clasifica los argumentos que emplearon los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres” en la solución del problema de matemática propuesto.

Cuadro N° 8

Distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” por la clasificación de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta.

Ítems	CATEGORIA			
	Empírica	Genérica	Simbólica	Formal
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				

El siguiente instrumento (Cuadro N° 9) es una lista de cotejo que permitió establecer los niveles de argumentación de los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres” al resolver el problema de matemático propuesto a partir de los cinco niveles definidos por Tamayo (2012).

Cuadro N° 9.

Niveles de argumentación empleados por los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres”.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	Estudiante	
		Si	No

NIVEL 1 Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia.	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.		
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.		
NIVEL 2 Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión.	El estudiante identifica los datos.		
	El estudiante da conclusiones.		
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.		
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema		
	El estudiante establece cierta relación, causal o no, entre datos y conclusión.		
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.		
NIVEL 3 Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.		
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.		
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.		
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.		
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.		
NIVEL 4 Comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico.	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.		
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.		
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.		
NIVEL 5 Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).		
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.		
	El estudiante expone cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.		

El siguiente (Cuadro. N° 10) es un cuadro resumen de los datos obtenidos en el cuadro anterior (Cuadro. N° 9), una lista de cotejo en el que se determinan los niveles argumentativos empleados los estudiantes de quinto año de ETIR “Pedro León Torres” en la solución del problema de matemática propuesto.

Cuadro N° 10

Distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” por los niveles argumentativos empleados en la solución de problemas de matemática.

	NIVELES ARGUMENTATIVOS				
Ítems	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
(a)					
(b)					
(c)					
(d)					

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la investigación, el cual inició con un problema matemático que fue propuesto a los estudiantes de quinto año

de la ETIR “Pedro León Torres”, este se les presentó en forma de cuestionario (anexo A) a los estudiantes, quienes entregaron de forma escrita en la institución, allí se les pidió explicar y escribir todas sus ideas con mucha libertad al realizar y responder cada uno de los ítems en la actividad (anexo B), luego se analizó con tres listas de cotejos, los cuales fueron elaborados con el fin de cumplir con los objetivos de esta investigación, encontrando esta información en el (anexo C, D y E), sin embargo en este apartado se colocó un ejemplo en el que se visualiza como se llenó cada lista de cotejo con respecto a uno de los ítems propuestos en el problema matemático.

En un primer momento, luego de organizar las respuestas de los estudiantes, se identifican los elementos presentes de los argumentos empleados por cada uno de ellos al resolver y dar solución al problema de matemática propuesto, mediante una lista de cotejo, que se construyó tomando como referente el modelo de la estructura formal de la argumentación de Toulmin (1958), en el cual se indica que en un argumento se pueden llegar a involucrar seis (6) elementos: afirmación o conclusión, datos, garantía o justificación, respaldo, cualificador modal y refutación. A continuación se presenta el primer ítem del problema, seguido de la respuesta dada por uno (1) de los quince (15) estudiantes que realizó la actividad, los cuales fueron enumerados del 1 al 15.

Resolver el siguiente problema matemático

1. Observe la siguiente secuencia geométrica:

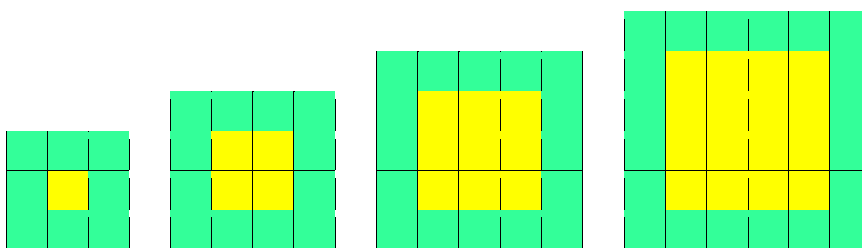


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
----------	----------	----------	----------

a. Cantidad de cuadros verdes en cada caso.

Respuesta del Estudiante 1.

Figura 1 $\rightarrow 8 + 1 = 9$

Figura 2 $\rightarrow 12 + 4 = 16$

Figura 3 $\rightarrow 16 + 9 = 25$

Figura 4 $\rightarrow 20 + 16 = 36$

Observaciones

- Los verdes aumentan 4 cantidades por figura.
- Los amarillos aumentan el cuadrado de la numeración (n) de las figuras.
- La cantidad de cuadritos aumenta si a la numeración (n) de las figuras se le suma 2 y se eleva al cuadrado.

$$\begin{array}{l} \text{Total } (n + 2)^2 \\ \text{Verde } 4n + 4 \\ \text{Amarillo } (n)^2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Total } (n + 2)^2 \\ \text{Verde } 4n + 4 \\ \text{Amarillo } (n)^2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Total} = \text{verde} + \text{amarillo} \\ \text{Total} = 4n + 4 + (n)^2 \end{array}$$

Al tener la respuesta del estudiante, se procede a llenar la siguiente lista de cotejo, en este caso por estudiante, a continuación presentaremos un ejemplo con respecto a la respuesta del estudiante 1 (E1) en el primer ítem del problema matemático propuesto a los estudiantes.

Cuadro 11.

Elementos identificados en el argumento empleado por el estudiante uno (E1) de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” en el ítem 1.

ELEMENTOS	CRITERIOS	Estudiante 1	
		Si	No
Datos	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.	X	

	Los datos presentados son válidos.	X	
Conclusión o Tesis	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.	X	
	La tesis presentada es válida.	X	
Garante	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.	X	
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.	X	
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.	X	
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.	X	
Respaldo	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.	X	
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.	X	
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.	X	
Cualificador Modal	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: quizá, seguramente, típicamente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente, tal vez. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, en consecuencia, por tanto.		X
			X
	El cualificador modal presentado es válido.		X
Refutaciones	El estudiante hace alguna excepción a su afirmación.		X

Note que, inicialmente no aparece reflejado en la respuesta del estudiante 1, separados como por secciones, estos son los datos, o dice abiertamente la conclusión es, así como no dice estos son los garantes, esta es la justificación, el cualificador modal que uso es este, o la refutación a esta solución es la siguiente, por lo que fue de gran ayuda el instrumento, al detectarlos por criterios de la lista de cotejo.

Se encontró que el estudiante 1 utiliza las figuras dadas en el problema como datos para dar respuesta a la primera pregunta y lo hacen de manera ordenada, indican el número de cuadros verdes por figura, luego de observar, contar y describir un comportamiento, es decir, que extrae datos y construye otros a partir de figuras dadas que asumen como datos iniciales, para luego dar respuesta a la actividad, además elabora una especie de diagrama donde establece relación entre el orden de la figura y el número de cuadros verdes, esto lo hace mediante una justificación (observación) con palabras y símbolos en las que explica y emiten una conclusión, por lo que hace referencia a una regla (se vale de operaciones aritméticas como adición y potencia para

respaldar la garantía y plantea una secuencia.), para determinar el número de cuadros verdes, es decir expone garantía(s) y explicado su respuesta (garante) con la regla planteada.

Este fue el procedimiento que se realizó con los quince estudiantes para identificar los elementos del argumento presente en la solución del problema de matemática propuesto, en el ítem 4 planteado. A continuación se presenta un cuadro resumen donde se muestra la distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” en el que se desglosan los elementos de los argumentos utilizados por los quince (15) estudiantes que realizaron el problema matemático, por cada ítem.

Cuadro 12.

Distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” por elementos de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta durante el año escolar 2020- 2021.

ÍTEMS	ELEMENTOS DE LOS ARGUMENTOS					
	DATOS	CONCLUSIÓN	GARANTIAS	RESPALDO	CUALIFICADOR MODAL	REFUTACIONES
Nº. 1	15	15	7	6	0	0
Nº. 2	15	15	4	3	0	0
Nº 3	15	14	13	6	3	0
Nº. 4	11	10	10	6	5	1

En este cuadro podemos visualizar de forma resumida los resultados obtenidos al aplicar la lista de cotejo que nos permitió identificar los elementos de los argumentos que se encuentran presente en las respuestas dadas por los por los estudiantes al realizar el problema matemático propuesto, encontrando que:

- Para los estudiantes los datos son una pieza fundamental para poder encontrar, plantear y dar una posible solución a la actividad propuesta, por lo que si ellos no lograr identificar y extraer los datos del problema propuesto, no les permite mirar con claridad una respuesta; de los quince (15) estudiantes se observó que en los tres primeros ítems, todos fueron capaces de extraer información de este,

a partir de las figuras allí dadas en la secuencia geométrica, incluso algunos llegaron a construir nuevos datos y conseguir más evidencias, mientras que en el ítems cuatro no todos los estudiantes dieron respuesta, sin embargo cabe resaltar, que algunos estudiantes exponen de forma explícita las evidencias, otros de forma implícita en el desarrollo y solución del problema.

- Los estudiantes en su mayoría, luego de identificar los datos en el problema hacen su(s) afirmación(es), es decir exponen una conclusión, asumen una postura que defender y esperan se les acepte, sin embargo entre los resultados encontrados notamos que en el tercer ítems al igual que en el cuarto ítems hay un estudiante en cada caso que no plantea una tesis, no llega a dar una conclusión con la información extraída, es decir; no llegan a hacer una afirmación con respecto a los datos encontrados en el problema por lo que solo se quedan digamos en la observación de los datos.
- De los quince (15) estudiantes que realizaron la actividad podemos notar que en un primer momento ellos se detienen a observar la evidencia con la que cuentan, es decir, ¿qué información se tiene con respecto al problema?, ¿cuáles son los datos que se pueden extraer? para luego, en un segundo momento hacer una afirmación, llegar a una conclusión del problema planteado.
- En los resultados obtenidos en la tabla, además de identificar los datos y la conclusión sumamos un nuevo elemento que observar según el esquema de argumentación de Toulmin, el garante, en donde encontramos que no todos los estudiantes exponen sus garantías, ni justifican su respuesta, por lo que ese paso o puente entre los datos y la conclusión se visualiza solo en una parte de las respuestas dadas por algunos de los estudiantes, siendo este el elemento que le da más fuerza a la argumentación, ya que como afirma Jaimes (2019), no hay una argumentación sólida con datos y una conclusión, faltan otros elementos que indiquen cómo a partir de los datos se llega a esa conclusión, por lo que es importante que quede claro si la conclusión se basa en los datos del problema la cual se deriva de la participación del garante, note que en el ítem 1, se obtuvo que 7 estudiantes justifican su respuesta, en el ítem 2, solo 4 estudiantes

exponen sus garantías, en el ítem 3, de los 15 estudiantes se tiene que 13 justifican su respuesta y en el ítem 4 de los 15 estudiantes solo 10 expone y justifica su respuesta, las garantías permiten establecer esa conexión entre los datos y la conclusión ya que brinda una lógica transición entre ellos a través de una regla, norma o principio.

- En la solución del problema matemático propuesto a los estudiantes no todos ofrecen respaldo a las garantías expuestas, para el ítem 1, solo 6 estudiantes sustentan la justificación, para el ítem 2, se tiene que 3 estudiantes presentan algún respaldo a la garantía y tanto para el ítem 3, como para el ítem 4 se tiene que 6 estudiantes sustentan al garante, en donde estos ofrecen y aportan ejemplos, hechos, datos que expliquen y den validez al garante dado por cada uno de los estudiantes.
- Algunos de los estudiantes hacen uso de modificadores modales para darle fuerza a la tesis los quince estudiantes, para el ítem 1 y 2 ninguno de los estudiantes emplea cualificador modal, mientras que en el ítem 3 se tiene que 3 estudiantes hacen uso de modificador modal y en el ítem 4, se tiene que 5 de los 15 estudiantes son los que emplean cualificador modal.
- Solo un estudiante hace una excepción a su afirmación en el ítem 4, ya que al dar su conclusión expone ciertas condiciones en la que no se cumple y falla su tesis, considerándose una refutación.
- En varias de las actividades propuestas a los estudiantes, estos utilizan las figuras como datos principales para dar sus respuestas y conclusiones, en otros casos se valen de estos para construir otros datos que le permitan responder otros ítems allí planteadas, incluso hasta explican y ayudan a probar la validez de las afirmaciones que hace el estudiante al dar sus conclusiones, siendo estos respaldo de algunas garantías.
- En algunas de las actividades los estudiantes emplean operaciones aritméticas como adición, multiplicación y potencia como garantía y en otras ocasiones como respaldo al realizar algunos cálculos que justifiquen y fortalezcan sus respuestas y afirmación(es).

Entre otras observaciones también se tiene que:

- El estudiante 1 elabora una especie de diagrama donde establece relación entre el orden de la figura y el número de cuadros verdes, cuadros amarillos y el total de cuadros, respondiendo al ítem 1, donde más adelante le permite dar un poco más de formalidad para llegar a una conclusión en la tercera y cuarta pregunta, además de que le permite ofrecer respaldos desde su construcción.
- El estudiante 4 elabora una tabla de datos para organizar y dar una conclusión en el ítem 1, en donde indican el número de cuadros verdes por figura y establece una correspondencia al asociar el orden de las figuras con el número de cuadros verdes en el ítem 1.
- El estudiante 10 extrae datos y construyen otros a partir de figuras dadas que asumen como datos iniciales para dar respuesta a la actividad. (Indica número de cuadros verdes y cuadros amarillos) en el ítem 1.
- Los estudiantes 6 y 15 llegan a una conclusión errada en el ítem 1.
- El estudiante 11 emplea el concepto de múltiplos de 4 para justificar el ítem 1 e incluso el ítem 2, mientras que, el estudiante 1 hace uso de la definición de secuencia geométrica y progresión aritmética para justificar su respuesta en el ítem 4.
- En los ítems 3 y 4 algunos de los estudiantes plantean ecuaciones de forma verbal para determinar y dar una respuesta entre ellos se encuentra el estudiante 7.
- El estudiante 1 propone un producto notable para encontrar el número total de cuadros verdes, que a su vez también le permite encontrar el número de cuadros amarillos y así responder en el ítem 3, por otra parte el estudiante 5 también propone una estrategia para responder al ítem 3, solo que este intercambia las definiciones de, fila y columna para llegar a una conclusión.
- El estudiante 1 propone una progresión aritmética al igual que el estudiante 2, solo que el estudiante 1 lo hace más formal.
- El estudiante 7 emplea símbolos de implicación, como entonces.

- El estudiante 14 aunque no concluye, realizó un análisis y construcción previa que le induce a la formula general del ítem 4.

En esta primera etapa se extrajo información sobre definiciones y propiedades de algunos contenidos matemáticos que fueron utilizados por los estudiantes como justificaciones y garantías en algunos de los ítems, los cuales aparecen reflejados en el siguiente cuadro:

Cuadro 13.

Garantías empleadas por los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” en el problema de matemática propuesto.

Garantías	Indicador
Representación de Función	Mediante Diagrama Sagital
	Mediante Tablas
Definición	Sucesión
	Secuencia Geométrica
	Progresión
	Función
	Múltiplo
	Producto Notable

Cuadro (cont.)

Garantías	Indicador
Operaciones Aritméticas	Adición
	Multipliación
	Potencia
	Propiedades de los N

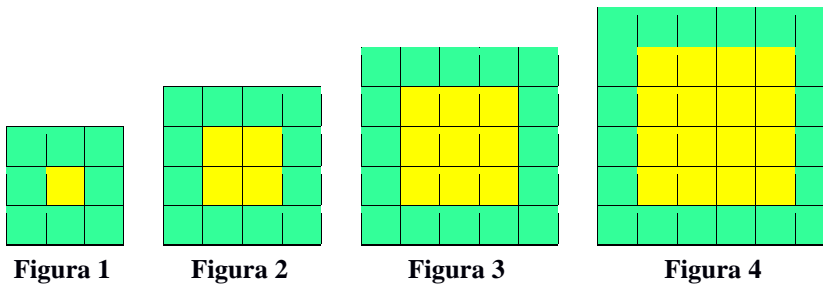
En un segundo momento clasificamos los argumentos empleados por los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres”, para ello fue empleado el modelo adaptado para la educación matemática expuesto por Reid y Knipping (2010), en el que

se contempla solo los cuatro primeros elementos, datos, conclusión, garantía y respaldo.

A continuación se presenta un ejemplo del ítem 3 del problema matemático propuesto a los estudiantes, seguido de la respuesta dada por el estudiante cuatro (E4).

Resolver el siguiente problema matemático

1. Observe la siguiente secuencia geométrica:



- c. Puede decir cuántos cuadros verdes tendrá la figura 10 sin realizar el dibujo. Si ya sabes la respuesta ¿Puedes describir la forma en que lo dedujiste?

Respuesta del Estudiante 4 (E4)

Tendrá 44 cuadros verdes y 100 cuadros amarillos la figura 10.

Primero: Si observamos las figuras anteriores nos damos cuenta de que las verdes serán la primera fila y la última fila, la primera columna y la última columna.

Segundo: Desde la figura 1 se eleva al cuadrado cada una es decir:

$$\text{Figura 1} \rightarrow 3^2 = 9$$

$$\text{Figura 2} \rightarrow 4^2 = 16$$

$$\text{Figura 3} \rightarrow 5^2 = 25$$

$$\text{Figura 4} \rightarrow 6^2 = 36$$

$$\text{Figura 5} \rightarrow 7^2 = 49$$

$$\text{Figura 6} \rightarrow 8^2 = 64$$

$$\text{Figura 7} \rightarrow 9^2 = 81$$

$$\text{Figura 8} \rightarrow 10^2 = 100$$

$$\text{Figura 9} \rightarrow 11^2 = 121$$

$$\text{Figura 10} \rightarrow 12^2 = 144$$

De la figura 1 se me presenta $\frac{8}{9}$ es decir, de 9 cuadros 8 son verdes y 1 es amarillo.

De la figura 2 se me presenta $\frac{12}{16}$ es decir, de 16 cuadros 12 son verdes y 4 es amarillo.

De eso me di cuenta que se repetían 2 patrones:

En amarillo se suman los números impares a partir de 3, es decir, $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9 \dots$

En los verdes se repetían de 4 en 4 a partir de 8, es decir: $8 + 4 = 12$,

$$12 + 4 = 16, \quad 16 + 4 = 20, \quad 20 + 4 = 24, \quad 24 + 4 = 28, \dots$$

Figura	V	A
1	$\frac{8}{9}$	1
2	$\frac{12}{16}$	4
3	$\frac{16}{25}$	9
4	$\frac{20}{36}$	16
5	$\frac{24}{49}$	25
6	$\frac{28}{64}$	36
10	$\frac{44}{144}$	100

Al tener la respuesta del estudiante, se procede a llenar la siguiente lista de cotejo, en este caso para el estudiante número 4 (E4), con respecto al ítem 3 del problema matemático propuesto a los estudiantes:

Cuadro 14.

Clasificación del argumento empleado por el estudiante cuatro (4) de quinto año de ETIR “Pedro León Torres” con respecto al ítem 3.

CATEGORIA	CRITERIOS	Estudiante 4	
		Si	No
EMPÍRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos o casos concretos de la actividad propuesta, pero que no representan nada.		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos específicos que no representa una clase general, sino particular.		X
	El argumento que presenta el estudiante es un dibujo particular como justificación.		X
GENÉRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos de un caso representativo a una clase más grande, que luego se puede llevar y expresar de forma general.	X	

	El argumento empleado por el estudiante se basa en pruebas y justificaciones visuales basadas en figuras, imágenes, dibujos con respecto a una clase.		X
SIMBÓLICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de palabras y letras como representaciones.		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de símbolos como representaciones.		X
FORMAL	El estudiante emplea argumentos con la sintaxis matemática.		X
	El estudiante emplea argumentos en un contexto matemático, por lo que la estructura y rigurosidad es la de una prueba o demostración matemática.		X

Note que el estudiante 4 en la tercer ítem se ubican en la categoría de argumento genérico ya que al escribir sus justificaciones, describen un caso representativo de una clase que puede ser generalizado, es decir, explica con detalle la construcción que le llevó a hacer sus afirmaciones, dejando plasmado el procedimiento realizado para llegar a esa conclusión.

Este fue el procedimiento que se realizó con los quince estudiantes para clasificar el argumento empleado por cada uno en la solución al problema de matemática propuesto, con respecto a los cuatro (4) ítems que fueron planteadas y resueltos por estos. A continuación se presenta un cuadro resumen donde se muestra la distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” en la que se categorizó el argumento planteado y expuesto por estudiante al resolver el problema matemático, por cada ítem.

Cuadro 15.

Distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” por la clasificación de los argumentos empleados en la actividad de matemática propuesta durante el año escolar 2020- 2021.

PREGUNTA.	CATEGORIA			
	Empírica	Genérica	Simbólica	Formal
1	1	3	0	0
2	5	1	0	0
3	1	3	2	0
4	2	1	3	0

En el cuadro anterior encontramos resultados con respecto a la clasificación que se hizo de los argumentos que emplearon los estudiantes en el problema de matemática propuesto, luego de aplicar la lista de cotejo, cabe destacar que no todos se categorizaron puesto que en la solución se debían identificar los datos, la conclusión, el garante y el respaldo, elementos ya definidos por Toulmin en el esquema de la argumentación, esta clasificación nos permite mirar el modo en que representaron el argumento los estudiantes, encontrando que:

- No se presentó mucha variedad al representar los argumentos, ya que en un primer momento no todos se podían clasificar según los criterios de Reid y Knnipping (2010), y los pocos estudiantes que fueron categorizados entraron en su mayoría en la categoría empírica y la categoría genérica, además de otros pocos que se ubicaron en la categoría simbólica.
- En el ítem 1 sólo se clasificó la argumentación empleada por 4 estudiantes encontrándose distribuidos de la siguiente manera, 1 estudiante en la categoría de argumentos empíricos y los otros 3 estudiantes en la categoría de argumentos genéricos.
- En el ítem 2 sólo se ubicaron en las dos primeras categorías de la clasificación, distribuidos de la siguiente manera 5 estudiante en la categoría de argumentos empíricos y un estudiante en la categoría de argumentos genéricos.
- En las respuestas dada por los estudiantes en el ítem 3, encontramos un poco más de variedad en los argumentos empleados por ellos, ya que uno de los estudiantes se ubica en la categoría de argumentos empíricos, tres estudiantes se ubican en la categoría genérica y dos en la categoría simbólica.
- En el ítem 4 se le pide a los estudiantes construir una fórmula general, de acuerdo a la argumentación que dieron, se les clasificó distribuyéndose de la siguiente manera dos estudiantes en la categoría empírica, un estudiante en la categoría de argumentos genéricos y tres estudiantes en la categoría de argumentos.
- En los resultados presentados en el cuadro, se muestra que ninguno de los argumentos empleados por los estudiantes se ubica en la categoría de

argumentos formales, por lo que la estructura y rigurosidad de una prueba matemática no se percibe en sus respuestas.

- En la categoría de argumentos empíricos los estudiantes al responder los ítems 1 y 4 realizan sus justificaciones a partir de la observación y caracterización que surge de los mismos datos, por lo que sus representaciones son específicas y particulares.
- En la categoría de argumentos genéricos los estudiantes los ítems 1, 2, 3, y 4 realizan sus justificaciones al describir un procedimiento de un caso representativo de una clase que luego lo expresan de forma general.
- En la categoría de argumentos simbólicos los estudiantes al responder los ítems 3 y 4 realizan sus justificaciones haciendo uso de algunos símbolos matemáticos así como de letras y palabras características propias de ella, explicando sus afirmaciones, incluso en la última pregunta ellos proponen fórmulas que les permite calcular el número de cuadros para cualquier figura y explican mediante ejemplos que la fórmula dada y construida desde sus observaciones o mediante el uso de algún contenido es aplicable.

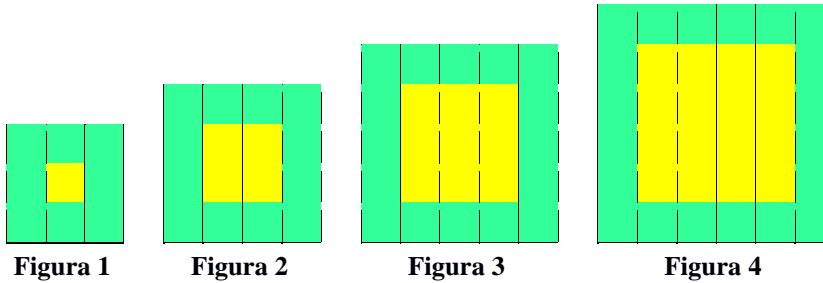
En un tercer momento de esta investigación se establece en qué nivel argumentativo se encuentran las justificaciones y explicaciones que dan los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” al responder los ítems del problema matemático propuesto, mediante un conjunto de cinco niveles planteados y adaptados por Tamayo, (2012), en la que evaluar la calidad del argumento se encuentra definido en términos cinco (5) niveles.

En esta etapa se observa cómo son las argumentaciones que dan los estudiantes, así como algunos rasgos peculiares entre ellos, bien sea comunes o no, ya que ellos son libres y autónomos en sus respuestas, por ello se tuvo presente que esta actividad no consiste en calificar y dar una ponderación a las respuestas dadas por el estudiante, en este sentido, Jaimes (2019) expone que no es sólo mirar la exactitud con que se manejan los conceptos sino la estructura y las características con que los estudiantes argumentan sus respuestas.

A continuación se presenta un ejemplo del ítem 4 del problema, seguido de la respuesta dada por el estudiante cuatro (4) de los quince (15) estudiantes que realizó el problema matemático, antes de presentar los resultados generales.

Resolver el siguiente problema matemático

1. Observe la siguiente secuencia geométrica:



- d. Intenta construir una fórmula general para determinar la cantidad de cuadros verdes para cada figura que desees dibujar sin realizar las figuras previas (la figura n ésima).

Respuesta del Estudiante 4.

La formula a la que llegue no se cumple para todo

$y = \text{verde} , \quad x \geq 3$

$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ es par si la figura es par} \\ n \text{ es impar si la figura es impar.} \end{array} \right.$

Figuras Pares $x^2 - 2n = y$ $n = 2, 8, 18 \dots$		Figuras Impares $x^2 - 2(n - 1) = y$ $n = 1, 5, 13 \dots$	
2	$4^2 - 2.2 = y$ $16 - 4 = y$ $12 = y$	1	$3^2 - (2.1 - 1) = y$ $9 - 1 = y$ $8 = y$
4	$6^2 - 2.8 = y$ $36 - 16 = y$ $20 = y$	3	$5^2 - (2.5 - 1) = y$ $25 - 9 = y$ $16 = y$
6	$8^2 - 2.18 = y$ $64 - 36 = y$	5	$7^2 - (2.13 - 1) = y$ $49 - 25 = y$

	$28 = y$			$24 = y$
--	----------	--	--	----------

Al tener la respuesta del estudiante, se procede a llenar la siguiente lista de cotejo, en este caso para el estudiante 4, con respecto al ítem 4 del problema:

Cuadro 17.

Nivel argumentativo del estudiante cuatro (E4) de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” con respecto al ítem 4.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	Estudiante 4	
		Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.	X	
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.	X	
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.	X	
	El estudiante da conclusiones.	X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.	X	
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema	X	
	El estudiante establece cierta relación, causal o no, entre datos y conclusión.	X	
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.	X	
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.	X	
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.	X	
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.	X	
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.	X	
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.	X	
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.	X	
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.	X	
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.	X	

NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).	X	
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.	X	
	El estudiante expone cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.	X	

Note que, la respuesta del estudiante 4, no aparecen de manera explícita, indicando, estos son los datos, esta es la conclusión, así como no dice estos son los garantes, esta es la justificación, el cualificador modal que uso es este, o la refutación a esta solución es la siguiente, por lo que el instrumento mediante los criterios, permitió detectar el nivel argumentativo del estudiante, al observar que los datos construidos por el estudiante se derivan de la misma información general suministrada por problema y de las otras partes del ejercicio ya resueltas que le permitieron llegar a la conclusión

Por su parte, también se visualiza en la lista de cotejo que el estudiante justifica y respalda su respuesta al ir verificando la fórmula definida por tramos, en la que además expone las limitaciones de su planteamiento, al exponer que su fórmula no se cumple para todo, este último elemento que percibimos en la respuesta del estudiante es llamado refutación, note que este joven es capaz de reconocer que su afirmación falla en algún momento, aunque se satisface para unos cuantos valores que el mismo verifica, por lo que llama mucho la atención, ver el nivel de razonamiento y análisis que tiene el estudiante, por lo que se ubica en el nivel argumentativo 5, ya que se identifican los 6 elementos de Toulmin, aunque este no logre responder en totalidad el ítem d.

A continuación se presenta un cuadro resumen donde se muestra en qué nivel argumentativo se sitúa cada estudiante por ítem en la actividad propuesta, luego de aplicar una lista de cotejo que se construye a partir de los niveles dados por Tamayo (2012) y de algunos resultados obtenidos por Jaimes (2019) y Rodríguez, Pamplona y Torres, en sus investigaciones.

Cuadro 18.

Distribución de los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” por niveles argumentativos en la solución del problema matemático propuesto durante el año escolar 2020- 2021.

	NIVELES ARGUMENTATIVOS				
ÍTEMS	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Nº. 1	0	7	5	3	0
Nº. 2	0	13	1	1	0
Nº. 3	1	1	7	6	0
Nº. 4	1	3	2	4	1

En el cuadro anterior encontramos resultados con respecto al nivel argumentativo en el que se encuentran los estudiantes con respecto a los argumentos empleados y expuestos por cada uno en la solución del problema de matemática propuesto, con la intención de evaluar la calidad de los mismos, los cuales además, se construyen a partir de los elementos que conforman un argumento, los cuales ya fueron identificados al inicio, permitiendo ubicar los argumentos de los estudiantes entre los cinco niveles y realizar dicha distribución expuesta en el cuadro anterior, note que estos niveles no son más que etapas en las que se posiciona cada estudiante de acuerdo a los elementos de los argumentos planteados por Toulmin, presentes y ausentes en sus argumentos, luego de aplicar la lista de cotejo, se encontró que:

- Los estudiantes en el ítem 1, luego de observar la secuencia geométrica debían determinar el número de cuadros en cada caso, aunque todos lo realizaron, tres de ellos no respondieron correctamente, sin embargo, se encuentran distribuidos de la siguiente manera, en el nivel 1 en el que los estudiantes narran los que captan sus sentidos, no se ubica ninguno, mientras que en el nivel 2 se encuentran siete (7) estudiantes casi la mitad de los participantes, donde se aprecia datos y una conclusión en sus argumento(s), luego se tiene que cinco (5) estudiantes se sitúan en el nivel 3 en la que se identifican datos, conclusión y justificación, en el nivel 4 encontramos tres (3) estudiantes cuyos argumentos

están constituidos por datos, conclusión, justificaciones, respaldo e incluso cualificador modal y ningún estudiante se ubica en el nivel 5.

- En el ítem 2, los estudiantes debían indicar cuál era la figura 5 y 6, es decir, las figuras siguientes a la secuencia geométrica planteada en el problema matemático, la cual realizaron todos, de acuerdo a los argumentos empleados por los estudiantes, nos encontramos que ninguno se ubica, ni en el nivel 1 ni en el nivel 5, mientras que en el nivel 2 se sitúa más de la mitad de los participantes, trece (13) estudiantes que extraen datos de su lectura al problema matemático y luego emiten una conclusión, digamos que ellos presentan un argumento simple, a lo que Jaimes (2019) llama argumento débil, por el hecho que está constituido por datos y conclusión, por otra parte, se tiene que sólo un estudiante se encuentra en el nivel 3, y uno en el nivel 4 cuyos argumentos lo conforman 4 elementos, datos, conclusión, garante y cualificadores o respaldos teóricos.
- Los estudiantes en el ítem 3, debían encontrar el número de cuadros verdes para la figura 10, sin realizar el dibujo y explicar dicha deducción, a la que todos buscaron responder, según los argumentos empleados por los estudiantes se encuentran distribuidos en los niveles argumentativos de la siguiente manera, un estudiante se ubica en el nivel 1 y un estudiante en el nivel 2, mientras que en el nivel 3 se encuentran siete (7) estudiantes, lo que indica que en esta etapa el estudiante elabora argumentos con un poco más de fuerza ya que además de identificar datos y una conclusión ofrece como soporte una justificación, en el siguiente nivel encontramos seis estudiantes cuyos argumentos están constituidos por datos, conclusión, justificación, cualificadores o respaldos, mientras que en el nivel 5 no encontramos ningún estudiante.
- En el ítem 4, donde a los estudiantes se les pide intentar construir una fórmula general para determinar el número de cuadros verdes de cualquier figura, de acuerdo a la secuencia geométrica del problema matemático propuesto, nos encontramos con que sólo 10 estudiantes realizaron la actividad, por lo que, la distribución de los argumentos dados por estos según los niveles

argumentativos quedan de la siguiente manera, en el nivel 1, se ubica un estudiante, en el nivel dos (2), no se encuentran tres (3) estudiantes, luego nos encontramos con dos (2) estudiantes en el nivel 3 y cuatro (4) estudiantes en el nivel 4 y un estudiante en el nivel 5, en este último, el estudiante al plantear la fórmula general para encontrar el número de cuadros verdes de cualquier figura, reconoce y hace una excepción a su afirmación.

Cabe resaltar, que en un principio cuando se buscó identificar los elementos de un argumento entre las respuestas dadas por todos los estudiantes de quinto año al dar solución al problema de matemática por ítem, permitió evaluar la calidad de los mismos ubicándolos en un nivel argumentativo, a partir del conocimiento que se tenía sobre elementos del argumento que se encontraban presentes en cada respuesta, además de que también se pudieran categorizar.

De este modo, los niveles argumentativos en que se posicionaron los argumentos de cada estudiante por nivel, vistos también como etapas, permitieron mirar la profundidad con que los estudiantes daban sus respuestas por ítem, al problema de matemática propuesto, dado a que allí se veían reflejado, las habilidades en cuanto a observación que tenía el estudiante, el conocimiento que manejaba, su capacidad de análisis, relación y deducción

Por su parte, la clasificación realizada a los argumentos dados por los estudiantes en la solución del problema de matemática, también permitió mirar las características comunes entre ellos, en cuanto al modo en que se representa el argumento, pues también sabemos que cada estudiante le da su respectivo matiz a la respuesta,

En este sentido, el análisis realizado y los resultados encontrados, también permitieron visualizar la relación tan estrecha que guardan los objetivos entre sí, a pesar, de lo que buscaba y pretendía cada uno por separado, dado a que todos tienden al mismo punto de convergencia, la presencia del argumento, su participación, su papel, su importancia y trascendencia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en los estudiantes en cualquier nivel educativo.

CONCLUSIONES

Desde el análisis realizado, se puede concluir que el argumento juega un papel muy importante y trascendente en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en cualquier nivel educativo, cuyos rasgos característicos y más representativos fueron descritos en la colección de datos que fueron extraídos en el capítulo anterior, el cual inició con un problema de matemática dividido en 4 ítems, que se le propuso a los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” con la intención de estudiar si ellos empleaban el argumento al momento de dar solución al problema planteado, siendo este abordado desde tres vertientes que fueron enmarcados en los objetivos específicos de este trabajo de investigación.

La primera vertiente de esta investigación estuvo dirigida a identificar los elementos de los argumentos que emplearon los estudiantes al resolver el problema de matemática, en el que:

- Se identificaron los elementos (datos, conclusión, garante, respaldo, cualificador modal y refutaciones) en los argumentos empleados por los estudiantes, en cada ítem que constituía el problema de matemática, encontrándose de forma parcial algunos o casi en su totalidad los elementos presentes en sus respuestas (argumentos).
- Se evidenció que en la mayoría de los ítems del problema de matemática propuesto a los estudiantes de quinto año, ellos expusieron una conclusión que se derivó en la mayoría de los casos a los datos iniciales, suministrado en el problema, también se encontró respuestas semejantes entre los estudiantes, así como también respuestas con abordajes diferentes, por lo que se deben implementar actividades y estrategias que favorezcan el uso de argumentos.
- En esta primera parte, también, se pudo visualizar el esquema argumentativo por parte de cada estudiante por medio de la propuesta de Toulmin (1958), ya que luego de identificar los elementos presentes o ausentes en sus respuestas se ve el desglose de los elementos del argumento de cada estudiante, lo que además permite observar que tan débil es o no es el argumento.
- Los elementos de un argumento definidos por Toulmin, permiten tener una mirada más amplia y general del panorama argumentativo que nos encontramos con cada estudiante, ya que estos, siendo muchas veces bañados con el mismo contenido matemático, no afloran de la misma manera, es decir, encontramos no solamente varias formas de llegar a la solución del problema matemático sino también distintas formas de presentarlo.
- Al identificar los elementos del argumento presente en las respuestas de los estudiantes, al problema de matemática, facilitó que se llevaran a cabo los otros objetivos específicos.

La segunda vertiente de esta investigación estuvo dirigido a clasificar los argumentos empleados por los estudiantes de quinto de la ETIR “Pedro León Torres” al resolver un problema de matemática:

- Los argumentos dados por los estudiantes de quinto año en el problema de matemática propuesto permitió identificar los tipos de argumentos de algunos

de los estudiantes por cada pregunta, sin embargo, no todos fueron categorizados ya que para esta parte debían contemplar los cuatro primeros elementos (datos, tesis, garante y respaldo), por lo que los argumentos presentados y contruidos por los estudiantes, de acuerdo a propiedades asociadas y vinculadas con su estructura argumentativa descartó a varios estudiantes por ser argumentos débiles que solo contaban con datos y conclusión o datos, garante y conclusión.

- En el ítem 1 la categoría que se hizo notar fue la genérica, ya que los argumentos dados por los estudiantes, se caracterizaban por hacer representaciones a clases grandes, que luego podían ser expresadas de forma general, sin embargo uno de los estudiantes se ubicó en la categoría empírica dado a que su argumento se basaba en ejemplos específicos.
- En el ítem 2 del problema matemático, hay mayor predominio en la categoría empírica, ya que el argumento que presentan los estudiantes se justifica a través de un dibujo, mientras que sólo un estudiante se ubicó en la categoría genérica ya que sus justificaciones no estaban basadas en particularidades.
- En el ítem 3 del problema, sobresale nuevamente la categoría genérica, ya que el modo en que se representan los argumentos los estudiantes, se basan en ejemplos de un caso representativo que se puede generalizar, también se ubica un estudiante en la categoría empírica en la que el argumento representa una clase en particular y dos estudiantes en la categoría simbólica dado por los estudiantes se valen de letras, palabras y símbolos para dar sus justificaciones.
- En el ítem 4 del problema propuesto, nos encontramos con argumentos muy variados por partes de los estudiantes, por lo que, en la categoría empírica se ubican dos estudiantes, cuyo argumento no representa una clase general, sino particular, en la categoría genérica, se ubica un estudiante, cuyo argumento se puede expresar de forma general y en la categoría formal, se ubican tres estudiantes cuyo argumento se basa en el uso de símbolos, letras e incluso palabras.

- Esta categorización permitió visualizar aquellos elementos presentes o ausentes en un primer momento para poder llevar a cabo la clasificación, que dan los matices característicos de cada categoría desde los argumentos que presentaron los estudiantes en la solución del problema de matemática propuesto.
- También se observó casos como el estudiante 1 que en el ítem 1 y el ítem 2 sus argumentos se ubica en la categoría genérico, mientras que en el ítem 3 y el ítem 4 sus argumentos se ubica en la categoría simbólica, es decir; en la solución al problema matemático podemos encontrar argumentos por ítem que se ubican en diferentes categorías para un mismo estudiante.

La tercera vertiente de esta investigación estuvo dirigida a establecer en qué nivel argumentativo se ubicaban los argumentos dados por los estudiantes de quinto año de la ETIR “Pedro León Torres” al resolver el problema de matemática propuesto, encontrando que:

- Los argumentos dados por los estudiantes de quinto año al resolver el problema de matemática, presentaban una estructura argumentativa que permitió evaluar la calidad de estos por ítem, ubicándolos en un determinado nivel de acuerdo a su estructura argumentativa.
- La lista de cotejo 1, aplicada como instrumento para poder responder el objetivo 1 de esta investigación, fue clave para poder llevar a cabo el tercer objetivo, ya que fue un poco más sencillo y rápido poder ubicar por nivel cada uno de los argumentos dados por los jóvenes al dar solución al problema de matemática planteado, conociendo los elementos del argumento presente en cada respuesta dada por los estudiantes, por ítems.
- Los niveles son diferentes entre sí aunque tengan algunos elementos en común, pues el hecho de incluir de manera progresiva los elementos de la estructura argumentativa, nos permite observar que tan fuerte es el argumento que presentan los estudiantes, por lo que podemos visualizar en sus respuestas la profundidad, dominio y manejo del conocimiento que tienen.
- Los niveles nos permite observar que tan fuerte es el argumento que presentan los estudiantes, por lo que podemos visualizar en sus respuestas su estructura

argumentativa además de la profundidad, el dominio y el manejo del conocimiento que estos tienen.

- Un aspecto también de interés, encontrado en el estudio es el conocimiento matemático que manejaban los estudiantes de quinto año al dar su solución al problema de matemática propuesto, mayormente sus garantías se vinculaban con el uso de operaciones aritméticas, con las que buscaban explicar y justificar sus aseveraciones, partiendo de su observación y descripción, sin embargo otros de ellos fueron un poco más allá al hablar de sucesión, progresión y hasta plantear una función de forma verbal o mediante diagrama para dar respuesta a los ítems planteados en el problema, cuyos argumentos fueron más claros y fuertes.
- Solo un estudiante en el ítem 4 se ubicó en el nivel 5.
- Los estudiantes solo se pueden ubicar en un solo nivel, ya que depende de los elementos de Toulmin que se encuentren presentes al momento de realizar su argumentación, los cuales además fueron desglosados en la primera parte.

RECOMENDACIONES

Los resultados obtenidos y las conclusiones a las que llegó esta investigación, apuntan hacia la importancia que tiene el desarrollo y uso consciente de habilidades argumentativas que se desarrollan durante la formación del conocimiento matemático desde las distintas etapas de educación, por lo que se recomienda:

- A las instituciones educativas, promover eventos en lo que se genere intercambio de saberes en el área de matemática por parte de los estudiantes, con actividades que favorezcan el uso de los argumentos, por ejemplo exposiciones de juegos matemáticos que involucren o donde se realicen problemas de matemática, además de aportes y aplicaciones de esta ciencia en diferentes áreas de estudio.
- A los docentes, incluir en la planificación estrategias metodológicas que favorezcan el uso de argumentos en la enseñanza de la matemática, en particular resolución de problemas, cuyo proceso de analizar un problema para dar una o

varias vías de solución, ellos sienta la libertad de comunicar saber, con el fin de que los estudiante desarrollen habilidades argumentativas.

- A los docentes, incluir en la planificación estrategias metodológicas que favorezcan el uso de argumentos en la enseñanza de la matemática, en particular resolución de problemas, cuyo proceso de analizar un problema para dar una o varias vías de solución, ellos sienta la libertad de comunicar saber, con el fin de que los estudiante desarrollen habilidades argumentativas.
- A los investigadores, para futuras investigaciones del tipo cualitativas o cuantitativas, en la que se pueda ampliar esta investigación, realizando entrevistas a los estudiantes que permita tener un panorama más amplio y generoso en cuanto al argumento que estos empleen, también se puede estudiar los argumentos que emplean los estudiantes en otras estrategias metodológicas como por ejemplo el juego y la heurística durante la enseñanza de la matemática, incluso se puede hacer estudio en cuanto a las estructuras argumentativas de los docentes al explicar y realizar actividades de los temas de matemática en el aula de clases incluso de como los docentes siendo agentes mediadores entre el conocimiento matemático y los estudiantes estimulan el uso de argumentos en las clases, por otra parte también se puede comparar los argumentos de los estudiantes antes y después de diseñar e implementar bien sea actividades, estrategias, recursos o materiales didácticos que contengan problemas de matemático, incluso se puede comparar y analizar respuestas de estudiantes a los que se les ha estimulado con la resolución de problemas matemáticos y a otros no, con el fin estudiar las estructuras argumentativas entre ellos.
- A los estudiantes, se les debe motivar a participar en las actividades que preparan los docentes en las clases de matemática, de una forma libre, sin temor a preguntar, cuestionar lo que se les enseña, así como también, incentivarles a consultar textos y materiales con temas a fines al momento de estudiar, de tal forma que ellos puedan fortalecer su capacidad de juzgar, lo que piensan, lo que leen, lo que dicen, lo que hacen y lo que expresan al momento de resolver

un problema, ya que todos tiene sus propias bondades en el desarrollo de habilidades matemáticas.

REFERENCIAS

- Alcolea, J. (2012). Argumentation in Mathematics. En A. Andrew e I. Dove (Comp.), *The Argument of Mathematics*. (pp. 47-60). Springer Science.
- Álvarez, I.; Ángel, L.; Carranza, E. y Soler, M. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números*, vol. 85. pp. 75-90.
- Arias, Fidias G. (2006). *El proyecto de investigación: Introducción a la metodologíacientífica*. (5ta ed.). Caracas: Episteme.
- Buitrago, A.; Mejía, N. y Hernández, R. (2013). La argumentación: de la retórica a la enseñanza de las ciencias. *Innovación Educativa*, vol. 13, No. 63. pp. 17-39. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179429575003>. [Consultado: 2021, diciembre 2].
- Ceballos, J. y Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. [Documento en línea]. Disponible: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2763109.pdf> [Consultado: 19 de marzo del 2018. 4:30pm].
- Cervantes, J. y Cabañas, G. (2019). La refutación en el contexto de la argumentación compleja. Congreso Nacional de Investigación educativa.
- Driver, R y Newton, P. (2000). *Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms*. *Science Education* 84 (3), pp.287-312.

- Escalante, S. (2015). "Método Pólya en la Resolución de Problemas Matemáticos (Estudio realizado con estudiantes de Quinto primaria, sección "A", de la Escuela Oficial Rural Mixta "Bruno Emilio Villatoro López", Municipio de la Democracia, Departamento De Huehuetenango, Guatemala)". Tesis de Grado. Universidad Rafael Landívar. Facultad de Humanidades, Licenciatura en la Enseñanza de Matemática y Física, Quetzaltenango.
- Duval, R. (1999). *Algunas cuestiones relativas a la argumentación*. La leftie de la Prevue International Newsletter on the Teaching and Learning on Mathematical Proof. [Revista en línea]. Disponible: <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/9112ThemeES.html> [Consulta: 2005, Marzo 24].
- Fairstein, G. y Gyssels, S. (2003) ¿Cómo se Enseña? Colección programa internacional de formación de educadores populares. Disponible: http://www.feyalegria.org/images/acrobat/10111011510124197114_2044.pdf [Consulta: 2016, Septiembre 23]
- Jaimes, C. (2019) La Argumentación en la Enseñanza de los Fundamentos Pedagógicos de Primera Infancia. Trabajo de Grado de Maestría. Universidad Autónoma de Manizales.
- Llanos, V., y Otero, C. (2012) Un análisis de las características de los libros de matemática para la Enseñanza Secundaria con relación a la argumentación y las imágenes. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Vol.51.no2 / junio 2012 / Pp. 119-148 / Perspectiva Educacional. Disponible: <http://www.perspectivaeducacional.cl/index.php/peducacional/article/viewFile/113/48> [Consultado: 20 de marzo del 2018 / 6:45pm]
- Mendizábal, N. (2006). Los componentes del diseño flexible en la investigación cualitativa. *Estrategias de investigación cualitativa*. Primera edición. P (66).
- Mendo, L. (2015). Argumentos matemáticos de estudiantes universitarios sobre la integral impropia. Tesis Doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN de México.
- Meneses, M. y Peñaloza, D. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas. *Zona Proxima*, 31, 7-25.
- Pérez, Y., y Beltrán, C. (2011). ¿Qué es un problema matemático y como resolverlo? Algunas consideraciones. *EduSol*, Vol. 11, No. 34. pp. 74-89. Disponible en: <http://www.redalic.org/articulo.oa?id=475748673009>. [Consultado: 2021, enero 2].
- Piñero, M. y Rivero, M. (2013). Investigación Cualitativa: Orientaciones Procedimentales (1a. ed.). Barquisimeto: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- Poglioli, L. (2009). Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender.
- Posada, J. (2015). La argumentación y su rol en el aprendizaje de la ciencia. *Revista Tesis Psicológica*. 10(1), 146-160.
- Reid, D. y Knipping, C. (2010). Proof in Mathematics Education. Research, learning and teaching. Sence Publishers Rotterdam. Boston.

- Rodríguez, A., Pamplona, D. y Torres, I. (2019). Desarrollo de niveles argumentativos a partir de una unidad didáctica basada en la discusión de problemas socialmente vivos. *Revista Academia y Virtualidad*. [Revista en Línea] Vol. 12(2). pp. 5-21. Disponible: <https://doi.org/10.18359/ravi.4282>. [Consultado: 2021, diciembre 2].
- Sánchez, M (2008). Desarrollo de habilidades del pensamiento: razonamiento verbal y solución de problemas. 2ed. México: Trillas.
- Tamayo, O. (2012). La argumentación como constituyente del pensamiento crítico en niños. *Revista Hallazgos*. 9 (17), 211-233
- Toro, F. (2020). Identificación de los niveles argumentativos y los modelos explicativos del concepto origen del universo. Tesis de Maestría. Facultad de Estudios Sociales y Empresariales. Manizales.
- Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2006). Manual de trabajos de grado, especialización y Maestría y Tesis Doctorales. Caracas-Venezuela.
- Vargas, M. Fernández, J. y Ruiz, J. (2020). Análisis de los argumentos dados por docentes en formación a una tarea sobre derivadas. *PNA* 14(3), 173-203.

ANEXO A

Instrumento 1.

Problema Matemático.



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA EDUCACIÓN
ESCUELA TÉCNICA INDUSTRIAL ROBINSONIANA
“PEDRO LEÓN TORRES”
BARQUISIMETO – EDO. LARA

Prof. Rosmery Sánchez

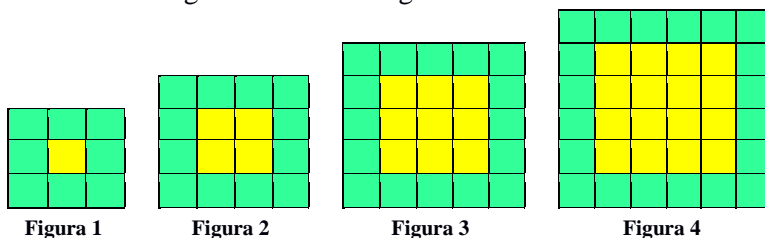
CUESTIONARIO

El presente instrumento consta de un problema matemático en el que se formulan cuatro (4) preguntas, con el fin estudiar los argumentos empleados por los estudiantes en la solución de problemas de matemática, por lo que se les invita a responder de forma libre y detallada cada una de su(s) respuesta(s). A continuación se le presentan las indicaciones generales.

Instrucciones:

- Colocar sus datos al inicio de la hoja en la que va a desarrollar la actividad, indicando nombre, apellido y mención a la que pertenece.
- Escribir su(s) respuesta(s) en una hoja.
- Exponer por escrito todas las ideas que se le ocurrieron para realizar y responder la(s) pregunta(s) de la actividad propuesta.
- Explicar con detalle los procedimientos y análisis realizados.
- Justificar cada uno de los cálculos, procedimientos y análisis desarrollados para la realización de la actividad.

1. Observe la siguiente secuencia geométrica:



Responda las siguientes preguntas:

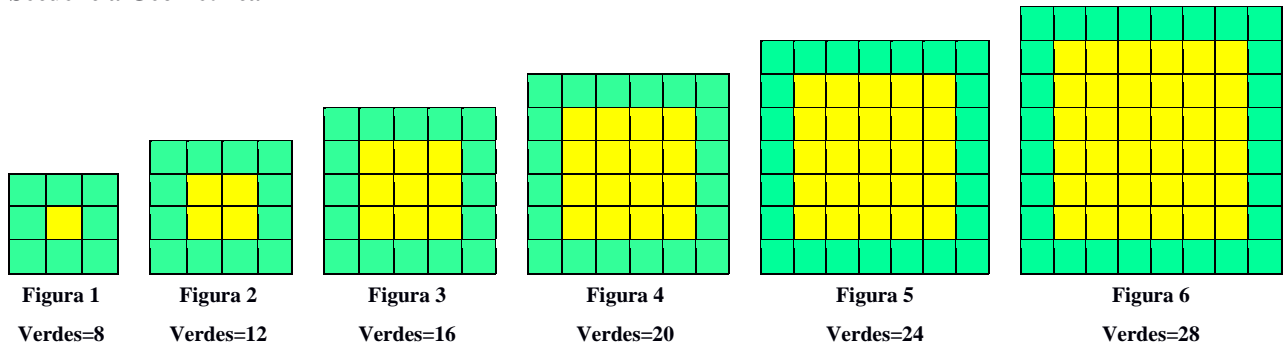
- Determinar la cantidad de cuadros verdes en cada caso.
- Indicar cuál será la figura 5 y la figura 6.
- Puede decir cuántos cuadros verdes tendrá la figura 10, sin realizar el dibujo. Si ya sabes la respuesta ¿Puede describir la forma en que lo dedujo?
- Construir una fórmula general para determinar la cantidad de cuadros verdes para cada figura que desees dibujar sin realizar las figuras previas (la figura n.ésima).

ANEXO B.

Respuesta de los estudiantes al Problema Matemático.

Respuesta del estudiante 1 (E1) al instrumento 1.

Secuencia Geométrica



Secuencia

Figura 1 $\rightarrow 8 + 1 = 9$

Figura 2 $\rightarrow 12 + 4 = 16$

Figura 3 $\rightarrow 16 + 9 = 25$

Figura 4 $\rightarrow 20 + 16 = 36$

Figura 5 $\rightarrow 24 + 25 = 49$

Figura 6 $\rightarrow 28 + 36 = 64$

Observaciones

Los verdes aumentan 4 cantidades por figura.

Los amarillos aumentan el cuadrado de la numeración (n) de las figuras.

Ecuaciones

La cantidad de cuadrillos aumenta si a la numeración (n) de las figuras se le suma 2 y se eleva al cuadrado.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Total } (n+2)^2 \\ \text{Verde } 4 + 4 \cdot n \\ \text{Amarillo } (n)^2 \end{array} \right\} \text{Total} = \text{verde} + \text{amarillo} \quad \text{Total} = (4 + 4 \cdot n) + (n)^2$$

Para la figura 10. Sin dibujar la figura 10, no supe deducir, la cantidad de cuadros. Pero, siguiendo la secuencia sí.

Para la figura 10. $n=10$.

$$\text{Total}_{(10)} = (4 + 4 \cdot 10) + (10)^2$$

$$\text{Total}_{(10)} = (4 + 40) + 100$$

$$\text{Total}_{(10)} = 44 + 100 = 144$$

Así {44 son verdes y 100 son amarillos}.

Deducciones.

Noté que la cantidad de cuadrillos amarillos correspondía a un número con raíz cuadrada exacta, que coincidía con el número de la figura, así que lo llame **n**.

También pensé que se podía usar una progresión aritmética planteada así.

$$a_1 = n^{\circ} \text{ impar}$$

$$a_2 = a_1 + n^{\circ} \text{ impar}_{(n+2)}$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n + n^{\circ} \text{ impar}_{(n+2)}$$

Para los cuadritos verdes.

$$v_1 = 8$$

$$v_2 = v_1 + 4$$

$$\vdots$$

$$v_{n+1} = v_n + 4$$

Respuesta del estudiante 2 (E2) al instrumento 1.

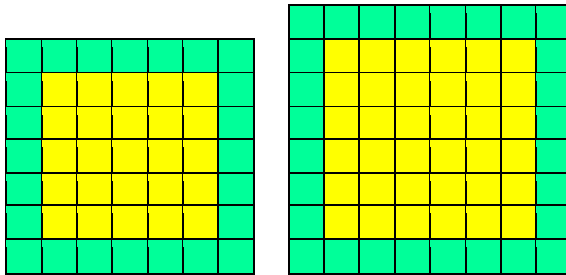
a)

La cantidad de cuadros en cada caso (Esto lo resolví contando cada cuadro).

- En la figura **1** hay **8** cuadros verdes.
- En la figura **2** hay **12** cuadros verdes.
- En la figura **3** hay **16** cuadros verdes.
- En la figura **4** hay **20** cuadros verdes.

b)

Figura 5 y 6 (Este lo resolví agregando una línea de cuadros más a cada figura).



c)

La figura **10** tendrá = **44** cuadros verdes.

(Lo deduje porque cada figura tiene **4** cuadros verdes más que la anterior, ósea lo que hice, sumar y agregar a las otras figuras que seguían **4** cuadros más y listos).

d)

Formula general para determinar la cantidad de cuadros verdes para cada figura. (Lo deduje así ya que a cada figura anterior le tuve que sumar cada vez cuatro veces el cuatro).

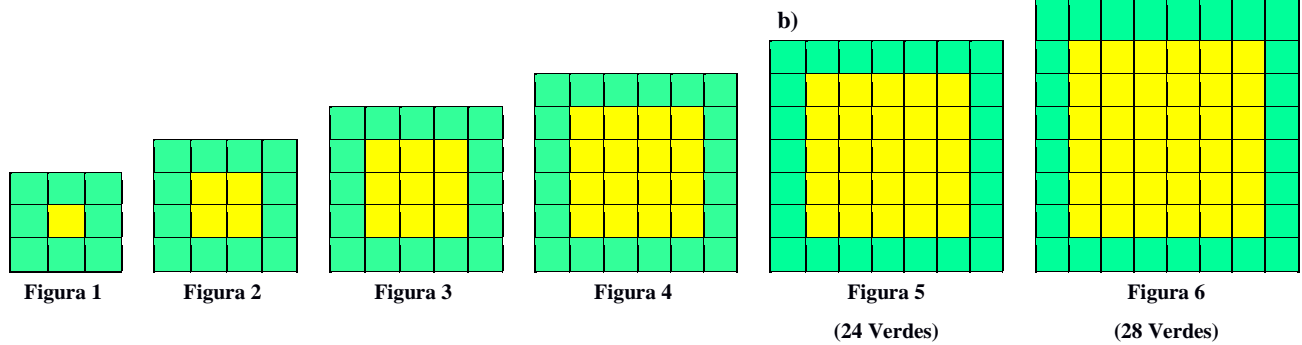
$$A = x + 4$$

A: Número de cuadros verdes.

x: Número de cuadros verdes anterior.

Respuesta del estudiante 3 (E3) al instrumento 1.

Resolución de Problemas



a)

Figura 1: Figura 2: Figura 3: Figura 4:

c)

Por cada figura se le suma un cuadro de color amarillo y cuatro cuadros color verde.

d)

La fórmula es:

Cuadro 1: $8 \times 1 = 8$

Cuadro 3: $8 \times 2 = 16$

Cuadro 5: $8 \times 3 = 24$

Cuadro 7: $8 \times 4 = 32$

Cuadro 9: $8 \times 5 = 40$

e)

Analice la cantidad de cuadros verdes, desde la figura 1, hasta la figura 1 y conté la diferencia de cuadros verdes entre las figuras.

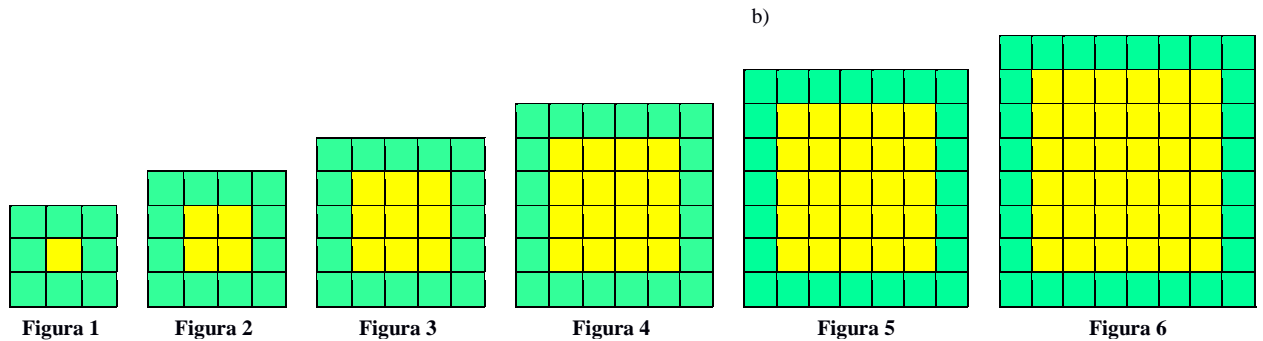
f)

Se resolvió de manera lógica ya analítica y el resultado es que hay dos formas de realizar los ejercicios, y es por multiplicación y suma.

g)

Razone detalladamente observando cada figura y cada formula con sus respectivos resultados.

Respuesta del estudiante 4 (E4) al instrumento 1.



a)

Figura	1	2	3	4
Cuadros Verdes	8	12	16	20

c)

Tendrá 44 cuadros verdes y 100 cuadros amarillos la figura 10.

Primero: Si observamos las figuras anteriores nos damos cuenta de que las verdes serán la primera fila y la última fila, la primera columna y la última columna.

Segundo: Desde la figura 1 se eleva al cuadrado cada una es decir:

Figura 1 $\rightarrow 3^2 = 9$

Figura 2 $\rightarrow 4^2 = 16$

Figura 3 $\rightarrow 5^2 = 25$

Figura 4 $\rightarrow 6^2 = 36$

Figura 5 $\rightarrow 7^2 = 49$

Figura 6 $\rightarrow 8^2 = 64$

Figura 7 $\rightarrow 9^2 = 81$

Figura 8 $\rightarrow 10^2 = 100$

Figura 9 $\rightarrow 11^2 = 121$

Figura 10 $\rightarrow 12^2 = 144$

De la figura 1 se me presenta $\frac{8}{9}$ es decir, de 9 cuadros 8 son verdes y 1 es amarillo.

De la figura 2 se me presenta $\frac{12}{16}$ es decir, de 16 cuadros 12 son verdes y 4 es amarillo.

De eso me di cuenta que se repetían 2 patrones:

- En amarillo se suman los números impares a partir de 3, es decir, $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9 \dots$
- En los verdes se repetían de 4 en 4 a partir de 8, es decir: $8 + 4 = 12$, $12 + 4 = 16$, $16 + 4 = 20$, $20 + 4 = 24$, $24 + 4 = 28, \dots$

Figura	V	A
1	$\frac{8}{9}$	1
2	$\frac{12}{16}$	4
3	$\frac{16}{25}$	9
4	$\frac{20}{36}$	16
5	$\frac{24}{49}$	25
6	$\frac{28}{64}$	36
10	$\frac{24}{144}$	100

Desde el principio vi esa forma y no se me ocurrió otra forma y si me imagino que puede haber otra forma de sacarla

d)

Ya que no pude hallar una fórmula para aplicarla, a lo que llegue no se cumple para todo, estas fueron:

$$y = \text{verde} \quad x \geq 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ es par si la figura es par} \\ n \text{ es impar si la figura es impar.} \end{array} \right.$$

$$\text{Figuras Pares } x^2 - 2n = y \quad n = 2, 8, 18 \dots$$

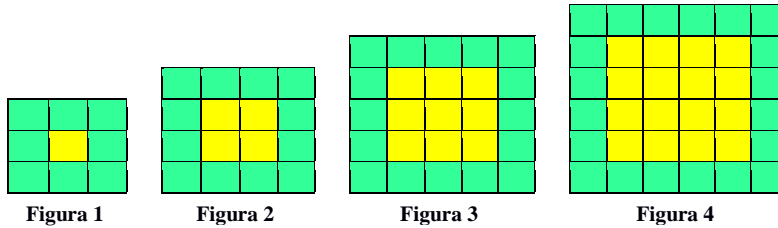
$$\text{Figuras Impares } x^2 - 2(n - 1) = y \quad n = 1, 5, 13 \dots$$

Figuras Pares $x^2 - 2n = y$ $n = 2, 8, 18 \dots$		Figuras Impares $x^2 - 2(n - 1) = y$ $n = 1, 5, 13 \dots$	
2	$4^2 - 2 \cdot 2 = y$ $16 - 4 = y$ $12 = y$	1	$3^2 - (2 \cdot 1 - 1) = y$ $9 - 1 = y$ $8 = y$
4	$6^2 - 2 \cdot 8 = y$ $36 - 16 = y$ $20 = y$	3	$5^2 - (2 \cdot 5 - 1) = y$ $25 - 9 = y$ $16 = y$
6	$8^2 - 2 \cdot 18 = y$ $64 - 36 = y$ $28 = y$	5	$7^2 - (2 \cdot 13 - 1) = y$ $49 - 25 = y$ $24 = y$

Logre responder casi todas las preguntas, solo faltó la fórmula, me parece que está bien todo lo que hice, ya que por vista y secuencia en las figuras concuerdan a la solución que llegue.

Respuesta del estudiante 5 (E5) al instrumento 1.

Observe

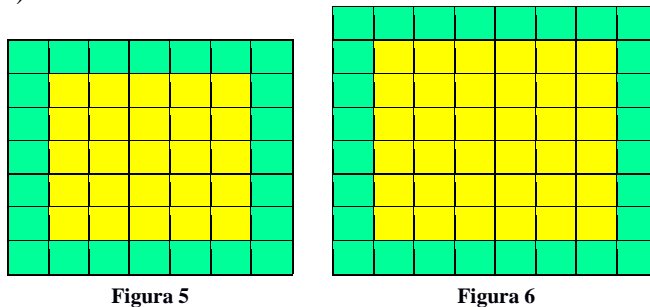


a)

- En la figura 1 hay 8 cuadros verdes.
- En la figura 2 hay 12 cuadros verdes.
- En la figura 3 hay 16 cuadros verdes.
- En la figura 4 hay 20 cuadros verdes.

Los cuadros verdes aumentan de 4 en 4 en cada caso.

b)



c)

La figura 10 tendrá 44 cuadros verdes.

Deduje que la figura 10 tendrá 44 cuadros verdes y que procedí a hacer la suma de los cuadros amarillos ya que serían 10 por columna horizontales y verticales, para la cual me imagine otra columna que sería la verde la cual sería de 12 cuadros verdes por columna y fila, procedí a sumar columna inferior y columna superior que serían $12 \times 2 = 24$ y las filas de la izquierda y de la derecha que darían $10 \times 2 = 20$ y la suma daría 44.

d)

Para determinar los cuadros verdes de una figura, dependerá de los cuadros amarillos que tendrá por columna y fila.

Ejemplo: Para la figura 20 será la cantidad de cuadros amarillos que tendría la figura, a la cual se le colocaría otra fila y columna que sería la verde y quedaría la figura de 22 cuadros por columna y fila, se puede proceder a sumar columna superior y columna inferior, mas fila derecha, mas fila izquierda $(22 \times 2) + (20 \times 2) = 44 + 40 = 84$.

Figura 19: $CS + CI + FD + FI = 21 + 21 + 19 + 19 = 80$

Columna Superior: CS

Columna Inferior: CI

Fila Derecha: FD

Fila Izquierda: FI

Multiplicación seria:

Columna superior, por columna inferior ($21 \times 2 = 42$)

Fila derecha, por fila izquierda, ($19 \times 2 = 38$)

Se suman los resultados $42 + 38 = 80$

Respuesta del estudiante 6 (E6) al instrumento 1.

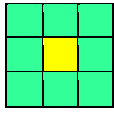


Figura 1

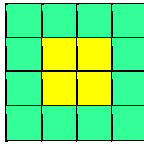


Figura 2

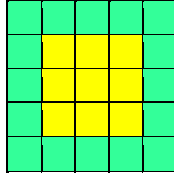


Figura 3

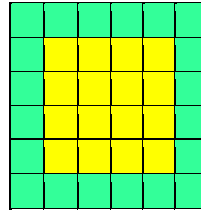


Figura 4

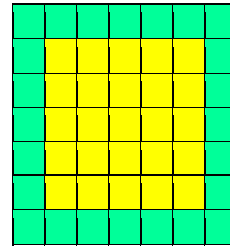


Figura 5

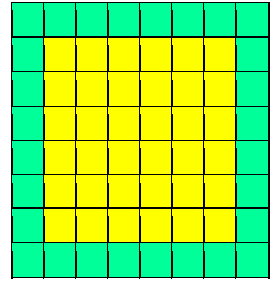


Figura 6

- a) 56 Cuadros Verdes.
- b) En el cuadro esta la figura 5 y 6.
- c) Planteando las figuras restantes hasta llegar a la figura 10 ya que iban de 4 en 4. La figura 10 tendrá 44 cuadros verdes.

Respuesta del estudiante 7 (E7) al instrumento 1.

a)

- Figura 1 = 8 cuadros verdes.
- Figura 1 = 8 cuadros verdes.
- Figura 1 = 8 cuadros verdes.
- Figura 1 = 8 cuadros verdes.

b) Figura 5 y 6.

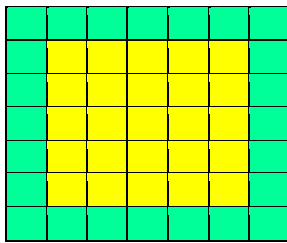


Figura 5

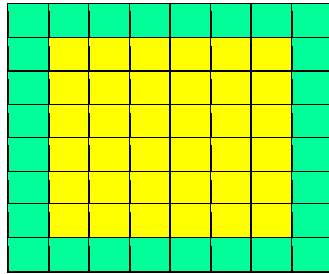


Figura 6

c)

La figura 10 tendrá un total de 44 cuadros verdes, ya que al realizar los cuadros y contarlos he notado que en cada cuadro se suman 4 cuadros verdes.

d)

La fórmula sería contar los cuadros de la figura y sumarle 4 cuadros a ella, para así obtener la cantidad de cuadros de la siguiente figura.

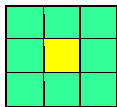


Figura 1

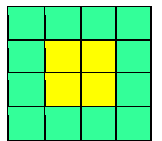


Figura 2

Si la figura 1 tiene **8** cuadros verdes \rightarrow Le sumamos **4** cuadros verdes $8 + 4 = 12$ cuadros verdes \rightarrow La figura siguiente tendría **12** cuadros verdes.

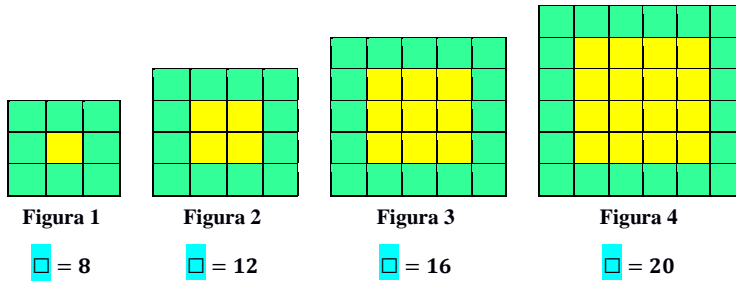
Observaciones:

- Primero observe las figuras y conté los cuadros para poder obtener el resultado para contestar cada pregunta.
- Se me ocurrió contar cada cuadro y analizar las figuras para contestar y el darme cuenta que en cada figura se le sumaba cuatro cuadros verdes, pude realizar fácilmente la actividad.

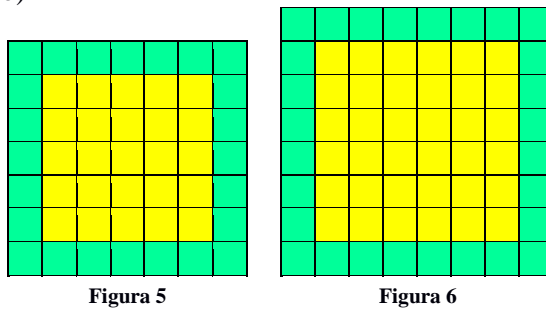
- Al principio se me dificultó, buscando forma de resolverlo, pero creo que estoy seguro de que es la forma correcta de resolverlo, ya que no encontré otra solución y ver que tan solo es sumar 4 cuadros me pareció que es la forma correcta.

Respuesta del estudiante 8 (E8) al instrumento 1.

a)



b)



c)

Figura 10.

48 Cuadros Verdes. (Deduje esta respuesta de la siguiente forma: como la figura 5 tiene 24 cuadros verdes entonces sume $24 + 24$ y *eso me dio 48 cuadros verdes*)

Respuesta del estudiante 9 (E9) al instrumento 1.

a)

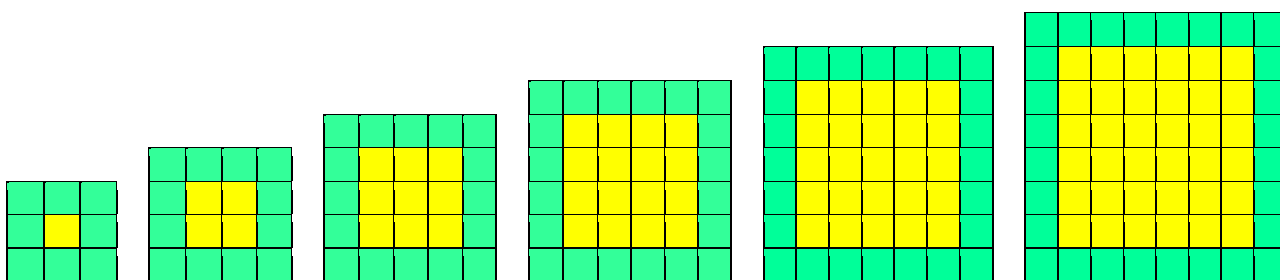
56 cuadros verdes.

b)

Figura 5 y 6.

c)

Planteando las figuras restantes, hasta llegar a la figura 10, 44 cuadros verdes.



Respuesta del estudiante 10 (E10) al instrumento 1.

Paso1.

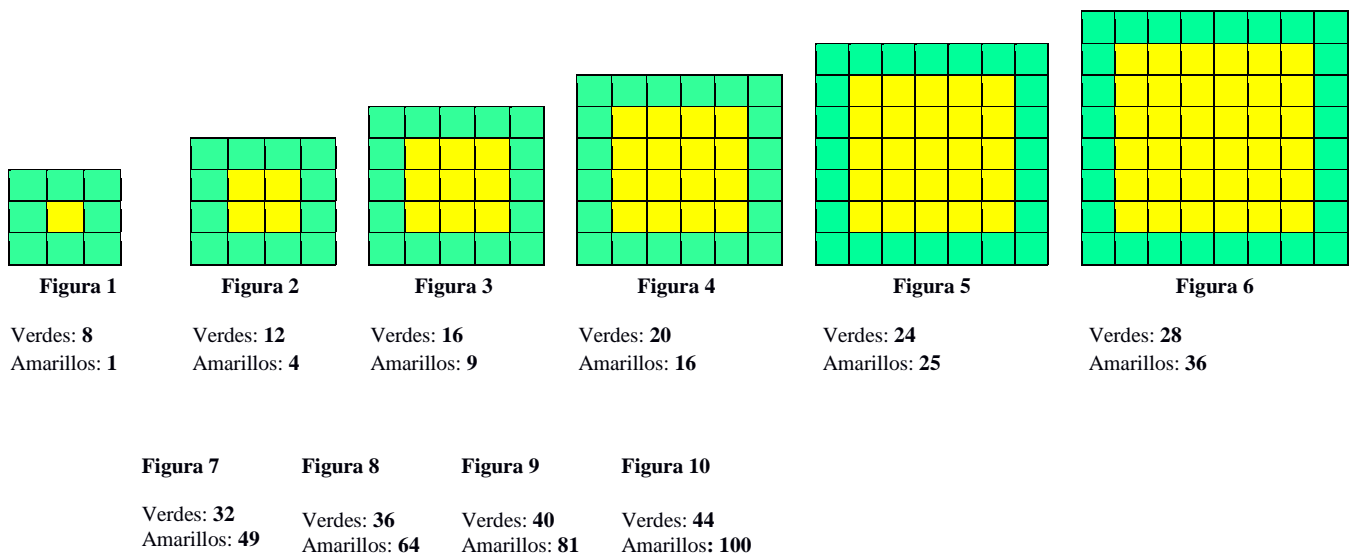
Conté los cuadros verdes y note que la sucesión va de 4 en 4 y así deduje la figura 10.

Paso2.

Me di cuenta que en los cuadros amarillos van creciendo según el número de la figura.

Paso3.

Como la sucesión va de en 4 en 4 y la cantidad de cuadros verdes, en la figura 1 es de 8, los descompose, donde (n) va a ser igual a la posición donde esté ubicada.



Formula

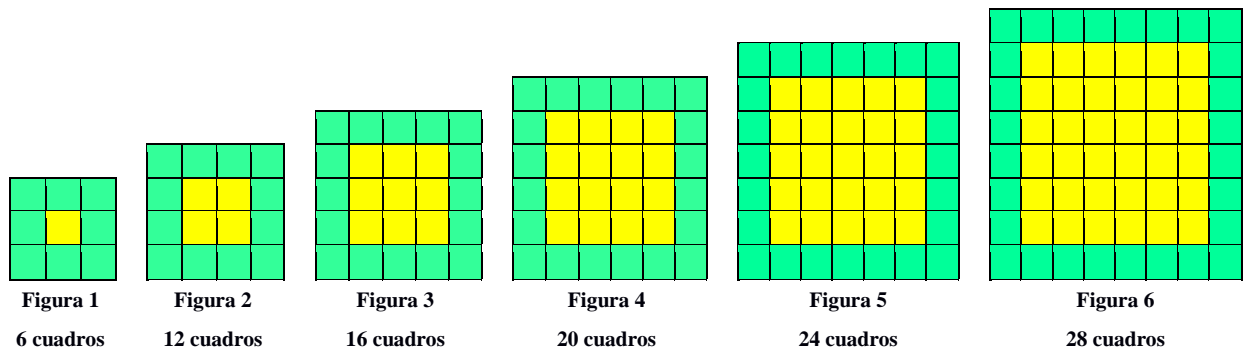
$$v = 4n + 4$$

$$v = 4.1 + 4 = 8$$

$$v = 4.2 + 4 = 12$$

$$v = 4.3 + 4 = 16$$

Respuesta del estudiante 11 (E11) al instrumento 1.



Pasos Realizados para determinar la forma n-ésima.

1. Se analizó cada una de las figuras.
2. Se determinó la constante en que se incrementó la secuencia geométrica, en múltiplos de 4.
3. Se construyó la fórmula de la siguiente manera.

Fórmula

$$x + 4 \cdot (n - 1)$$

x : Valor.

n = Nro. de figura

$$x + 4 \cdot (n - 1) = 8 + 4 \cdot (1 - 1) = 8$$

$$x + 4 \cdot (n - 1) = 8 + 4 \cdot (5 - 1) = 24$$

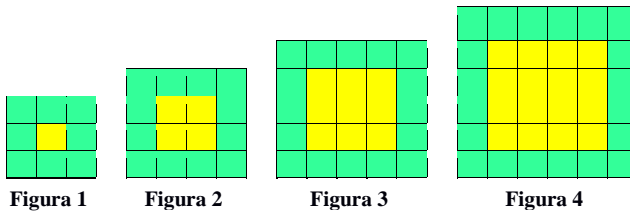
$$x + 4 \cdot (n - 1) = 8 + 4 \cdot (6 - 1) = 28$$

$$x + 4 \cdot (n - 1) = 8 + 4 \cdot (10 - 1) = 44$$

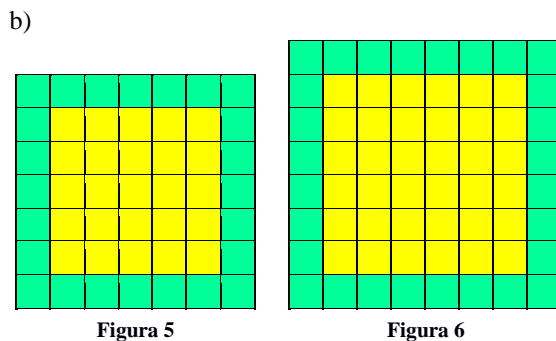
Las ideas ocurridas fueron

- Revisar los múltiplos.
- Buscar en libros el tema de probabilidades.
- Lo resolví de esta forma porque después de hacer varias consultas bibliográficas tuve dudas sobre la fórmula que debería aplicar y considero que está bien resuelto porque lo probé con diferentes cálculos.

Respuesta del estudiante 12 (E12) al instrumento 1.



a)
Figura 1 = 8; Figura 2 = 12; Figura 3 = 16; Figura 4 = 20.



c)
La figura 10 tendrá 44 cuadros verdes, esto ya que la sucesión varía de forma progresiva en cuatro unidades, si le sumas este número a los 8 de la primera obtienes la segunda y así sucesivamente hasta llegar a la figura 10.

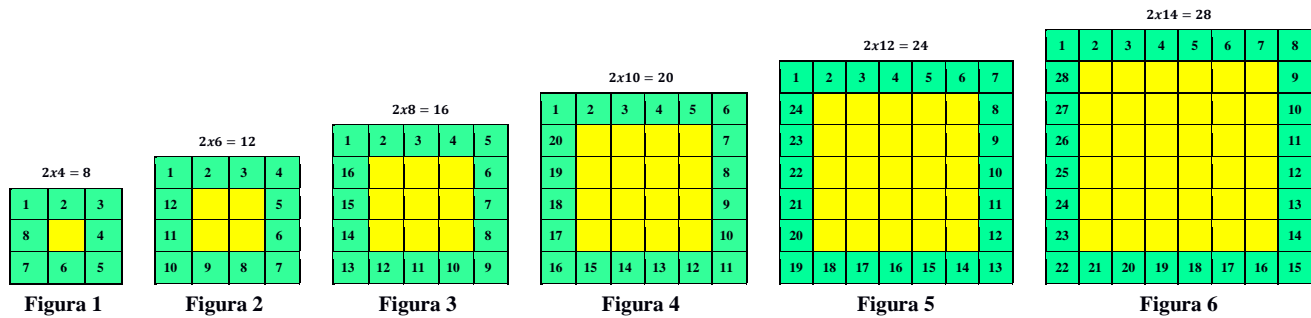
d)
 $f_n + d = f_2$
 $f_2 + d = f_3$
 $f_3 + d = f_4$

Pense en esta serie ya que permite conocer cada termino de la sucesión por separado.

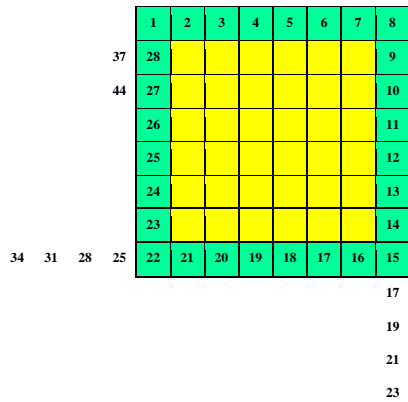
Al leer sobre sucesión aritmetica encuentre que la formula general es: $a_n = a_1 + (n - 1).d$

a_n = Termino de la sucesión
 a_1 = Primer Termino
 n = Posición del termino buscado
 d = Diferencial

Respuesta del estudiante 13 (E13) al instrumento 1.

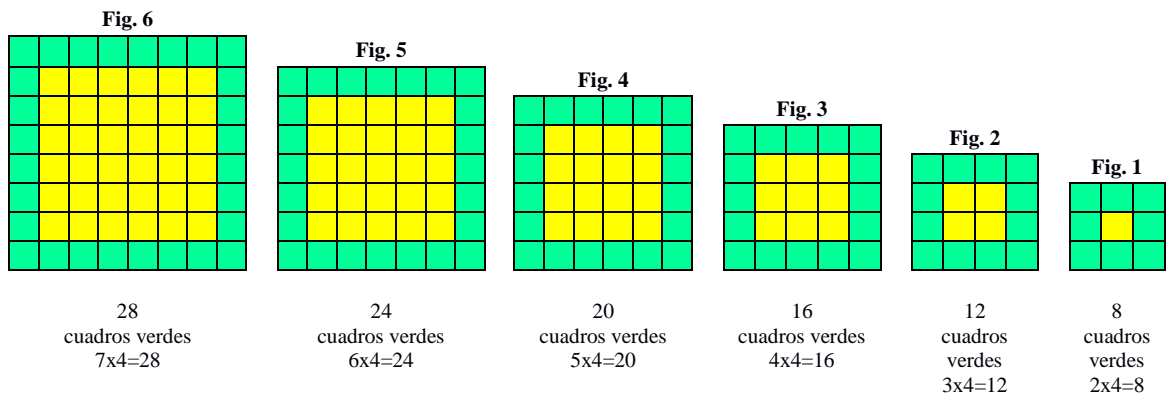


$22 \times 2 = 44$ $R = \text{Figura 10} = 44$ cuadros verdes.



Observando cada cuadro desde la figura 1 hasta la 10 se fue sumando un cuadro hasta lograr el resultado, luego multiplicamos $\times 2$ para encontrar la lógica de cada resultado, de cada cuadro verde la fórmula a utilizar fue la siguiente $n \times 2$

Respuesta del estudiante 14 (E14) al instrumento 1.



Respuestas

a)

Cuadros verdes: $F_1 = 8, F_2 = 12, F_3 = 16, F_4 = 20$.

b)

La Figura 5 tiene 24 cuadros verdes y la Figura 6 tiene 28 cuadros verdes.

c)

La *Figura 10* tendrá 44 cuadros verdes. $11 \times 4 = 44$, cada cuadro se obtiene con los múltiplos de cuatro comenzando de $2 \times 4 = 8, 3 \times 4 = 12, 4 \times 4 = 16, 5 \times 4 = 20, 6 \times 4 = 24, 7 \times 4 = 28, 8 \times 4 = 32, 9 \times 4 = 36, 10 \times 4 = 40, 11 \times 4 = 44$ para llegar a la figura 10, también sumando cuatro cuadros a cada figura después de la primera:

$$\begin{array}{ccc} 2 \times 4 = 8 & 8 + 4 = 12 & 12 + 4 = 16 \dots \\ \text{Fig. 1} & \text{Fig. 2} & \text{Fig. 3} \end{array}$$

Observaciones.

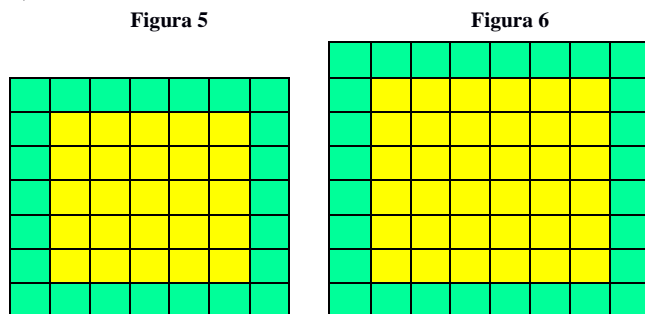
Primero conté uno a uno los cuadros verdes, después me di cuenta que si sumaba 4 cuadros a cada respuesta después de la figura 1 obtenía la siguiente figura y luego descubrí que si multiplicaba $4 \times 2 = 8, 3 \times 4 = 12, 4 \times 4 = 16$ y así también obtenía cada figura.

Respuesta del estudiante 15 (E15) al instrumento 1.

a)

Hay 56 cuadros verdes en las cuatro figuras que hay.

b)



c)

La figura 10 tendrá 44 cuadros verdes.

- Lo deduje sumándole un cuadro a la figura siguiente. Hasta llegar a la figura 10 y obtener el resultado.

d)

Mi formula sería (1 cuadro \pm figura 3 o mayor a 3).

Nota: Para construir cualquier figura, sumar un cuadro a la figura si es de 3 o más de 3 cuadros.

Idea uno para la primera pregunta.

Conté los cuadros uno por uno y me paso por la cabeza anotar la cantidad de cada cuadro pero dije que no, cuando tuve la cantidad y la fui a escribir se me olvidó, tuve que contar de nuevo, pero cuando llegue a la figura 3, anote la cantidad que tenía, después conté la figura restante y lo sume todo y obtuve el resultado.

Idea dos para la segunda pregunta.

Para responderla me costó mucho, porque no supe cómo. Primero me pregunte como contestarla sino hay figura 5 y 6. Luego dije que no se podía responder, porque no estaban las figuras, pero luego pensé en sumar la figura 2 con la 3 para hacer la 5 y la figura 6, sumando dos veces la 3. No lo hice así porque vi varias veces la pregunta y me dije voy a tomármelo literario y lo dibujaré para resolver el dilema de donde voy a sacar la figura 5 y 6, me fije que la diferencia es de un cuadro, le sume un cuadro a la figura 4y de ahí conseguí la figura 5, para la figura 6 volví a repetir el procedimiento con la 5, le sume un cuadro y saque la figura 6.

Idea tres para la tercera pregunta.

La respondí con el anterior procedimiento que era sumar un cuadro hasta llegar a la figura 10. Otro procedimiento puede ser sumando dos veces la cuatro. Porque; si lo sumas da la cantidad de cuadros que tiene cada lado que son 12, esta idea me surgió pensando si la mitad de 12 es 6, la figura 4 tiene la cantidad de 6 y me dije ¿Es cierto? Estas son mis dos opciones para sacar el cálculo de la figura 10.

Idea cuatro para la cuarta pregunta.

La fórmula la saque de los resultados logrados por resolver las dos preguntas anteriores a la cuarta pregunta.

¿Por qué?

Si hacemos las anteriores conseguirás que dice que si sumamos un cuadro a una figura nos dará el resultado de la figura siguiente. Esto se da por ver una figura y cuanto es la cantidad de cuadros verdes que hay en la figura la diferencia es de uno al igual si restas un cuadro tendrás la figura anterior.

Estas son mis ideas, que surgieron cuando resolví cada pregunta que se hicieron. Me gustó mucho contestarlas porque me puso a pensar diferentes soluciones y que fue dinámica.

ANEXO C

Aplicación del Instrumento: Lista de cotejo 1 con las respuestas de los ítem.

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 1 a los estudiantes del E1 hasta el E8.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.	X			X		X		X		X		X	X			X
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.	X		X		X		X		X		X		X		X	
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.	X		X			X		X		X		X	X			X
	La tesis presentada es válida.	X		X		X		X		X		X		X		X	
GARANTE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.	X		X			X		X		X		X	X			X
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.	X			X		X		X		X		X	X			X
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.	X		X			X		X		X		X	X			X
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.	X		X			X		X		X		X	X			X
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.	X			X		X		X		X		X	X			X
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.	X			X		X		X		X		X		X		X
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.	X			X		X		X		X		X	X			X
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.		X		X		X		X		X		X		X		X
	El cualificador modal presentado es válido.		X		X		X		X		X		X		X		X
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.		X		X	X			X		X		X		X		X

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 1 a los estudiantes del E9 hasta el E15.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.		X	X		X			X	X		X			X
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.	X		X		X		X		X		X		X	
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.		X	X		X			X	X		X			X
	La tesis presentada es válida.		X	X		X		X		X		X			X
GARANTE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.		X	X		X			X	X		X			X
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.		X	X		X			X	X		X			X
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.		X	X		X			X	X		X			X
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.			X		X			X	X		X			X
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.		X	X			X		X	X		X			X
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.		X	X			X		X	X		X			X
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.		X	X			X		X	X		X			X
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.		X		X		X		X		X		X		X
	El cualificador modal presentado es válido.		X		X		X		X		X		X		X
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.		X		X		X		X		X		X		X

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 2 a los estudiantes del E1 hasta el E8.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.	X			X	X			X		X		X		X		X
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.	X		X		X		X		X		X		X		X	
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X		X		X		X			X	X		X		X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.	X		X		X		X		X			X		X		X
	La tesis presentada es válida.	X		X		X		X		X		X		X		X	
GARANTE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.	X		X			X		X		X		X		X		X
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.	X			X		X		X		X		X		X		X
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.	X			X		X		X		X		X		X		X
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.	X			X		X		X		X		X		X		X
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.	X			X		X		X		X		X		X		X
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.	X			X		X		X		X		X		X		X
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.	X			X		X		X		X		X		X		X
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.		X		X		X		X		X		X		X		X
	El cualificador modal presentado es válido.		X		X		X		X		X		X		X		X
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.		X		X		X		X		X		X		X		X
	El Estudiante hace alguna excepción a su afirmación.																

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 2 a los estudiantes del E9 hasta el E15.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.		X	X		X			X	X		X			X
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.	X		X		X		X		X		X		X	
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.		X	X		X			X	X		X			X
	La tesis presentada es válida.	X		X		X		X		X		X		X	
GARANTE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.		X		X		X		X	X		X			X
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.		X		X		X		X	X		X			X
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.		X		X		X		X	X		X			X
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.														
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.		X		X		X		X	X		X			X
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.		X		X		X		X	X		X			X
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.									X		X			
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.		X		X		X		X		X		X		X
	El cualificador modal presentado es válido.		X		X		X		X		X		X		X
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.		X		X		X		X		X		X		X
	El Estudiante hace alguna excepción a su afirmación.														

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 3 a los estudiantes del E1 hasta el E8.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.	X		X		X		X		X		X		X		X	
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	La tesis presentada es válida.	X		X		X		X		X		X		X		X	
GARANTEE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.	X		X		X		X		X		X		X		X	
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.	X		X		X		X		X		X		X		X	
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El cualificador modal presentado es válido.	X		X		X		X		X		X		X		X	
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El Estudiante hace alguna excepción a su afirmación.																

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 3 a los estudiantes del E9 hasta el E15.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.		X	X		X		X		X		X			X
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.	X		X		X		X		X		X		X	
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.		X	X		X		X		X		X		X	
	La tesis presentada es válida.	X		X		X		X		X		X		X	
GARANTE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.		X	X		X		X		X		X		X	
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.		X	X		X		X		X		X			X
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.		X	X		X		X		X		X			X
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.		X	X		X		X		X		X			X
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.		X	X		X		X		X		X			X
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.		X	X		X		X		X		X			X
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.		X	X		X		X		X		X			X
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.		X		X		X	X			X		X		X
	El cualificador modal presentado es válido.		X		X			X			X		X		X
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.		X		X			X		X		X			X
	El Estudiante hace alguna excepción a su afirmación.														

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 4 a los estudiantes del E1 hasta el E8.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.	X		X		X		X		X		X		X			X
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.	X			X	X		X		X		X		X			X
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.	X		X		X			X	X		X		X		-	X
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.	X		X			X	X		X		X		X			X
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.	X		X			X	X		X		X		X			X
	La tesis presentada es válida.	X		X			X		X	X		X		X		-	X
GARANTE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.	X		X			X	X		X		X		X			X
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.	X		X			X	X		X		X		X			X
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.	X		X			X	X		X		X		X			X
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.	X		X			X		X	X		X		X		-	X
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.	X			X		X	X		X		X		X			X
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.	X			X		X	X		X		X		X			X
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.	X			X		X		X		X	X		X		-	X
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.	X			X		X	X			X		X	X			X
	El cualificador modal presentado es válido.	X			X		X	X			X		X	X			X
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.		X		X	X			X		X		X		X		X
	El Estudiante hace alguna excepción a su afirmación.																

Aplicación del Instrumento (Lista de cotejo 1): Ítem 4 a los estudiantes del E9 hasta el E15.

ELEMENTOS	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
DATOS “Hechos o premisas a los que se alude como base para la conclusión, también llamada evidencia”	El estudiante extrae información de la actividad propuesta, evidencia que le permite emitir una conclusión o respuesta.		X	X		X		X		X			X	X	
	El estudiante construye y plantea datos con la información del problema para dar una respuesta.		X	X		X		X			X		X		X
	Las evidencias utilizadas (y/o) presentadas son válidas.		X	X		X		X		X			X		X
CONCLUSIÓN O TESIS “Afirmación o enunciado cuya validez se quiere establecer”	El estudiante plantea una tesis o da una conclusión y toma postura para defender lo que aspira que sea aceptado.		X	X		X		X		X			X	X	
	El estudiante formula y expone afirmación(es) o proposición(es) para tratar de convencer y que otro acepte.		X	X		X		X			X		X		X
	La tesis presentada es válida.		X	X		X		X		X		-	X		X
GARANTEE “Enunciado general que justifica la conexión entre datos y conclusiones, es decir, permite pasar de los datos a la conclusión”	El estudiante hace referencia a una regla, norma o principio general. Es decir, el estudiante se vale de definiciones, propiedades, teoremas, fundamentos matemáticos.		X	X		X		X		X			X	X	
	El estudiante demuestra o verifica coherencia entre la tesis y los datos, explicando y justificando la importancia de los mismos. Es decir, brinda una lógica transición entre los datos y la conclusión.		X	X		X		X			X		X		X
	La afirmación verifica lo que asevera el estudiante y justifican los datos. Es decir, la conclusión se basa y se deriva de los datos.		X	X		X		X			X		X		X
	La garantía presentada es válida para el enunciado dado.		X	X		X		X			X		X		X
RESPALDO “Sustenta la justificación, es decir, lo que da validez al garante”	El estudiante presenta algún respaldo a la justificación (garantía) dada.		X	X		X		X			X		X		X
	El estudiante aporta más ejemplos, hechos y datos que explican y ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende.		X	X		X		X			X		X		X
	El respaldo presentado es válido para fundamentar la garantía.		X	X		X		X			X		X		X
CUALIFICADOR MODAL “Revelan la fuerza de la tesis”	El estudiante hace uso de algunos de los siguientes modificadores modales: seguramente, usualmente, algunos, pocos, algunas veces, la mayoría, probablemente. Si, así, también, entonces, luego, después, ahora, mas, en consecuencia, por tanto.		X		X		X		X	X			X	X	
	El cualificador modal presentado es válido.		X		X		X			X			X	X	
REFUTACIONES “Especifica condiciones para descartar la hipótesis o conclusión, es decir, aquello en lo que la conclusión fallaría”	De la afirmación dada por el estudiante se pueden formular contraejemplos que se opongan y refuten sus procesos.		X		X		X				X		X		X
	El Estudiante hace alguna excepción a su afirmación.														

ANEXO D.

Aplicación del Instrumento Lista de Cotejo 2 por Ítem.

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 2): Ítem 1 a los estudiantes E1-E7-E10-E13-E14.

CATEGORIA	CRITERIOS	E1		E7		E10		E13		E14	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
EMPIRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos o casos concretos de la actividad propuesta, pero que no representan nada.		X	X			X	X			X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos específicos que no representa una clase general, sino particular.		X		X		X		X		X
	El argumento que presenta el estudiante es un dibujo particular como justificación.		X		X		X	X			X
GENERICA (prueba intuitiva)	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos de un caso representativo a una clase más grande, que luego se puede llevar y expresar de forma general.	X			X	X			X	X	
	El argumento empleado por el estudiante se basa en pruebas y justificaciones visuales basadas en figuras, imágenes, dibujos con respecto a una clase.		X		X		X		X		X
SIMBOLICO	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de palabras y letras como representaciones.		X		X		X		X		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de símbolos como representaciones.		X		X		X		X		X
FORMAL	El estudiante emplea argumentos con la sintaxis matemática.		X		X		X		X		X
	El estudiante emplea argumentos en un contexto matemático, por lo que la estructura y rigurosidad es la de una prueba o demostración matemática.		X		X		X		X		X

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 2): Ítem 2 a los estudiantes E1-E3-E14.

CATEGORIA	CRITERIOS	E1		E13		E14	
		Si	No	Si	No	Si	No
EMPIRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos o casos concretos de la actividad propuesta, pero que no representan nada.		X	X		X	
	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos específicos que no representa una clase general, sino particular.		X		X		X
	El argumento que presenta el estudiante es un dibujo particular como justificación.		X	X		X	
GENERICA (prueba intuitiva)	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos de un caso representativo a una clase más grande, que luego se puede llevar y expresar de forma general.	X			X		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en pruebas y justificaciones visuales basadas en figuras, imágenes, dibujos con respecto a una clase.		X		X		X
SIMBOLICO	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de palabras y letras como representaciones.		X		X		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de símbolos como representaciones.		X		X		X
FORMAL	El estudiante emplea argumentos con la sintaxis matemática.		X		X		X
	El estudiante emplea argumentos en un contexto matemático, por lo que la estructura y rigurosidad es la de una prueba o demostración matemática.		X		X		X

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 2): Ítem 3 a los estudiantes E1-E4-E5-E10-E11-E13-E14-E15.

CATEGORIA	CRITERIOS	E1		E4		E5		E10		E11		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
EMPIRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos o casos concretos de la actividad propuesta, pero que no representan nada.		X		X	X			X		X	X			X		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos específicos que no representa una clase general, sino particular.		X		X		X		X		X		X		X	X	
	El argumento que presenta el estudiante es un dibujo particular como justificación.		X		X		X		X		X	X			X		X
GENERICA (prueba intuitiva)	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos de un caso representativo a una clase más grande, que luego se puede llevar y expresar de forma general.		X	X			X	X			X		X	X			X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en pruebas y justificaciones visuales basadas en figuras, imágenes, dibujos con respecto a una clase.		X		X		X		X		X		X		X		X
SIMBOLICO	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de palabras y letras como representaciones.	X			X		X		X	X			X		X		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de símbolos como representaciones.		X		X		X		X		X		X		X		X
FORMAL	El estudiante emplea argumentos con la sintaxis matemática.		X		X		X		X		X		X		X		X
	El estudiante emplea argumentos en un contexto matemático, por lo que la estructura y rigurosidad es la de una prueba o demostración matemática.		X		X		X		X		X		X		X		X

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 2): Ítem 4 a los estudiantes E1-E4-E5-E7-E10-E11-E12.

CATEGORIA	CRITERIOS	E1		E4		E5		E7		E10		E11		E12	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
EMPIRICA	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos o casos concretos de la actividad propuesta, pero que no representan nada.		X	X			X	X			X		X		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos específicos que no representa una clase general, sino particular.		X	X			X	X			X		X		X
	El argumento que presenta el estudiante es un dibujo particular como justificación.		X		X		X		X		X		X		X
GENERICA (prueba intuitiva)	El argumento empleado por el estudiante se basa en ejemplos de un caso representativo a una clase más grande, que luego se puede llevar y expresar de forma general.		X		X	X			X		X		X		X
	El argumento empleado por el estudiante se basa en pruebas y justificaciones visuales basadas en figuras, imágenes, dibujos con respecto a una clase.		X		X		X		X		X		X		X
SIMBOLICO	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de palabras y letras como representaciones.	X			X		X		X	X		X		X	
	El argumento empleado por el estudiante se basa en el uso de símbolos como representaciones.		X		X		X		X		X		X		X
FORMAL	El estudiante emplea argumentos con la sintaxis matemática.		X		X		X		X		X		X		X
	El estudiante emplea argumentos en un contexto matemático, por lo que la estructura y rigurosidad es la de una prueba o demostración matemática.		X		X		X		X		X		X		X

ANEXO E

Aplicación del Instrumento: Lista de Cotejo 3 por Ítem.

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 1 de la respuesta dada por los estudiantes del 1 hasta el 8.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.		X		X		X		X		X		X		X		X
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante da conclusiones.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.	X			X	X		X				X		X			
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establecer cierta relación, causal o no, entre datos y conclusión.	X		X		X		X				X		X		X	
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.	X		X			X	X		X			X	X		X	
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.		X		X		X		X	X			X		X		X
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.	X		X			X		X	X			X	X			X
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.	X		X			X		X	X			X	X			X
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.	X			X		X		X	X			X		X		X
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.	X			X		X		X		X		X		X		X
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.	X			X		X		X		X		X		X		X
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.	X			X		X		X		X		X		X		X
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.	X			X		X		X		X		X		X		X
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).		X		X		X		X		X		X		X		X
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.		X		X		X		X		X		X		X		X
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.		X		X		X		X		X		X		X		X

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 1 de la respuesta dada por los estudiantes del 9 hasta el 15.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.	X		X											
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.														
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.														
	El estudiante da conclusiones.			X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.														
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema			X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establece cierta relación, causal o no , entre datos y conclusión.					X		X		X		X		X	
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión .			X		X				X		X			
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.														
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.			X		X				X		X			
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.			X		X				X		X			
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.														
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.			X											
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico .”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.														
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.			X											
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.			X											
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).														
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.														
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.														

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 2 de la respuesta dada por los estudiantes del 1 hasta el 8.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.																
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.																
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.																
	El estudiante da conclusiones.	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.																
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema	X		X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establecer cierta relación, causal o no, entre datos y conclusión.	X		X													
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.	X										X		X		X	
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.																
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.	X															
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.	X															
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.																
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.																
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.																
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.																
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.																
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).																
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.																
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.																

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 2 de la respuesta dada por los estudiantes del 9 hasta el 15.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.														
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.														
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.					X		X		X		X		X	
	El estudiante da conclusiones.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.														
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establecer cierta relación, causal o no , entre datos y conclusión.														
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.	X		X											
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.														
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.														
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.														
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.														
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.														
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.														
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de calificadores o respaldo teórico. ”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.														
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.														
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).														
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.														
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.														

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 3 de la respuesta dada por los estudiantes del 1 hasta el 8.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.															X	
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.					X											
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.											X		X			
	El estudiante da conclusiones.	X		X				X		X		X		X		X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.																
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema	X		X				X		X		X		X			
	El estudiante establecer cierta relación, causal o no , entre datos y conclusión.	X						X									
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.	X						X				X		X			
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.																
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.	X						X				X		X			
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.	X						X				X		X			
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.																
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.	X															
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico. ”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.																
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.	X															
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.	X															
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).																
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.																
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.																

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 3 de la respuesta dada por los estudiantes del 9 hasta el 15.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.			X											
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.														
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.	X		X											
	El estudiante da conclusiones.	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.														
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema	X		X		X		X		X		X		X	
	El estudiante establecer cierta relación, causal o no, entre datos y conclusión.			X		X		X				X			
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.			X		X		X				X			
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.														
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.			X		X		X		X		X		X	
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.			X		X		X		X		X			X
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.														
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.														
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.														
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico.”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.			X		X						X			
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.			X		X						X			
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).														
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.														
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.														

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 4 de la respuesta dada por los estudiantes del 1 hasta el 8.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E1		E2		E3		E4		E5		E6		E7		E8	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.					X							X				X
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.												X				X
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.												X				X
	El estudiante da conclusiones.	X		X				X		X			X	X			X
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.												X				X
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema	X		X				X		X			X	X			X
	El estudiante establecer cierta relación, causal o no, entre datos y conclusión.	X		X						X			X	X			X
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.	X						X		X			X				X
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.												X				X
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.	X											X				X
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.	X						X		X			X	X			X
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.												X				X
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.	X											X				X
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de cualificadores o respaldo teórico.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.												X				X
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.	X						X		X			X				X
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.	X						X		X			X	X			X
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).												X				X
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.												X				X
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.																

Aplicación del Instrumento (Lista de Cotejo 3): Ítem 4 de la respuesta dada por los estudiantes del 9 hasta el 15.

NIVEL DE ARGUMENTACIÓN	CRITERIOS	E9		E10		E11		E12		E13		E14		E15	
		Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
NIVEL 1 “Comprende los argumentos que son una descripción simple de la vivencia”	El estudiante describe los datos presentes y observados en la actividad.		X	X											
	El estudiante emplea términos como: observé, percibí, noté, capté, discerní, vi. Para explicar y describir datos de la actividad.		X												
NIVEL 2 “Comprende argumentos en los que se identifican con claridad los datos y una conclusión”	El estudiante identifica los datos.		X												
	El estudiante da conclusiones.		X	X		X		X		X				X	
	El estudiante establece diferencias entre un dato y una conclusión.		X												
	El estudiante responde y da una conclusión a través de la información encontrada en el problema		X	X		X		X		X				X	
	El estudiante establecer cierta relación, causal o no , entre datos y conclusión.		X	X		X		X							
	El estudiante establece cierto orden al proceso de pensamiento empleado para llegar a una conclusión.		X	X		X		X							
NIVEL 3 “Comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación.”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones y las justificaciones.		X												
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema y explica justificando su respuesta con algún fundamento matemático.		X	X		X		X		X					
	El estudiante emplea alguna ley, regla, definición o propiedad al hacer sus justificaciones.		X	X		X		X						X	
	El estudiante establece relaciones causales abstractas que explican la actividad.		X												
	El estudiante explica con formalidad y pertinencia sus justificaciones al emplear terminología matemática.		X	X		X		X							
	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las garantías y los respaldos.		X												
NIVEL 4 “comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones y justificaciones, con el empleo de calificadores o respaldo teórico. ”	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, explicando y justificando con un respaldo la garantía a su respuesta.		X	X				X							
	El estudiante aporta otros ejemplos, hechos y datos aplicables a un caso particular o general que explican y dando validez al garante.		X	X											
	El estudiante responde a través de la información encontrada en el problema, emitiendo datos, conclusión(es) y contraargumento(s).		X												
NIVEL 5 “Se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s).”	El estudiante establece diferencia entre los datos, de las conclusiones, las justificaciones, respaldos y contraargumentos.		X												
	El estudiante conoce cuales son las posibles posturas contrarias a su posición y hace alguna excepción a su afirmación.														