

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE MARACAY
“RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**APROXIMACIÓN TEÓRICA A UNA DIDÁCTICA ORIENTADA A IDENTIFICAR EL
CONOCIMIENTO UNITARIO Y PRAGMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA
DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN**

Tesis presentada como requisito para parcial optar al Grado de
Doctor en Educación Matemática.

.

Autor: Jorge Fajardo
Tutor: Ángel Carruido

Maracay, julio de 2024

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor de la Tesis, presentado por el ciudadano: Jorge de Jesús Fajardo Molinares, CC N° 8.641.198, para optar al grado de Doctor en Educación Matemática, considero que dicha Tesis reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En la Ciudad de Maracay a los 20 días del mes de julio del 2024

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Ángel Carruido', written over a horizontal line.

Dr. Ángel Carruido

C.I.: 4.228.767

DEDICATORIA

Principalmente a Dios, por ser mi guía y por cada una de las bendiciones que a diario me regala.

A mi madre Carmen Molinares, porque a pesar de todas las circunstancias sigue siendo una guerrera y una inspiración a seguir luchando por la vida.

A mi padre Jorge Fajardo, que a pesar de su enfermedad sigues ahí y sé de todo el apoyo que algún día me brindaste para seguir escalando en mi vida.

A mi esposa Rosa, por su paciencia durante todo este proceso, su apoyo, acompañamiento y por su gran amor.

A mi hermosa hija Mariángel, por ser el motor que mueve mi vida.

Jorge de Jesús Fajardo Molinares

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi agradecimiento a todos mis profesores, por tan valiosas enseñanzas y especialmente a mi tutor, Dr. Ángel E. Carruido C., por toda la paciencia y dedicación. Realmente sin el apoyo incondicional que me brindó, esta investigación no se habría podido desarrollar.

También quiero extender mis agradecimientos a todas aquellas personas que de una u otra forma aportaron un granito de arena para llevar a feliz término mi Tesis Doctoral.

Jorge de Jesús Fajardo Molinares

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS	x
LISTA DE GRÁFICOS	xi
RESUMEN.....	xii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I	3
CONTEXTO EMPÍRICO	3
Caracterización del objeto de investigación.....	3
Objetivos de la investigación	11
Justificación	12
CAPÍTULO II	15
CONTEXTO TEÓRICO	16
Antecedentes de la investigación.....	16
Antecedentes Nacionales.....	16
Antecedentes Internacionales	20
Fundamentación Teórica.....	27
Teoría Antropológica de Didáctica (TAD) de la Matemática.....	27
La Noción de Organización Praxeológica.....	28
Objetos Ostensivos y Objetos No Ostensivos	29
La Valencia Semiótica	31
La Problemática Didáctica	31
Teoría de las Situaciones Didácticas	32
Situación didáctica, situación adidáctica, situación fundamental	33
La comunicación didáctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	33
La adaptación de las situaciones a los alumnos: la optimización	35
La adaptación de los alumnos a las situaciones: los saltos y los obstáculos	35
Idoneidad Didáctica	37
Importancia del estudio de los obstáculos epistemológicos en la Didáctica de las Matemáticas	38
Referentes Teóricos.....	39

La educación matemática	39
¿Qué significa investigar en Educación Matemática?.....	42
Importancia de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática a nivel universitario	43
La asignatura de Cálculo.....	45
Didáctica en la enseñanza de la matemática.....	48
Importancia de la enseñanza del contenido del límite de una función en educación universitaria, en la formación de profesionales.	50
El obstáculo tanto en la ciencia como en la enseñanza de la matemática.	52
Conocimiento Unitario y Pragmático	55
Fundamentación histórica del concepto de Límite.....	56
Aspectos Cognitivos del Concepto de Límite	67
Aspectos instruccionales del Concepto de Límite	68
El Concepto de Límite de una Función Real de Variable Real.....	70
Sobre el concepto de Función	71
Función Real	71
Gráfica de una función	72
Límite de una función	72
Teoremas relacionados con el límite de una función	73
Límites laterales	74
Teorema de los límites laterales	74
Límites Infinitos	75
Continuidad de una función en un número	78
CAPÍTULO III	79
CONTEXTO METODOLÓGICO.....	79
La Naturaleza de la Investigación.....	79
Paradigma.....	80
Método	81
Tipo de investigación	82
Escenario e Informantes Clave	84
La selección de informantes	85

Técnicas e instrumentos de recolección de la información	86
La entrevista.....	87
Procedimiento	89
Análisis e interpretación de la información.....	90
Categorización	91
Triangulación	93
Fases de la investigación.....	94
Recorrido ontoepistémico de la investigación.....	96
CAPÍTULO IV	99
CONTEXTO CRÍTICO	99
Describiendo las categorías y subcategorías	101
CIERRE CATEGORIAL	116
<i>Cierre categorial. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real, desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes.....</i>	<i>116</i>
<i>Cierre categorial. Importancia de la definición de límite de una función, desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes</i>	<i>116</i>
<i>Cierre categorial. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático.</i>	<i>117</i>
<i>, desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes</i>	<i>117</i>
<i>Cierre categorial. Conformación de una estructura didáctica para identificar el conocimiento unitario y Pragmático, desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes</i>	<i>118</i>
HALLAZGOS	119
CAPÍTULO V	121
CONTEXTO GENERATIVO	121
Resultados Organizados según cada uno de los objetivos planteados, de acuerdo a las interrogantes de la investigación	122
.....	123
.....	123
.....	123
Objetivo específico No.1: Caracterizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de	

pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas.....	124
Desarrollo de los objetivos	124
Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real	125
Concepciones teóricas y epistemológicas.	125
Identificación de Obstáculos o errores a nivel epistemológico presentes en el desarrollo del concepto de limite	126
Objetivo específico No.2: Describir cada una de las concepciones que giran en torno a la definición de límite junto a los errores que comúnmente están asociados al proceso de su enseñanza, con la finalidad de establecer sus puntos de encuentro y sus diferencias.....	128
Importancia de la definición de límite de una función	129
Conceptualización del límite de una función real de variable real	129
Concepto muy difícil de aprender.....	130
Objetivo específico No.3: Interpretar los efectos del obstáculo epistemológico “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición del Límite de una función, en su aprendizaje por parte de alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial de la institución universitaria de Barranquilla, a fin de que sea superado.....	132
Proceso de enseñanza en la definición de límite de una función real	133
Adopción de una sola postura sobre estrategias de enseñanza.....	133
Utilidad del Conocimiento y Pragmatismo	134
Objetivo específico No.4: Derivar los elementos que conformarán una estructura didáctica a fin de identificar el “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición de límite de una función en la Institución Universitaria de Barranquilla.	136
PRESENTACIÓN DE LA ESTRUCTURA DIDÁCTICA.....	138
Sobre el aprendizaje de la noción de Limite de una función	141
Fundamentación de los constructos que conforman la estructura	142
DESCRIPCIÓN DE LAS FASES QUE CONFORMAN LA ESTRUCTURA DIDACTICA	144
FASE 1. Indagación de contexto y diagnóstico pedagógico.....	144
FASE 2. Determinación de los fines u objetivos	146

FASE 3. Selección de los contenidos desde un enfoque interdisciplinario y transdisciplinario.	147
FASE 4. Determinación de estrategias y recursos para los aprendizajes.	149
FASE 5. Ejecución, Evaluación y Sistematización de los aprendizajes.	150
REFLEXIONES FINALES.....	152
Referencias	155

LISTA DE CUADROS

CUADRO	pp
Cuadro 1: Criterios de selección de los informantes clave.....	86
<i>Cuadro 2: Cronograma de actividades.....</i>	90
Cuadro 3: Dimensiones establecidas para orientar el proceso de categorización y subcategorización de la información recolectada en las entrevistas.....	92
Cuadro 4: Categorías y subcategorías que emergen de las dimensiones.....	101
Cuadro 5: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves docentes.....	102
Cuadro 6: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves docentes.....	103
Cuadro 7: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes clave docentes.....	104
Cuadro 8: Validez interna. Triangulación de fuentes Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes claves docentes.....	105
Cuadro 9: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático. Informantes clave docentes.....	106
Cuadro 10: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático. Informantes claves docentes.....	108
Cuadro 11: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves estudiantes.....	109
Cuadro 12: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves estudiantes.....	110
Cuadro 13: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes claves estudiantes.....	110
Cuadro 14: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes claves estudiantes.....	111
Cuadro 15: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario y pragmático. Informantes clave estudiantes.....	112
Cuadro 16: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario y pragmático. Informantes clave estudiantes.....	113
Cuadro 17: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 4. Conformación de una estructura didáctica. Informantes clave docentes.....	114
Cuadro 18: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 4. Conformación de una estructura didáctica. Informantes clave estudiantes.....	114

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO

pp

Gráfico 1: Dominio y rango de la función $y=f(x)$	72
Gráfico 2: Representación de la función $h(x)$	75
Gráfico 3: Matriz epistémica de la investigación.	97
Gráfico 4: Red Semántica obtenida a través de la técnica de entrevista de los informantes claves. Programa Atlas. Ti. Elaboración Propia.	101
Gráfico 5: Esquema Introductorio de acuerdo a los Objetivos 1, 2, 3 y 4 de los soportes que permitieron el establecimiento de las fases del modelo didáctico. NOTA: Elaboración propia.	123
Gráfico 6: Desarrollo del objetivo No.1. Características de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas, desde la perspectiva de los docentes. NOTA: Elaboración propia.	124
Gráfico 7: Desarrollo del objetivo No.1. Características de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas, desde la perspectiva de los estudiantes. NOTA: Elaboración propia.	125
Gráfico 8: Desarrollo del objetivo No.2. Concepto de Límite de una función de variable real según las concepciones desde la perspectiva docente NOTA: Elaboración propia.	128
Gráfico 9: Desarrollo del objetivo No.2. Concepto de Límite de una función de variable real según las concepciones desde la perspectiva de los estudiantes. NOTA: Elaboración propia.	129
Gráfico 10: Desarrollo del objetivo No.3. Interpretación de los efectos del obstáculo epistemológico “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición del Límite de una función, en su aprendizaje por parte de alumnos de pregrado en el módulo de cálculo diferencial de la Institución Universitaria de Barranquilla, a fin de que sea superado, según las concepciones desde la perspectiva docente y de estudiantes. NOTA: Elaboración propia.	132
Gráfico 11: Elementos de una estructura didáctica para identificar el obstáculo epistemológico "conocimiento unitario y pragmático" durante la enseñanza del límite de una función real de variable real. Nota: Elaboración propia.	143

APROXIMACIÓN TEÓRICA A UNA DIDÁCTICA ORIENTADA A IDENTIFICAR EL CONOCIMIENTO UNITARIO Y PRAGMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA DEFINICIÓN DEL LÍMITE

Autor: Jorge Fajardo
Tutor: Ángel Carruido
Fecha: julio 2024

RESUMEN

La presente investigación tuvo como propósito generar aportes teóricos que permitieran conformar una estructura didáctica para la identificación del Obstáculo epistemológico *Conocimiento Unitario y Pragmático* que se presenta durante la enseñanza del concepto de límite de una función de variable real en un punto, a fin de que sea superado durante el aprendizaje por parte de estudiantes universitarios. Para el abordaje teórico se asumió la Teoría Antropológica de Didáctica de la Matemática, la Teoría de las Situaciones Didácticas y el conocimiento sobre Obstáculos Epistemológicos, con el propósito de develar dificultades y errores presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una función. Metodológicamente, se abordó la investigación desde el paradigma interpretativo fenomenológico, bajo el método hermenéutico dialéctico, aspectos que corresponden con el enfoque cualitativo. El escenario lo constituyó la Institución Universitaria UniBarranquilla en Barranquilla, Colombia. Los informantes clave del estudio lo conformaron cuatro (4) profesores de matemática adscritos a la facultad de ciencias básicas de la universidad con amplia experiencia en el área de cálculo y cuatro (4) estudiantes del programa de Técnico en mantenimiento electromecánico y electrónico industrial correspondiente al segundo cuatrimestre del respectivo período académico 2023. La recolección de información se basó en la aplicación de una entrevista en profundidad a los docentes y estudiantes seleccionados, hecha vía *online* y registrada en el teléfono celular. la información fue sometida a reducción mediante el proceso de categorización y saturación lo que permitió crear varias dimensiones a partir de las percepciones de los entrevistados, los hallazgos investigativos revelaron la necesidad de la conjunción de un grupo de estrategias que en su conjunto conformen una aproximación teórica de una didáctica que, contribuya a identificar el conocimiento unitario y Pragmático durante la enseñanza y el aprendizaje de la definición de Limite de una función. Esta investigación se desarrolló ajustada a los principios de la línea de investigación Didáctica del Cálculo de UPEL-Maracay.

Palabras Claves: Obstáculo epistemológico, Límite de una Función Real de Variable Real, Conocimiento unitario y pragmático, Didáctica.

INTRODUCCIÓN

En el proceso de construcción de conceptos matemáticos, es crucial analizar los errores recurrentes de los alumnos, ya que estos pueden revelar problemas cognitivos que dificultan una comprensión adecuada de los conceptos. En los últimos años, el estudio de los obstáculos epistemológicos ha cobrado gran relevancia, enfocándose en los procesos de producción del conocimiento a través de la identificación de errores corregibles y obstáculos superados.

Un obstáculo epistemológico es una concepción o conocimiento que resulta útil en ciertas circunstancias, pero que se vuelve inadecuado cuando se enfrenta a otras situaciones, lo que puede llevar a conclusiones incorrectas. Es crucial destacar que un obstáculo epistemológico no es simplemente un error, aunque puede manifestarse a través de los errores recurrentes de los alumnos (Bachelard G. , 1987).

La aplicación del concepto de obstáculo epistemológico a la didáctica de las matemáticas ha sido posible gracias a los trabajos de G. Brousseau. En 1983, Brousseau realizó una serie de investigaciones con el objetivo de identificar los obstáculos epistemológicos relacionados con las matemáticas enseñadas en la secundaria, así como de desarrollar recursos didácticos para que los estudiantes pudieran superar estos obstáculos (De la Torre, 2003). Brousseau enfatiza nuevamente la importancia de estudiar los obstáculos epistemológicos, tanto desde el análisis del desarrollo histórico del conocimiento como en el contexto de la enseñanza.

Además de Brousseau, otros investigadores han dado grandes aportes al estudio de la noción de obstáculo epistemológico. Sobresalen los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1991) sobre el concepto de límites y, recientemente en nuestro país, los trabajos de Alarcon S. y Suescun C. (2005) sobre el concepto de recta tangente.

Así pues, con base en el apoyo que brindan todas las teorías en Educación Matemática, esta investigación doctoral busca el generar una aproximación a una estructura didáctica para identificar el obstáculo epistemológico “Conocimiento Unitario y Pragmático” en la enseñanza de la definición de Límite de una función de variable real de los estudiantes del nivel universitario del programa de Técnico en mantenimiento electromecánico y electrónico industrial correspondiente al segundo cuatrimestre del

respectivo período académico 2023 de la Institución Universitaria de Barranquilla, en el Departamento del Atlántico, Colombia. En este sentido, el desarrollo del trabajo se presenta en cuatro capítulos, cuyo contenido es el siguiente:

En el Capítulo I, se describe la problemática, objetivos y relevancia de la investigación, acompañada por una delimitación espacial y temporal del estudio, para luego desarrollar la historia del escenario elegido. Seguidamente se muestra el Contexto II, en el que se asientan las experiencias previas de investigaciones al respecto de las categorías de estudio, para luego establecer una base teórica de referencia sobre la cual se apoya la investigación mediante los fundamentos y aspectos teóricos referenciales que se tuvieron presentes en el desarrollo del trabajo investigativo.

Posteriormente se presenta el Contexto III, en el cual se determinó el contexto metodológico de la investigación, se planteó la perspectiva y el enfoque epistemológico, los actores sociales y las técnicas de recolección, procesamiento e interpretación de la información. Este está seguido por el Contexto IV, en el que se desarrolló el contexto crítico con la presentación y análisis e interpretación de la información, de la realidad observada y de los hallazgos aportados por los actores sociales. Finalmente se desglosa el Contexto V, que expresa el contexto generativo y esboza los aportes teóricos que soportan a la estructura didáctica para identificar el obstáculo epistemológico “Conocimiento Unitario” en la enseñanza de la definición de Límite de una Función de variable real. El cierre formal del trabajo está formado por las reflexiones finales del investigador, las referencias bibliográficas y los anexos pertinentes al estudio.

CAPÍTULO I

CONTEXTO EMPÍRICO

Caracterización del objeto de investigación

La enseñanza tiene un propósito esencial en todo proceso educativo y es el de estar encaminada a la transmisión de conocimientos o a la información mediante herramientas comunicativas que van apoyadas con medios auxiliares que pueden en algún momento dado tener o no niveles de complejidad (Díaz, C. C., Reyes, M. P., & Bustamante, K. G., 2020). Lo anteriormente mencionado, es el resultado de dicho proceso, el cual debe ser un reflejo de la realidad y permita al estudiante enfrentarse a situaciones nuevas con una actitud creativa y de apropiación.

Leontiev (1991) sostiene que el proceso de enseñanza produce un conjunto de transformaciones sistemáticas en los individuos, una serie de cambios graduales cuyas etapas se suceden en orden ascendente. Es, por tanto, un proceso progresivo, dinámico y transformador

En la enseñanza se reducen conocimientos, es decir se parte de algo no sabido hasta lograr el saber. Del conocimiento común a un conocimiento más elaborado, más cercano a la realidad (Álvarez, 2000).

Es importante resaltar que la enseñanza juega un papel fundamental en todo proceso educativo, ya que, a través de ella, se puede lograr el aprendizaje. Actualmente, existen muchísimas herramientas, tales como las tecnológicas (Bárcenas, M., Del Carmen, M., & Ubaldo, C. M., 2019), aulas virtuales (Sánchez L., 2020), libros y bibliotecas virtuales (Candell, A. A. D. V., & Adum, S. D. F., 2019), entre otras., todas ellas, han permitido que el proceso de enseñanza mejore sustancialmente, y ante todo que la comunicación entre docente – estudiante sea más amena y clara. Con todas esas herramientas o recursos, también han conllevado que el docente transforme sus prácticas educativas, y es allí donde aparece los aspectos didácticos en educación.

Cuando un saber es marcado por la asociación entre las buenas preguntas y las buenas respuestas, se dice que correspondería a la concepción más general de la enseñanza (Brousseau, 2007). La actuación del docente es muy importante en el

momento de cómo guía un determinado proceso, es decir; si se plantea un problema que el estudiante debe resolver, puede ocurrir dos circunstancias:

- (1) Que lo resuelva
- (2) No lo haga

Al resolverlo, lo que se espera es simplemente decir que si sabe. Al no hacerlo, implicaría que el estudiante le faltaría complementos o informaciones, lo que Brousseau (2007) llamaría *enseñanza*.

En la investigación de Brousseau (1997) introdujo el término *situación* en el proceso de enseñanza para referirse a un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. La situación en este caso, se refiere al entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que la considera como una herramienta. Cuando se generan este tipo de situaciones que sirven para enseñar sin considerar el rol del maestro, fue lo que se denominó situaciones didácticas. Con lo anterior, era necesario apoyar la enseñanza con el término *didáctica* ya que de esta manera, el docente no podía condicionar su proceso en una transmisión de conocimientos solamente sino que tenía, en este caso recurrir a ciertas estrategias para que el estudiante, lograra posteriormente el aprendizaje.

Por otro lado, en el aprendizaje se presentan frecuentes rupturas que pueden tener formas y orígenes variados. Estas rupturas fueron llamadas por Bachelard (1999) como *atascos* que generalmente se presentan durante el proceso, cuando la falta de claridad o coherencia en la información no es la suficiente para la comprensión de dicho aprendizaje. Posteriormente, estos atascos fueron llamados *obstáculos*.

Bachelard (1999), introdujo el término *obstáculo epistemológico* para referirse a una serie de dificultades psicológicas que no permiten una correcta apropiación del conocimiento objetivo. Así mismo, fue un autor que explicitó que este tipo de obstáculo no lo abordó desde la enseñanza de las matemáticas.

Brousseau propone que el interés didáctico de un problema tiene que estar basado en el desempeño del estudiante, sus ensayos, experiencias, los aciertos y desaciertos; también la frecuencia con que el estudiante está dispuesto a cometer errores y la importancia de estos errores. Desde esta perspectiva, los problemas más interesantes serán aquellos que permitan franquear un verdadero obstáculo.

Brousseau menciona a Bachelard quien identifica los siguientes obstáculos en las ciencias físicas: de la experiencia anterior, del conocimiento general, verbal, uso abusivo de imágenes familiares, conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo substancialista, realista, animista, y del conocimiento cuantitativo.

En este trabajo de investigación, se hará hincapié en el obstáculo epistemológico *El conocimiento unitario y pragmático*, se presenta en una comunidad que tiende a involucrarse en el mundo científico y donde la unificación permite simplificar el estudio de cualquier realidad. El concepto de unidad se vuelve mas peligroso si va unido con el de utilidad pues de inmediato se da más valor explicativo a lo que de alguna manera es útil, así para el racionalismo pragmático una nota sin utilidad es un irracional (Bachelard G. , 1987).

Bachelard planteó la noción de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de errores. Posteriormente, esta noción fue tomada por Brousseau para la didáctica de la matemática. Para Brousseau, el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo.

A través de la historia la idea de “obstáculo epistemológico” ha tenido relación con las representaciones o concepciones alternativas de los alumnos, pero añade nuevos matices: los obstáculos epistemológicos son formas de pensar arraigadas, antiguas estructuras tanto conceptuales como metodológicas, que pudieron tener cierto valor en el pasado pero que en el momento actual se contraponen al progreso del conocimiento científico.

Gagliardi (1996), en su artículo sobre obstáculos en el aprendizaje afirma, apoyado en investigaciones realizadas en Europa y en América Latina indican, que al finalizar los estudios primarios o secundarios la mayoría de los alumnos no aprendieron la mayor parte de lo que estudiaron. Temas que fueron enseñados a lo largo de los estudios no fueron integrados en su pensamiento. Incluso muchas de las informaciones que se recuerdan no son utilizadas para construir nuevos conocimientos o para resolver problemas concretos.

La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard G, 1938), fue retomada por Brousseau en 1976 y redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas. En

dicha teoría se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación. El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de resolución. La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está implicada.

Bachelard G. (1949), supone que los alumnos están bloqueados o no están atentos a pesar de que existe situaciones didácticas bien construidas, los aprendizajes no se desarrollan normalmente ocasionando dificultades en los mismos, por tanto, esto puede deberse a el conocimiento que el docente intente enseñar y lo que el alumno pretende aprender.

Brousseau (2007), propone una *arqueología de los obstáculos*, es decir; los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se pueden clasificar de acuerdo a su origen en:

- *El ontogénico*, son los que sobrevienen de las limitaciones del sujeto.
- *El didáctico*, que son todos los obstáculos que se adquieren o aparecen por el modo de enseñar o por la escogencia de un tema o una axiomática en particular.
- *Los epistemológicos*, son los obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos, es propio del concepto.

Como se puede ver, en la teoría de situaciones la noción de obstáculo epistemológico queda englobada en una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Además, la definición de obstáculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber transmitido. Esto induce a extender el concepto de concepción utilizándolo también como significante del estado de conocimiento propio de los matemáticos de otras épocas.

Para el desarrollo de esta investigación se tomó como objeto matemático, la definición de límite de una función real de variable real, contenido en el currículo de Cálculo diferencial, que se imparte en el programa técnico de electromecánica

desarrollado en el segundo cuatrimestre de dicho programa, de la Institución Universitaria de Barranquilla. La investigación tendrá lugar durante el primer período académico 2023, seleccionando un grupo de alumnos y docentes, en dicha asignatura y, con el objetivo de detectar las dificultades que se generan durante el proceso de enseñanza, alguno de los obstáculos epistemológicos que se manifiestan, en forma de errores, durante las prácticas que realizan los alumnos al trabajar con el contenido señalado y cuyo fin, sea el de la producción matemática.

El estudio de la definición de Límite de una función en el mundo y particularmente en Colombia, ha tenido unos resultados muy importantes durante los últimos cinco años, desde el 2018 al 2023. Ha tomado gran importancia debido a las dificultades que han tenido tanto alumnos como profesores en el proceso de enseñanza en dicha temática. De alguna manera, las dificultades han sido bastante visibles como la comprensión de la temática expuesta y su aplicación en problemas de la cotidianidad y principalmente cuando se llega a un módulo de cálculo diferencial o integral en los primeros semestres universitarios

La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos tales como la abstracción, el análisis y la demostración. A veces se supone que los alumnos fracasan por no llegar con una preparación adecuada, no saben álgebra, no conocen las propiedades de los números, las características de las desigualdades, no saben geometría, etc. Pero los alumnos pueden tener todos estos conocimientos y fracasar en el estudio del cálculo.

En esta tesis doctoral también se tendrá en cuenta la revisión de diferentes investigaciones realizadas a partir de los inicios del siglo XXI sobre la noción aquí planteada, y que se han realizado a nivel mundial con mucha fuerza entre los años 2010 y 2023.

En Colombia la preocupación por el aprendizaje de la matemática ha sido motivo permanente. Esto se refleja en los resultados internacionales en la prueba PISA por ejemplo y en las pruebas nacionales para programas técnicos llamadas Saber T y T y, para los programas profesionales, llamadas Saber Pro. Por esto hoy en día, se considera

de interés para el Estado que los alumnos estén capacitados y formados en esta área del conocimiento desde los primeros semestres.

El problema del bajo desempeño académico en matemática no es nuevo, desde hace décadas se tienen evidencias de una carencia en la formación matemática del alumnado en todos los niveles del sistema educativo nacional, pero esta carencia es particularmente notoria al ingresar los alumnos a la educación superior. Esta problemática ha sido estudiada desde diversas perspectivas y se han ensayado diferentes estrategias en aras de conseguir una solución o reducir los efectos negativos de una educación manifiestamente incompleta y/o deficiente en un área prioritaria para el currículo universitario como lo es la formación matemática. Sin embargo, hasta ahora es poco lo que se ha podido conseguir para minimizar los indicadores negativos del desempeño estudiantil en esta disciplina (Morales V. y Credes L., 2004; Orozco, C. y González, P. 1998; Sequera, 1996; Rico, 1995).

Este fenómeno se agudiza a nivel de educación superior porque es allí cuando se visualiza la acumulación de fallas y omisiones en la preparación previa de los fundamentos matemáticos necesarios para la formación profesional. En este sentido, la fase inicial de las carreras universitarias enfrenta las consecuencias de una carencia sustancial de prerrequisitos matemáticos básicos para la transición de los alumnos de la educación media hacia la educación superior. A nivel superior, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus aplicaciones son más complejos y la eficiencia de la actividad didáctica presenta mayor compromiso debido a la multiplicidad de factores que inciden en el fenómeno educativo.

Michèle Artigue (1995) manifiesta: "Las dificultades de acceso al cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan en redes complejas. Por lo tanto, es posible reagruparlas en grandes categorías". Las organiza en tres grupos diferentes asociadas con: 1) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, 2) la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y a su tratamiento en la enseñanza, y 3) la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

Brousseau (1997) propone varios objetivos que deben guiar la didáctica de las matemáticas. El primero sería estudiar las condiciones que deben cumplir los problemas

propuestos al estudiante para favorecer la aparición y el funcionamiento de conceptos. Por otra parte, debe propiciar el rechazo de los conocimientos previos que impiden el aprendizaje; ya sea porque son incorrectos, o bien, porque representan un obstáculo para nuevos conocimientos. Comienza a sugerirse lo que denomina Obstáculos Epistemológicos.

Según Radatz (1980), el análisis de los errores permiten diagnosticar dificultades individuales de los alumnos como punto de partida y como herramienta de investigación de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Diversos estudios como los realizados por ejemplo en derivada: Azcárate (1990), Clark, J. M.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; DeVries, D. J.; St. John, D.; Talias, G. & Vidakovic, D. (1997), Dolores (1998), Baker, B.; Cooley, L. & Trigueros, M. (2000) al igual que en límites: Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols, D.; Schwingendorf, K.; Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996), Sierra Vázquez, M.; González Astudillo, M. T. y López Esteban, C. , (1999) y por último en integral: Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000) y Camacho, M. & Depool, R. (2002); indican que el concepto de límite, es considerado como una de las nociones básicas que presentan un mayor nivel de dificultad al estudiante que se inicia en el estudio de cálculo diferencial.

Hitt (2003) afirma: *“es difícil concebir que un alumno pueda entender el Cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos”* (p.2). Con lo citado Hitt (2003), posiblemente los resultados no favorables a nivel de este tema, tengan que estar relacionados a que la enseñanza se ha limitado a la realización de procesos mecánicos o tradicionales asociados con el desarrollo de competencias del pensamiento variacional.

La historia de las ideas matemáticas muestra que el concepto de límite es complejo. La definición de límite en términos ε y δ , se puede definir de la siguiente manera:

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a , excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L , lo que se escribe como:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si la siguiente proposición es verdadera:

Dada cualquier $\varepsilon > 0$ no importa cuan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Lo anterior corresponde a un resultado de más de cien años de ensayo y error, e incorpora en unas pocas palabras el fruto de un esfuerzo persistente para dotar a este concepto de una base matemática sólida. Sin embargo, una comprensión clara y una definición precisa de los límites estuvieron bloqueadas durante largo tiempo por una dificultad aparentemente insuperable (Courant, R. y Robbins, H. , 1941, p.342 en la ed. en español). De la misma manera, la historia revela los obstáculos que tuvieron determinados matemáticos para entender y formalizar el concepto de límite (Cajori, 1915; Guinness, 1970; Bell, 1940) de ahí, entonces que sea más natural que se presenten también dificultades en su aprendizaje en los alumnos de cualquier nivel, o tal vez, sin generar ningún tipo de conjeturas; puede estar relacionados con el método de enseñanza que utilice el docente.

Investigadores en educación matemática, como Cornu (1981 y 1994), Sierpinska (1985, 1987 y 1988), Tall, D., & Schwarzenberger, R., (1978), Hitt, F. y Páez, R., (2001, 2003 y 2004), entre otros, se han preocupado por identificar la problemática relativa a las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del concepto de límite. Cornu y Sierpinska han relacionado estas dificultades con aspectos históricos del concepto de límite, estableciendo así obstáculos de corte epistemológico.

En concordancia con los planteamientos expuestos, la investigación buscó dar respuesta a los siguientes interrogantes:

¿Qué dificultades presentan en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función, en los alumnos de pregrado durante el desarrollo del módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, en Barranquilla, Colombia?

¿Qué características presentan las concepciones que giran en torno a la definición de límite de una función, junto a los errores que comúnmente están asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje?

¿De qué manera afecta el obstáculo epistemológico “¿Conocimiento Unitario y pragmático” el aprendizaje de la definición del Límite de una función, por parte de los

alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla?

¿Qué estrategias de enseñanza y aprendizaje en conjunto podrían identificar el conocimiento unitario y pragmático presente en la situación didáctica empleada por el docente de matemáticas, en el desarrollo de la definición de límite de una función en la Institución Universitaria de Barranquilla?

Objetivos de la investigación

Objetivo General

Generar una aproximación teórica a una didáctica orientada a la identificación del conocimiento unitario y pragmático en la enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real a fin de que conduzca a un aprendizaje verdaderamente significativo en estudiantes de pregrado.

Objetivos Específicos

1. Caracterizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas.
2. Describir cada una de las concepciones que giran en torno a la definición de límite junto a los errores que comúnmente están asociados al proceso de su enseñanza, con la finalidad de establecer sus puntos de encuentro y sus diferencias.
3. Interpretar los efectos del obstáculo epistemológico “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición del Límite de una función, en su aprendizaje por parte de alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial de la institución universitaria de Barranquilla, a fin de que sea superado.
4. Derivar los elementos que conformarán una estructura didáctica a fin de identificar el “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición de límite de una función en la institución.

Justificación

La investigación trata sobre un problema de actualidad que quiere ser analizado objetiva y científicamente, por cuanto ayudaría a una enseñanza efectiva, ya que el cálculo de límites se propone ir más allá de lo alcanzado por la intuición si se comenten errores de tipo teóricos sería imposible solucionar cualquier problema. Así mismo, constituye uno de los mayores desafíos en la educación actual ya que su aprendizaje trae con ello numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos tales como la abstracción, el análisis y la demostración.

En el aprendizaje del cálculo se presentan dificultades de diferente naturaleza. Tales como las provocadas por los esfuerzos para superar los modos de pensamiento numérico y algebraico (Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. , 2006).

Actualmente el aprendizaje del cálculo entre ellos el de límite en alumnos de la facultad de ingeniería de la Institución Universitaria de Barranquilla es limitado así lo demuestran los últimos informes sobre el bajo rendimiento académico de los alumnos del primer semestre. Por esta razón se considera el estudio de los errores cometidos por los alumnos como aporte teórico ya que permitirá:

- Mejorar la calidad del proceso de aprendizaje en los alumnos cursantes de la asignatura calculo I en la temática de límites de funciones.
- Proveer de un rol activo a los alumnos en su proceso de aprendizaje, donde este participe como actor y reactor del mismo.
- La retroalimentación del aprendizaje, permitiéndole saber al estudiante cuando sus respuestas son correctas o no.
- Fortalecer el rol del docente, frente a la forma tradicional de impartir la enseñanza del límite de funciones matemáticas.
- Establecer una didáctica o modelo didáctico por parte del docente.

Es importante que durante todo proceso de obtención de conocimiento, se logre identificar todas aquellas debilidades y fortalezas que surgen durante un proceso de enseñanza - aprendizaje, y así mismo partir del conocimiento de saberes previos para identificar aquellos obstáculos de tipo epistemológicos que suelen perjudicar a los

alumnos en sus respectivos procesos y en el que tengan presentes, la importancia que pueden tener en su vida cotidiana un tema cómo es el límite de una función de variable real.

La investigación tiende a ser de gran relevancia porque a través del uso de una metodología como la ingeniería didáctica, se puede lograr tener avances significativos en el proceso enseñanza y aprendizaje, principalmente cuando se han detectado obstáculos en el conocimiento que impiden la aproximación a un modelo científico escolar en el ámbito matemático.

Por otro lado, la investigación incide directamente en la mejora del proceso de comprensión del tema Límite de una función de variable real. En ese sentido, los resultados de la investigación servirán de apoyo a las teorías didácticas de la matemática, la cual promoverá aspectos teóricos a los diferentes procesos de enseñanza y aprendizaje que serán de gran utilidad tanto a los docentes, a los alumnos y en general, constituyéndose en nuevos constructos que formarán parte de la Educación Matemática.

Este trabajo investigativo abre las posibilidades a, el “saber” en el aula de clase en la situación problema con estrategias didácticas centradas en el estudio de las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza de la matemática, y las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo del estudiante.

La presente investigación es novedosa dentro del campo de la Educación Matemática, ya que sus resultados servirán de apoyo a las teorías didácticas de la matemática, lo cual dará lugar a aspectos teóricos al proceso de enseñanza, que será de gran utilidad para los docentes, alumnos y en general, constituyéndose en nuevos constructos que formarán parte de la Educación Matemática.

Por tanto, el siguiente trabajo investigativo, abre las posibilidades a un nuevo saber, dentro del aula de clases y donde dé lugar al diseño de estrategias didácticas centradas en las dificultades generadas en el proceso de enseñanza y donde, el obstáculo priorizado es el del conocimiento unitario y pragmático.

Finalmente, se concibe la presente investigación como un aporte a la Educación Matemática en Venezuela y en Colombia y una herramienta pedagógica que permitirá al docente preparar las prácticas docentes en el sentido de elaborar estrategias didácticas aplicadas a los alumnos que conduzcan a la categorización y la triangulación de los

hallazgos que orienten la elaboración de la configuración epistémica didáctica de las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática, y las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiante.

Este trabajo tiene una relación estrecha con la línea de investigación: **Didáctica del Cálculo**, adscrita al Núcleo de Investigación en Educación Matemática de la Upel-Maracay cuyos propósitos u objetivos son: seguir indagando sobre los Valores y Emociones implícitos en el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo en educación universitaria, sin descuidar por supuesto el aspecto cognitivo presente en este proceso (García, 2021). Así mismo, esta línea se toma como referente básico a la definición de Didáctica de la Matemática que establece D'Amore (2008) quien sostiene que “la Didáctica de la Matemática es el arte de concebir y de crear condiciones que puedan determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo”. Dentro de las propuestas de esta línea esta crear esas condiciones utilizando varios enfoques que expliquen el aprendizaje del individuo. La Didáctica de la Matemática, la Matemática Educativa o Educación Matemática se ha encargado de explicar el aprendizaje del conocimiento matemático a través de distintos enfoques. Como lo son: el cognitivo, el constructivista, el sistémico, el antropológico, el semiótico, el crítico, el curricular, el afectivo y algunos particulares asociados con un área específica de la matemática.

Ahora bien, esta línea enmarca sus objetivos en el enfoque cognitivo, por ser uno de los más empleados en la Didáctica del Cálculo, tal como lo afirma Arrieta (2009), en términos de procesos cognitivos “la problemática relacionada con el aprendizaje de la matemática es abordada desde el punto de vista de los errores y dificultades de los estudiantes considerando los procesos asociados de definición, prueba, análisis y demostración en temas relacionados con el Análisis Matemático” (p.33).

Por último, esta línea dentro de su marco de acción para las investigaciones, establece que el uso del lenguaje matemático es importante mantenerlo, se tiene llamar los conceptos matemáticos por su nombre respectivo, y ser muy cuidadoso con el uso de las notaciones aceptadas por la comunidad de matemáticos en la resolución de ejercicios o problemas, así como en las demostraciones, por lo que la definición de límite de una función real de variable real será estudiada tal cual su simbología.

CAPÍTULO II

CONTEXTO TEÓRICO

Antecedentes de la investigación

Los componentes teóricos que sustentan el estudio se describen y examinan en este capítulo. Como resultado, fue necesario revisar algunas investigaciones o estudios anteriores que habían sido presentados previamente como tesis doctorales con el fin de guiar, argumentar y sustentar esta investigación. Los documentos no abordan en su totalidad la pregunta central de esta investigación, sí hacen referencia a algunas de sus dimensiones, por lo que son importantes a la hora de construir los fundamentos teóricos que permitan abordar de manera integral dichas dimensiones y la pregunta central del estudio.

Por tanto, la revisión bibliográfica permitió consultar diferentes fuentes documentales, tanto de investigadores internacionales como nacionales, relacionados con el objeto de estudio, constituyéndose así, los antecedentes de la investigación.

En ese sentido, las bases teóricas se sustentaron en la descripción de los componentes de la Teoría Antropológica de Didáctica de la Matemática, la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos de Bachelard.

Antecedentes Nacionales

Pacheco (2020), en su trabajo para optar al Título de Doctor en Ciencias de la Educación, titulado ***Didáctica interdisciplinar para el aprendizaje de las ciencias básicas en estudiantes universitarios***, en la Universidad Simón Bolívar de la ciudad de Barranquilla, se enmarca dentro de la Línea de investigación de Pedagogía, Educación y Complejidad, tiene como finalidad describir didácticas interdisciplinarias para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Básicas en estudiantes universitarios del área de salud.

Se asume como antecedente porque aunque no coincida con la línea de investigación si con el contexto teórico, ya que la descripción de una didáctica en el proceso de

aprendizaje de las Ciencias Exactas es un aporte fundamental, ya que las matemáticas está incluida de las llamadas Ciencias Exactas.

La metodología utilizada fue de corte cualitativo, enmarcado en el paradigma socio crítico y su diseño metodológico corresponde al modelo de investigación-acción-participación, desarrollado a través de las etapas: observación, planificación, acción y evaluación, transversalizadas por la reflexión. Las técnicas utilizadas fueron: observación participante, grupos focales y talleres con sus respectivos instrumentos de recolección de datos. En la investigación participaron directivos, profesores y estudiantes de la Facultad de Ciencias Básicas y Biomédicas de la institución arriba mencionada y como resultado se plantea la aplicación de una estrategia didáctica interdisciplinar utilizando puentes integradores, los cuales favorecieron los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Básicas en general y de la biología en particular, en los estudiantes que cursan los programas de la salud.

Carreño (2020), en su trabajo de Tesis Doctoral titulado ***La naturaleza de la ciencia que se enseña desde la práctica reflexiva de los profesores de ciencias***, para optar el Título de Doctor en Educación Matemática, en la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá – Colombia, por medio de una metodología de investigación cualitativa, con un diseño de estudio de caso colectivo; analiza las principales características de la NdC que enseña un grupo de profesores de ciencias en ejercicio, desde la visión de consensos; el enfoque de parecido familiar (EPF); la enseñanza implícita y explícita de la NdC, y los niveles de reflexión, por medio de la práctica reflexiva desarrollada en un proceso de formación en servicio. Los resultados de la investigación contribuyen en las reflexiones y análisis sobre el desarrollo profesional de los profesores de ciencias, el cual debe ser ajustado y pensado, reconociendo al profesor como un profesional de la educación que construye y reconstruye sus prácticas de enseñanza desde su reflexión en contextos particulares. Así mismo con los permite reflexionar en torno a los procesos de formación en servicio de los profesores de ciencias, ya que al partir de la práctica reflexiva que desarrollan los profesores y el diálogo con sus colegas del área de conocimiento, se empiezan a configurar comunidades de formación, que a su vez contribuyen en la consolidación de la identidad profesional.

El anterior trabajo de investigación, realiza un aporte muy importante a esta Tesis Doctoral en cuanto al tipo de metodología empleada y porque toma al docente como centro fundamental de los resultados de dicha investigación, lo cual lo centra al tener como referencia el ejercicio de tipo reflexivo que el docente realiza al construir y reconstruir sus prácticas de enseñanza. Importante el término de enseñanza dentro del proceso didáctico en contextos particulares.

García (2023) en su trabajo para optar al Título de Doctor en Educación Matemática, titulado ***Un modelo didáctico para el aprendizaje del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible en carreras de ingeniería***, en la Universidad Antonio Nariño de Bogotá – Colombia, se propone una estrategia metodológica para la enseñanza del álgebra lineal en carreras de ingeniería centrada en el razonamiento plausible, conceptos desarrollados por Polya (1966) y Lakatos (1978), a través de la formulación y adaptación de problemas interesantes cuyos diseños admitan un modelo didáctico y un procedimiento metodológico para la generación de conjeturas a través de la mediación de la tecnología y la visualización geométrica como factores fundamentales en la construcción de los principales conceptos por parte de los estudiantes y que caracterizan esta disciplina.

Este trabajo está motivado por las insuficiencias que presentan los estudiantes de estas carreras para el aprendizaje del álgebra lineal; por ello que se plantea esta investigación y se informa su diseño. Las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal se vienen investigando desde el pasado siglo, en particular en la década de los noventa; es referente el grupo LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group) en los Estados Unidos. Por otra parte, Anna Sierpinska y Jean-Luc Dorier lideran otro grupo en Canadá y Europa. Ambos grupos coinciden que uno de los grandes problemas en la enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal es el enfoque formal de las clases que tradicionalmente se imparte. Por tanto, es el punto de partida de este estudio que estudiantes de primer o segundo semestre experimentan gran dificultad en asimilar las definiciones, teoremas y demostraciones, las que resultan poco asequibles para los futuros ingenieros.

Se asume como antecedente porque a pesar de no coincidir con la línea de investigación, si establece un elemento fundamental que está relacionado con la

estructura de un modelo didáctico para un objeto matemático que para este trabajo es el álgebra y mi tesis doctoral es la definición de límite.

En este trabajo, queda una fuerte relación con mi tesis doctoral, en lo que respecta a las dificultades que en realidad se hacen más visibles en cuanto a la transición de un niño de secundaria a la universidad. Se puede ver desde los distintos aspectos matemáticos y es ahí donde se desarrollan las dificultades para afrontar, posteriormente desarrollos conceptuales en los primeros semestres universitarios.

González (2023), en su trabajo para optar el Título de Doctor en Educación Matemática, **titulado *modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental*** en la Universidad Antonio Nariño de Bogotá – Colombia, esta investigación presenta un modelo didáctico enfocado en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de grado séptimo.

La investigación tiene un enfoque cualitativo, bajo un diseño de investigación acción. Los resultados indican que a través de la modelación matemática interdisciplinaria en la cual se involucran problemas del contexto ambiental, los estudiantes comprenden, construyen y aplican conceptos matemáticos, desarrollan técnicas para la solución de problemas y estrategias metacognitivas. Además, adquieren rigor en la comunicación y argumentación de sus modelos matemáticos, entre otros aspectos que conllevan al desarrollo de su pensamiento matemático. El modelo didáctico propuesto se ve reflejado en el desarrollo del pensamiento matemático, es decir, es funcional y responde al objetivo de la investigación.

Lo anteriormente planteado, guarda una relación con esta tesis, ya que tienen obedece a una estrategia de un modelo didáctico y en el que se combinan la resolución de problemas. Esto conlleva al mejoramiento del pensamiento matemático y a utilizar herramientas dentro del contexto ambiental.

Sanabria (2018), en su trabajo titulado ***Dificultades, conflictos y obstáculos en las prácticas educativas universitarias de iniciación al cálculo diferencial —PEUC— en estudiantes de ingeniería.*** para optar al título de Doctora en Educación Matemática, en la Universidad Francisco José de Caldas de la ciudad de Bogotá - Colombia. Esta

investigación se centró en identificar, describir, caracterizar y explicar las dificultades, los conflictos y obstáculos que se pueden inferir a partir del estudio de algunas prácticas educativas universitarias del trabajo inicial en el cálculo diferencial en estudiantes de primer semestre de Ingeniería, cómo emergen, y qué posibles relaciones causales podrían establecerse para su explicación, configurando inicialmente un marco de comprensión para la conceptualización de algunos constructos teóricos relacionados con la noción de obstáculo. Se acudió fundamentalmente a las teorías de Brousseau, Sierpinska, Artigue, Godino, Radford y D'Amore, como también a los estudios de Sfard sobre reificación, y de Tall sobre imagen conceptual ("concept image") y procepto ("procept").

La investigación es de enfoque cualitativo, de tipo descriptivo-interpretativo; el tipo de estudio es exploratorio, con el método de estudio de caso, en el que se utilizó la observación no participante y la entrevista estructurada basada en tareas.

Se toma como antecedente, porque se enmarca en un tipo de enfoque cualitativo, de tipo descriptivo-interpretativo, lo cual está relacionado con mi trabajo de tesis doctoral. Así mismo, es conveniente también tener conocimiento sobre las estrategias de tipo didáctico que utilizan los profesores de matemáticas en el aula de clase, ya que sería un elemento de entrada muy importante para iniciar en la elaboración de otras estrategias que profundicen la ya citadas por dicho trabajo doctoral.

Antecedentes Internacionales

Granera (2019), en su trabajo titulado ***Proceso de enseñanza – aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería***, para optar el título de Doctor en Matemática Aplicada, Facultad Regional Multidisciplinaria, Chontales, Estelí, Nicaragua. El campo científico en el que está ubicado este estudio es la Didáctica de la Matemática, dentro de las líneas de investigación de la Calidad Educativa. El propósito de la investigación fue desarrollar el campo conceptual del Cálculo y su enseñanza aprendizaje, considerando dos aspectos principales: Un primer aspecto, de ámbito cognitivo mediante el cual se preparó material curricular con el objetivo de introducir previamente al estudio del cálculo de primitivas, el

concepto de Integral Definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica.

El segundo aspecto, de ámbito afectivo consistió en analizar las actitudes de los estudiantes en torno a confianza, seguridad, motivación, compromiso y uso de la computadora en el trabajo matemático. Los estudiantes fueron seleccionados de los cursantes de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral en Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Energías Renovables. Se concluye que, la elaboración de un compendio es un instrumento útil en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo; y, en relación a las actitudes se tiene que, el uso de la computadora da confianza y seguridad, además de ser motivante y compromete al estudiante en la realización de actividades matemáticas.

Se tomó como antecedente, porque se enmarca en las estrategias de enseñanza y aprendizaje puede desarrollar con el cálculo y, de igual forma utilizando una herramienta tecnológica, como es la computadora.

Giacomone (2018), en su trabajo de investigación titulado ***“Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico”*** de la Universidad de Granada, España; para optar al grado de Doctor, con la mención internacional, en el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación. Desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos se ha propuesto un modelo de categorías de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas y también se ha abordado la descripción de competencias profesionales, ligándolas básicamente con la competencia de describir, explicar y valorar los procesos de estudio matemático.

Continuando con esta línea, en esta investigación se abordó el desarrollo de un ciclo formativo, esto es, su diseño, implementación y análisis retrospectivo, dirigido a futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, con el objetivo de iniciarlos en el desarrollo de su competencia para el análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos ligados a dicha competencia. Se centró la atención en dos aspectos: en primer lugar, en el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, entendiéndola como la competencia para identificar la variedad de objetos y significados involucrados en la resolución de tareas matemáticas; en segundo lugar, en el desarrollo de la competencia

de análisis y reflexión profesional. El análisis de los datos es cualitativo y está orientado a la identificación de prácticas didácticas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los participantes, el reconocimiento de conflictos y sus progresos en el desarrollo de las competencias pretendidas. La recogida de información se basa en el análisis de las anotaciones del observador-investigador y profesor investigador, las grabaciones en audio y las respuestas escritas.

El análisis a priori del ciclo didáctico propuesto revela una alta idoneidad epistémica y ecológica; no obstante, las limitaciones del tiempo asignado han condicionado el logro de un nivel de aprendizaje adecuado. Por otro lado, los resultados revelan la complejidad involucrada en el desarrollo de ambas competencias, así como su relevancia para lograr una enseñanza de las matemáticas de alta calidad.

La investigación anterior citada, guarda cierta relación con mi Tesis Doctoral, ya que es importante que el profesor de Matemáticas, logre dominar una competencia que es muy importante en el proceso de enseñanza como lo es la del análisis ontosemiótico y su propia reflexión personal. Son dos elementos claves para poder desarrollar una enseñanza adecuada en el aula de clase. Asimismo, dicha tesis en mención también comparte un enfoque de tipo cualitativo.

Urrea (2021), presentó su Tesis Doctoral en Educación Matemática en la Universidad de los Lagos, Osorno, Chile; titulada: “**Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores chilenos de enseñanza media sobre la noción de función: una experiencia en contextos de microenseñanza**”. En esta investigación se presentan estrategias y herramientas teórico-metodológicas para orientar el diseño, la reflexión y la valoración sobre la práctica del profesor de matemáticas cuando realiza procesos de instrucción sobre la noción de función. Esto permitió caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemática chilenos cuando afrontan el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre funciones en contextos de microenseñanza.

Para lograr el objetivo central del estudio se propusieron tres fases: 1) Revisión sistemática de la literatura científica, para indagar los conocimientos requeridos por los profesores para gestionar la enseñanza de funciones; 2) Determinar el conocimiento didáctico-matemático de referencia descrito por medio de componentes e indicadores de idoneidad didáctica para la enseñanza de la noción de función; y 3) Aplicación de la

herramienta para caracterizar el conocimiento de profesores chilenos en formación quienes desarrollan un proceso de instrucción sobre funciones en contexto de micro enseñanza.

Para el desarrollo de la investigación se utilizaron las nociones teórico-metodológicas del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), las herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y los contextos de microenseñanza-como espacios ricos y esenciales para la formación del profesorado. Como conclusión del estudio, es posible observar que la propuesta teórico-metodológica diseñada en este estudio permite sistematizar los procesos de reflexión y valoración de la práctica docente (propia o la de otros) para la enseñanza de la función, y así determinar (o anticipar) acciones que permitan mejorar los procesos de enseñanza sobre este objeto matemático.

Se tomó como antecedente el anterior trabajo, ya que guarda amplia relación con el objeto matemático relacionado con mi Tesis Doctoral. Al igual, se presenta otro tipo de estrategia de enseñanza como lo es, la reflexión docente y su valoración en el campo didáctico, al igual con un tema que es base para mi tesis, que el término de función.

Por otro lado, con González (2023), quién realizó su trabajo para optar por el grado de Doctora en Ciencias de la Educación en la línea Educación Matemática, en la Universidad de Granada, España. En este trabajo pretendió en caracterizar los significados expresados por estudiantes universitarios cuando se les preguntó por el concepto de límite de una función en un punto. Esta caracterización se realizó en dos momentos diferentes y considerando dos niveles de complejidad cognitiva. En un nivel elemental se centraron en la caracterización de los hechos matemáticos que los estudiantes expresaron, las representaciones que utilizaron, las aplicaciones que sugirieron y los modos de uso del término límite. En segundo nivel de complejidad, se centraron en describir los razonamientos sobre el límite que evidenciaron los estudiantes.

Metodológicamente, este trabajo se enmarcó dentro de las investigaciones de diseño mixto, de alcance exploratorio y descriptivo. Se diseñaron dos cuestionarios semánticos que permitieron recoger información sobre las ideas que tuvieron los estudiantes sobre límite en dos momentos diferentes: al principio de su instrucción y después de la misma. Los documentos analizados correspondieron a producciones escritas proporcionadas por 218 estudiantes de la asignatura Cálculo I de distintas titulaciones de la Universidad

Nacional de Costa Rica. El método de análisis de los datos se realizó a través de un análisis de contenido, un análisis *cluster* jerárquico y un análisis *cluster* no jerárquico de k-Medias con una iteración.

Los datos se organizaron usando un sistema de categorías adaptado de investigaciones previas. Este primer sistema de categorías les permitió caracterizar los significados expresados por los estudiantes usando elementos de un primer nivel de complejidad cognitiva. Adicionalmente, elaboraron otro sistema de categorías basado en los cuatro elementos del modelo de Toulmin adaptado a la educación Matemática.

En cuanto a los resultados, se tiene que al límite lo describen mayoritariamente las nociones de objeto y proceso, lo representan usando representaciones gráficas cartesianas y lo interpretan o usan mediante términos de posición relativa, subrayando aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad.

La mayor diferencia que se observó durante la enseñanza del concepto de límite y después de la enseñanza de este concepto es el nivel de detalle en cada una de las respuestas a las preguntas de los cuestionarios. Durante la enseñanza del límite, las respuestas de los estudiantes tuvieron un gran nivel de detalle, tanto en las definiciones, en las representaciones y en los términos y modos de uso que brindan, sin embargo, posterior a la enseñanza las respuestas son muy escuetas y disminuye la variedad de elementos en cada una de ellas.

Este antecedente se muestra con claridad el papel que juega el docente en el proceso, permite aportar ideas referentes a las respuestas que los estudiantes generan frente a cuestionarios que construye el docente, tomando como objeto matemático el límite de una función. Por otro lado, se muestra interesante el manejo de una estrategia de enseñanza, como es el método Toulmin, donde contribuye al favorecimiento de la argumentación por parte de los estudiantes en dicho tema.

Araya (2022), presentó su trabajo de investigación titulado “***Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable.***” por la Universidad de los Lagos, Chile, para optar al grado de Doctora en Educación Matemática. El estudio sobre el objeto matemático límite de funciones en una variable y su enseñanza ha tenido un creciente interés en los últimos años. Sin embargo, hay pocos trabajos que indaguen y propicien experiencias didácticas de cada uno de los significados

parciales de dicho objeto matemático con el fin de propiciar la riqueza matemática y los procesos que relevan cada uno de éstos.

En esta investigación se propuso el diseño de tareas de cada uno de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable y se expusieron los resultados obtenidos mediante la implementación de las tareas en un grupo de profesores en formación, en particular, se estudió los significados personales desarrollados por los participantes.

El objetivo central de la investigación estuvo enmarcado en cinco fases: 1) Análisis de la evolución histórica de la noción de límite mediante estudios históricos epistemológicos existentes en la literatura; 2) Diseño de las configuraciones epistémicas de cada uno de los significados parciales identificados en la fase anterior; 3) Diseño de tareas por intención de cada significado parcial del objeto límite de funciones de una variable; 4) Validación e implementación de las tareas diseñadas en la fase anterior; y 5) Análisis de la implementación de las tareas y reflexiones finales.

Para el desarrollo de la investigación se utilizaron las nociones teórico-metodológicas de la configuración de objetos y/o procesos matemáticos y los componentes de la Idoneidad Didáctica que propone el Enfoque Ontosemiótico (EOS) así como también criterios de diseño de tareas que considera aspectos de contexto, lenguaje, estructura, distribución y niveles de interacción.

Los resultados de la investigación proporcionaron pautas y criterios que permitieron el diseño de tareas para desarrollar y/o potenciar cada uno de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable, así como también aporta en el análisis de la implementación de las tareas con especial énfasis en los significados personales logrados por los estudiantes.

La tesis doctoral que se presenta consta de ocho capítulos. El primer capítulo se realiza una revisión de las investigaciones sobre la noción de límite, tales como, estudios históricos epistemológicos, obstáculos epistemológicos y cognitivos, propuestas didácticas, habilidades y conocimientos que se le exigen a los docentes en Chile en cuanto a esta noción, etc.

En el segundo capítulo se estudian las nociones teóricas y metodológicas que utilizamos a lo largo de su estudio, el primero es el Enfoque Ontosemiótico del

Conocimiento y la instrucción matemáticos, y el segundo es la concepción del Diseño de Tareas.

En el tercer capítulo se realiza un estudio histórico-epistemológico sobre la noción de límite de una función en una variable, este análisis nos permite identificar las problemáticas más relevantes que ayudaron a construir el surgimiento y la evolución de la noción a través del tiempo. Además, ayudaron a establecer las configuraciones epistémicas de cada significado parcial de la noción de límite.

En el cuarto capítulo se propone el diseño de las tareas basadas en las configuraciones epistémicas de cada significado parcial de la noción de límite de una función en una variable. Las tareas relevan la riqueza de los procesos del objeto matemático, se expone las posibles respuestas de los estudiantes y se establece las configuraciones epistémicas que éstas evocan.

En el quinto se realiza un análisis de la implementación de las Tareas a un grupo de 11 profesores en formación, dicho análisis se sustenta en las Configuraciones Epistémicas pretendidas y con las Configuraciones Cognitivas desarrolladas por los estudiantes, así como también en el estudio de cada uno de los ámbitos de la Idoneidad Didáctica.

En el capítulo 6, se desarrolla un análisis de las observaciones brindadas por cuatro expertos, las cuales se detallan y se discuten para la mejora de las Tareas.

En el capítulo 7, se describe las mejoras de las Tareas y la incorporación de las observaciones dadas por los expertos y por el análisis de la implementación didáctica. Adicionalmente, se exponen recomendaciones para su implementación.

Finalmente, en el capítulo 8, se establecen las conclusiones del estudio, sus aspectos limitantes y las proyecciones del trabajo.

La Tesis doctoral mencionada anteriormente, constituye un apoyo fundamental ya que aporta en la manera de cómo lograron primero detectar las dificultades que surgieron en el proceso de comprensión del concepto de límite y posteriormente las estrategias que se utilizaron para mejorarlas. Es decir, constituye un gran aporte desde el plano didáctico y además, se mencionan obstáculos epistemológicos que un docente debería conocer cuando enseña.

Fundamentación Teórica

Dentro de los aspectos de importancia en esta investigación, se encuentra el contenido teórico que la fundamenta, de ahí que la misma se apoyará en: La Teoría Antropológica de Didáctica de la Matemática; Situaciones Didácticas y el conocimiento sobre obstáculos epistemológicos. Por otro lado, es también relevante resaltar los esfuerzos que, a nivel de investigación en Educación y Didáctica de la Matemática para la articulación de las distintas facetas epistemológicas, cognitivas e instruccionales, presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Teoría Antropológica de Didáctica (TAD) de la Matemática

Como la mayoría de enfoques en didáctica de las matemáticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (desde ahora TAD) ha estado siempre íntimamente relacionada con la formación inicial y continua de profesores, y ello por distintas razones. En primer lugar, porque los profesores en activo han formado (y siguen formando) parte de muchos de los equipos de investigación que trabajan en el ámbito de la TAD. En segundo lugar, porque desde sus inicios con la puesta en evidencia del fenómeno de la transposición didáctica (Chevallard 1985), la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado.

Por otro lado, el objeto de estudio incluye además todas las instituciones que participan en este proceso, entre las que se cuentan el propio profesorado y también aquellas que intervienen en su formación inicial y continua. Y, en tercer lugar, porque muchos investigadores que trabajan en la TAD se han visto involucrados en la formación del profesorado de los distintos niveles educativos. De ahí que el desarrollo de este enfoque se haya visto siempre potenciado por los problemas que surgen en dichos procesos de formación y por el esfuerzo para aportarles elementos de respuesta. No sorprende entonces que la formación de profesores se considere como uno de los principales ámbitos de estudio e investigación de la TAD.

Esta teoría fue impulsada en Francia por Yves Chevallard (1991), se arraigó profundamente en España, con contribuciones cruciales de investigadores como Mariana Bosch y Josep Gascón; de aquí que se encuentren muchos artículos en castellano.

Bosch (2000), establece que la Teoría Antropológica en Didáctica (TAD) de las matemáticas, está inscrita dentro de un programa de investigación llamado “*programa epistemológico*” y que tuvo su origen en los trabajos de Guy Brousseau iniciados a finales de los años 70 (Brousseau, 1999).

Un aspecto que caracteriza al proceso epistemológico es el de considerar el objeto primario de investigación didáctica como la *actividad matemática*. Lo anterior implica que la didáctica de las matemáticas no debe solamente estudiar las formas o maneras de difundir y transmitir el conocimiento matemático (Brousseau, 1999), sino más bien, un conocimiento que sea el producto del quehacer humano.

Partiendo de lo anterior, un análisis de la actividad matemática implica un modelo epistemológico, que se reduce en la forma de cómo entender matemáticas y la de producir conocimiento matemático.

La Teoría Antropológica describe la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas*.

La Noción de Organización Praxeológica

Dado que cualquier terminología está cargada de connotaciones y valoraciones debidas a su uso en determinados contextos y situaciones, es metodológicamente muy ventajoso evitar, en la medida de lo posible, retomar por cuenta propia, sin un previo cuestionamiento, las nociones culturales de “conocimiento”, “competencia”, “capacidad”, “habilidad”, etc. que se utilizan corrientemente en las instituciones escolares para tratar el hecho didáctico. Para ello la TAD introduce una conceptualización unitaria sencilla en términos de *praxeologías* – unión de los términos griegos *logos* y *praxis* – para referir a cualquier estructura posible de actividad y conocimiento.

Por lo anterior, se parte del postulado que toda actividad humana se puede describir como la activación de praxeologías, asumiendo así que, en la perspectiva antropológica adoptada, toda práctica o “saber hacer” (toda *praxis*) aparece siempre acompañada de un discurso o “saber” (un *logos*), es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

Una organización matemática es una entidad compuesta por: *tipos de problemas o tareas problemáticas*; *tipos de técnicas* que permiten resolver los tipos de problemas; *tecnologías* o discursos (“logos”) que describen y explican las técnicas; una *teoría* que

fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas y los tipos de técnicas constituyen el “saber-hacer” matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el “saber” matemático propiamente dicho (Bosch, 2000). Es claro, que hay dos elementos o caracterizaciones muy importantes dentro de esta organización como son *el saber-hacer* y *el saber matemático*. El saber-hacer, implica el ajuste de diversas técnicas para resolver distintos problemas de manera inteligible, justificada y razonada.

Por otro lado, *enseñar y aprender matemáticas* obedece a la reconstrucción de organizaciones matemáticas, donde el docente juega un papel protagónico, que es el de constituirse en guía de dicha reconstrucción.

El término mismo de “praxeología”, formado a partir de “praxis”, actividad, y de “logos”, discurso, atestigua la inseparabilidad supuesta entre el “hacer” y el “explicar” dicho hacer. Lo anterior, hace relación a la noción de *comprensión*, ya que tiene una relación directa en la producción o reproducción de un discurso tecnológico y teórico a nivel del campo matemático (Thurston, 1994) y ello asociado, a determinadas actividades de resolución de problemas.

Para Bosch (2000), en el marco de la Teoría Antropológica, no se hablará de “comprender un concepto”, porque la unidad elemental de análisis de la actividad matemática no es el concepto sino la organización matemática o praxeología. Lo anterior se refiere a, la explicación de las actividades propias de las matemáticas que dan lugar a la comprensión de situaciones problemas, producto de dichas organizaciones.

Objetos Ostensivos y Objetos No Ostensivos

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de éstas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino J. , 2002):

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que, si estos sistemas son específicos de una persona, se consideran como “objetos personales” (Godino, J y Batanero, C., 1996). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática.

- *Ostensivo – no ostensivo*. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos...).

- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica (Eco, 1995). La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- *Extensivo – intensivo (ejemplar – tipo)*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = x^2 + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = ax^2 + bx + c$). La dualidad extensivo/intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, A., V. Font, L. Luque y L. Ordóñez, 2005).

- *Unitario – sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias, mientras que en otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

El modelo epistemológico propuesto por la Teoría Antropológica establece una distinción dentro del conjunto de objetos que componen los distintos elementos de las organizaciones matemáticas: las tareas problemáticas, las técnicas, las tecnologías y las teorías “están hechas” de objetos *ostensivos* y de objetos *no-ostensivos*. (Bosch, 2000, Bosch, M. & Chevallard, Y. , 1999).

Los objetos ostensivos son aquellos que se pueden tocar, percibir, ver, oír, es decir lo material como las escrituras, los gráficos, gestos o discursos. En cambio, los objetos no-ostensivos, corresponde a aquellos que existen institucionalmente, no se pueden percibir ni mostrar, como por ejemplo: las ideas, los conceptos, las creencias, etc.

La Valencia Semiótica

Corresponde a una función de los ostensivos, donde la actividad matemática considera que los objetos ostensivos son exactamente los signos de otros objetos, generalmente no-ostensivos, a los cuales representa. Lo anterior, indica que ésta función está formada por organizaciones matemáticas más o menos amplias, quiénes hacen parte de actividades matemáticas con cierto grado de complejidad en lo que respecta a dichos objetos tanto ostensivos y no-ostensivos. Hay que entender que esta valencia semiótica solo se puede obtener a través de la realización de una actividad.

La valencia semiótica de los objetos ostensivos es inseparable de la *relación de modelización* que une una organización matemática considerada como *sistema* que se quiere estudiar, a una organización que funciona como *modelo* de la anterior (Chevallard, 1985-1989). Esto implica, que la noción de representación, ahora se involucra con la noción matemática de modelización. Así mismo, cualquier problema matemático puede ser resuelto a través de procesos de modelización, es decir un tipo de organización matemática que va a depender de diversas propiedades o caracterizaciones, de acuerdo a lo que se establezca como objeto ostensivo.

La Problemática Didáctica

La didáctica de las matemáticas postula la existencia de *leyes didácticas* que rigen el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Según Bosch (2000), estas leyes se manifiestan en forma de *fenómenos didácticos* que, hasta cierto punto, escapan a la voluntad de los actores del proceso didáctico y que se constatan empíricamente como regularidades observables y difíciles de modificar. En este aspecto, se enmarca una situación que tiene que ver con formalismos, por ejemplo: simbolismos que pueden ser usados en un determinado problema, como resolver una ecuación de segundo grado y después no saber relacionarlo con el método gráfico. No hay una concordancia entre lo analítico y lo gráfico. Lo anterior, es un fenómeno didáctico, que puede verse afectado por la forma en que el docente puede estar realizando el proceso didáctico con sus estudiantes.

También es importante adicionar a este aporte, que en estos tipos de fenómenos didácticos, hay situaciones epistemológicas que van asociadas a aquellos conocimientos que el docente no se enseña a sus estudiantes y sin embargo, son exigidos por alguna

razón injustificada. No es posible, tener un proceso didáctico para este tipo de fenomenologías.

El fenómeno descrito anteriormente afecta también, en cierto sentido, a la gestión didáctica de algunos registros ostensivos, debido a su difícil consideración como parte integrante de la actividad matemática (Bosch, 2000, Bosch, M. & Chevallard, Y. , 1999).

Teoría de las Situaciones Didácticas

Brousseau (1986, 1999), propone el modelo pensar en la enseñanza de la matemática como un proceso ajustado a la producción de conocimientos matemáticos en el salón de clases. Esta enseñanza, concebida como una relación existente entre el sistema educativo y el alumno a través de la transmisión de un saber dado, surge de ella; una relación didáctica que se interpreta como una comunicación de informaciones.

Si enseñanza es una relación entre sistema educativo y alumno, la relación entre el alumno y su medio para generar un conocimiento recibe el nombre de situación. Una situación también puede ser el resultado de la adquisición de conocimientos anteriores como también, la posibilidad de construir el propio conocimiento.

En los inicios de los años 70, aparecen las llamadas *Situaciones Didácticas*, consideradas como aquellas situaciones que sirven para enseñar sin considerar el rol del docente. Dichas situaciones, ya empiezan a tomar una posición dentro del contexto educativo y se constituyen como herramientas. Más adelante, empezaron a llamarse *situaciones matemáticas*, para referirse a aquellas que dan lugar a una actividad matemática en el alumno sin la intervención del docente. La pregunta que surge en estos momentos es la siguiente: ¿En qué momento interviene el docente? A partir de aquí, surgió las llamadas *Situaciones Didácticas*, en donde se le otorgó la oportunidad de la intervención tanto del docente como del alumno en el evento pedagógico.

Brousseau (2007), establece que desde las perspectivas de la teoría de las situaciones, los alumnos se convierten en los reveladores de las características de las situaciones a las que reaccionen, es decir; esas características son los conocimientos que pueden darse a partir de dichas situaciones y variar a partir del aprendizaje.

Por otro lado, una situación puede permitirle al estudiante o sujeto evolucionar, y puede hacerlo hasta tal punto, que puede ser el fruto de nuevas preguntas y respuestas, cuyo proceso se ha calificado como *dialéctica*.

Situación didáctica, situación adidáctica, situación fundamental

Se habla de *Situación adidáctica* para referirse a aquella situación en la que el docente provoca al estudiante, tomando como referencia la elección de un determinado problema y su respectiva adaptación. En esa adaptación, se pretende que el estudiante desarrolle independencia y autonomía, sin que el docente intervenga en el proceso. Dicha autonomía, ayude a la adquisición de un conocimiento y que pueda usarlo en situaciones externas al aula de clase.

En cuanto a la situación fundamental, tiene que ver con lo que el estudiante es capaz de aprender sin intervención del docente, pero se le debe brindar la comunicación respectiva hasta que logre la independencia.

La comunicación didáctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La importancia de determinar parámetros o ejes de validación en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se hace cada vez necesario en los distintos escenarios, porque permite generar rutas de cercanía entre el conocimiento que el docente proporciona y la forma en que el estudiante lo adquiere.

En el caso de Matemáticas, muchos de esos parámetros están ligados a la forma de cómo el docente se comunica con sus estudiantes y la didáctica que utiliza el maestro para una mejor comprensión de la disciplina. Hay pedagogos que definen la comunicación como un acto de voluntad. Por otro lado, (Cabero, 2001), añade que, en todo proceso de comunicación humana, nada pasa de emisor a receptor sin que sea transformado en el proceso. En matemáticas, por ejemplo, debido a su formalismo simbólico se hace necesario transformar ese lenguaje en uno que el estudiantado pueda comprender y hacer uso de él en las distintas situaciones de la vida cotidiana. Lo anterior tiene una directa relación con las acciones, lo que Hernández-Suárez, C. A., Prada-Núñez, R., & Gamboa-Suárez, A. A. (2017) denominan acción comunicativa.

La comunicación siempre ha sido un elemento muy importante en el aprendizaje de los jóvenes y principalmente el problema se acrecienta cuando el docente en este caso, no sabe o se le dificulta comunicarse. Según Ponte, J. P. D., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., ... & Viseu, F. , (2007), "cuando la matemática se considera un conjunto de verdades absolutas, la comunicación en el aula de clase será un proceso lineal". En otro caso, cuando la matemática se asume como proceso de

construcción cultural, la comunicación se convierte en un proceso de interacción y de negociación de significados entre quienes intervienen en la clase. Lo anterior apunta a que la comunicación definitivamente desempeña un rol primordial en el aprendizaje de los estudiantes, ya que de esa manera pueden comprender mucho mejor todos los conceptos básicos de la disciplina y evitar cualquier tipo de desmotivación en el aprendizaje de ella.

Por otro lado, la didáctica del docente se convierte en un elemento primordial en el proceso. Entendida ésta última como "la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando". En la actualidad en el aspecto didáctico como estrategia de enseñanza del docente debe ser un factor cambiante y modificable ya que la realidad ha sido transformada por toda la tecnología que a diario surge. El docente debe adaptarse a dichos cambios porque se deben tomar en consideración las posibles ideas previas, concepciones alternativas y dificultades de los estudiantes y partiendo de ahí, que la didáctica debe desarrollarse a plenitud.

"La mayoría de los profesores y estudiantes consideran el contenido, no como un modo de pensar, sino como una secuencia de información que ha de ser <cubierta> rutinariamente y depositada en la memoria". Lo anterior, permite deducir que el docente puede implementar la didáctica de la pregunta en matemáticas y eso contribuirá a una mayor por parte del estudiantado, un acercamiento notable y una comunicación más amena entre docente - alumno. Es así como la didáctica desempeña un rol importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por otro lado, Freire (1997): "Creo que es necesario desarrollar una pedagogía de la pregunta, porque lo que siempre estamos escuchando es una pedagogía de la contestación, de la respuesta. De manera general, los profesores contestan a preguntas que los alumnos no han hecho. En la actualidad se observa aún, las metodologías tradicionales, al docente que se resiste al cambio y entra en la equivocación de no saber realizar preguntas que generen un acto pedagógico más participativo, sino en cambio convierte el escenario de aprendizaje en uno más pasivo y frío.

Por último, hay claridad de que no se puede hablar de comunicación y didáctica por separado sino de comunicación didáctica, lo cual juega un rol determinante en la

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a pesar de constituirse en un proceso complejo, el docente debe ser muy creativo y ante todo tener el ánimo y la buena disponibilidad para motivar a sus estudiantes, y eso lo puede lograr a través de un lenguaje propicio y con las mejores estrategias metodológicas que pueda adoptar en el desarrollo de su disciplina. Así mismo, no debe olvidar el docente lo importante que es de apoyarse con las nuevas tecnologías, ya que hoy día el joven está rodeado de un mundo y sociedad informativa, dónde tiende a motivarse más por ese lado que ver todo un tablero lleno de fórmulas o símbolos que al final su opinión será: "esto no me va a servir para nada ...", todo esto; le permite al docente estar un poco más despierto frente a este tipo de expresiones dadas por los estudiantes, y es donde con más razón debe ser por obligación un epistemólogo de su disciplina.

Hay muchas preguntas que en torno de la comunicación se podrán plantear cómo estas:

¿Es posible que las herramientas tecnológicas desplacen el habla? ¿La escritura? ¿No es necesario aprender la ortografía? ¿Los problemas matemáticos ya no son necesarios resolverlos, ya están resueltos gracias a los equipos tecnológicos?

La adaptación de las situaciones a los alumnos: la optimización

Para el caso de la actividad matemática, es importante la utilización de recursos o herramientas para resolver situaciones problemas. Antes de la aparición de la tecnología, era fundamental el lápiz y el papel como elementos propicios de trabajo. Posteriormente, con la aparición de la tecnología, esos recursos han pasado a un segundo plano y el uso de otras herramientas como calculadoras, computadores, entre otros, han sido muy determinantes no solo en el aula sino en las investigaciones a nivel científico.

La adaptación de los alumnos a las situaciones: los saltos y los obstáculos

La noción de obstáculos epistemológico fue introducida por el filósofo y epistemólogo Gastón Bachelard dentro del libro publicado en 1938 y titulado: "La formación del espíritu científico" (G. B. , 1938).

En su libro además identifica, a partir de ejemplos históricos, capítulo a capítulo, algunas categorías generales de obstáculos: la primera experiencia, el conocimiento general, el obstáculo verbal, la utilización con abuso de las imágenes familiares, el

conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo substancialista, el obstáculo realista, el obstáculo animista, el que está al final del conocimiento cuantitativo.

Es necesario señalar sin embargo que Bachelard aparta explícitamente las matemáticas de sus propósitos. Ellas escapan según él a este tipo de funcionamiento y al respecto escribe (Closset, 1983):

Realmente, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce los periodos de estancamiento. Ella no conoce los periodos de errores. Ninguna de las tesis que sustentamos en este libro apunta hacia el conocimiento matemático. Ellas no tratan sino del conocimiento del mundo objetivo.

Artigue (2018), cree que el primer texto de didáctica de las matemáticas en el cual apareció la noción de obstáculo epistemológico, fue aproximadamente en el año 1976 por G. Brousseau, donde establece lo siguiente:

El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como lo creemos de acuerdo a las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos son establecidos como obstáculos. Adicionalmente dentro del funcionamiento del maestro y del estudiante, el error se constituye como el sentido del conocimiento adquirido.

Hay un apunte muy importante, y al hablar de aprendizaje como medio de adaptación en una situación problémica, la didáctica tiene como objetivo principal es justamente *estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o problemas propuestos al estudiante para favorecer la aparición, el funcionamiento y el resultado de esas concepciones sucesivas* (Artigue, Epistemología y didáctica. El cálculo y su enseñanza, Enseñanza de las ciencias y la matemática., 2018). En ese objetivo planteado, indudablemente se pensaría, en una buena escogencia de situaciones para que el estudiante se enfrente a ellas, ya que la idea es que se logre avances significativos en el proceso, pero también debe depender de lo que el maestro o docente, quiera conseguir en dicho proceso. Es a partir de ahí, donde la didáctica toma relevancia, con el aporte de

todas las herramientas necesarias para que dicho estudiante avance y no se estanque en la producción de conocimientos.

En el texto, G Brousseau distingue tres orígenes fundamentales de los obstáculos que se encuentran en la enseñanza de las matemáticas:

- *Un origen ontogenético*, correspondiente a los obstáculos unidos a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes comprometidos dentro del proceso de enseñanza.

- *Un origen didáctico* para los obstáculos ligados a las opciones del sistema de enseñanza.

- *Un origen epistemológico*, finalmente, para los obstáculos relacionados a la resistencia a un saber mal adaptado, es decir los obstáculos al sentido de Bachelard.

Lo anterior se tomó como referencia, ya que para el didáctico es fundamental la identificación de un obstáculo, ya que de esa manera puede desarrollar un conocimiento. Un conocimiento, que no esté rodeado de atascos, sino por el contrario de retos que el mismo maestro pueda provocar en el estudiante.

Brousseau conceptualiza *obstáculo epistemológico* acercándose a las causas que conducen a errores: “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado”. De este modo, al mencionar obstáculo epistemológico, este autor no se refiere necesariamente a conocimientos erróneos; sino a tipos de conocimiento que están obstaculizando la adquisición (construcción) de uno nuevo.

Con este aporte, aunque no se utiliza la palabra “fracaso” sino el conseguir o no el éxito, es un factor fundamental para entender el término *error*. Error no es ignorancia, es un conocimiento que no ha sido obtenido de una mejor forma, o de la forma correcta, ya sea por innumerables factores o hechos, que suelen presentarse a lo largo del acto pedagógico.

Idoneidad Didáctica

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados

personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones (Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. , 2007): idoneidad epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

Importancia del estudio de los obstáculos epistemológicos en la Didáctica de las Matemáticas

La noción de obstáculo está en camino de constituirse y diversificarse, no es fácil expresar generalidades pertinentes acerca de este asunto.

Sin embargo, Duroux (1982) y Brousseau (1986) precisaron las condiciones que debería satisfacer un conocimiento para poder ser declarado un “obstáculo” en el sentido de Bachelard y explican el interés de este concepto, que conviene distinguirlo del de “dificultad”:

- Un obstáculo es un conocimiento.
- Un obstáculo tiene un dominio de “validez”.
- Un obstáculo resiste y reaparece.
- Un obstáculo es constitutivo del saber.

Artigue (2018) agrega en sus aportes que *un obstáculo se manifiesta por los errores que no son debidos al azar*. En atención a lo anterior, un error no puede ser resultado de alguna estructura al azar, sino de algo natural que surge en el momento que se adquiere un aprendizaje dentro de la enseñanza. No son casualidades, son conocimientos inexactos que el estudiante genera y donde el maestro o docente debe aprovecharlo para el fortalecimiento de lo que verdaderamente el estudiante aprende.

Es claro también, que un obstáculo no sinónimo de dificultad, es un conocimiento que tiene un cierto dominio validez y como se afirmó anteriormente, errores que aparecen de manera no acertada en la producción del conocimiento.

La concepción del aprendizaje que se apoya en el estudio del desarrollo de los conocimientos en términos de obstáculos difiere sensiblemente de la concepción clásica, sobre todo en lo que concierne al rol y a la organización de situaciones problema. Aquí el problema va a jugar un papel fundamental.

Referentes Teóricos

La educación matemática

Cuando se habla de Matemáticas en la universidad se tocan muchos temas; topología, álgebra abstracta, probabilidad, geometría, pero muchas veces se deja de lado un tema fundamental que no es muy apreciado por los mismos matemáticos, y es la educación Matemática. La educación matemática es definida por Rico, Sierra y Castro (2000) como un sistema de conocimientos y de instituciones con la finalidad social de fomentar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La educación matemática es un área de las matemáticas que está en contacto con diversas áreas de las ciencias sociales, como la sociología, la psicología y la filosofía, debido a su relación con los procesos de conocimiento y la sociedad.

¿Cuál es la meta que busca llevar a los genios matemáticos que se preocupan por transmitir su sabiduría a otras generaciones y fomentar el gusto que tenemos por las matemáticas? Lamentablemente, no muchos matemáticos se sienten motivados por este camino de la pedagogía, y esto también se debe a la percepción generalizada de que los matemáticos son difíciles, aburridos y más allá de la comprensión, entre otras cosas. Sin embargo, por la misma razón, es crucial centrarse en los matemáticos en la parte pedagógica (Buñuel, 2020).

En particular, dada la influencia y el papel central de las matemáticas en otras áreas del conocimiento y en determinadas tareas, la educación matemática es un campo de estudio fundamental en la productividad y la participación de la economía, porque es de primordial importancia para la formación y la productividad de los estudiantes, esa gente, las personas que crean (y crearán) naciones tienen plataformas de trabajo sólidas. Por lo tanto, la educación matemática juega un papel importante en los países en desarrollo porque proporciona acceso real y de alta calidad a otros campos de estudio, especialmente ciencias y trabajos afines híbridos en general.

La educación matemática se extiende desde los primeros conceptos de cantidad, forma y razonamiento que se enseñan a los niños hasta que culmina en la formación profesional o la educación superior.

La educación matemática requiere una intensa actividad intelectual, ideas de interpretación basadas en la apreciación de la belleza formal. La evidencia y los

argumentos se presentan de diversas maneras, tales como: actividades, terminología, símbolos, métodos, relaciones y recursos. Así mismo, tener matemáticas con una estructura humana, implica que se utilice con fines de modelado de ingeniería en nuestro entorno y para resolver problemas reales (Restivo, 1992).

La educación matemática implica el dominio de conceptos y procesos, transferencia de conocimientos y organización de amplias áreas de actividad intelectual, científica, económica, cultural y social. Las matemáticas son un lenguaje de la ciencia y da una forma objetiva a muchos problemas, facilitando un problema importante razonable antes de tomar una decisión (Skovmose, 1994).

Se mira la educación matemática desde la perspectiva de un experto, como un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y en general actividades relacionadas con la construcción, presentación, comunicación y evaluación y donde la cognición matemática ocurre intencionalmente (Rico, L.; Sierra, M. y Castro, E., 1999). La educación matemática la imparten especialistas específicos en instituciones específicas y con mandatos específicos, de igual forma, contribuye a dar respuestas a los problemas y necesidades que surgen de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Enseñar matemáticas es a la vez una actividad social y una actividad científicamente. El primer ámbito donde esta actividad científica es importante es enseñar tu propia ciencia. Se necesita entrenamiento para aprender matemáticas de la personalidad. Cada persona debe adquirir capacidad de gestión sistemas de representación matemática y sus operaciones. La educación obligatoria proporciona educación científica básica para todos los ciudadanos:

“Uno de los principales objetivos de la educación científica es adquirir conocimientos por parte de los estudiantes, que sean capaces de demostrar un espíritu apropiado de conocimiento científico. Estas ideas no son sólo lingüísticas: no basta con tener conceptos o memorizar las leyes básicas de una teoría particular, pero es lo que se ha aprendido: las causas de estas teorías, así como los métodos de escritura, observaciones, mediciones, cálculos y experimentos relacionados con el mismo.

La adquisición de representaciones está sometida a un proceso de normalización; no se trata de una actividad exclusivamente individual, sino que está profundamente

mediatizada por la sociedad. Ésta determina, al menos en la enseñanza reglada, los contenidos tecnocientíficos a enseñar y el orden de su presentación. A continuación, evalúa e interactúa con el individuo a través de sus agentes docentes, dilucidando su mayor o menor competencia, al par que, corrigiendo, motivando y, en general, normalizando las representaciones mentales que el sujeto individual se haya hecho de las teorías." (Echevarría, 1995, pp. 60-62).

Enseñar matemáticas es a la vez una actividad social y una actividad científica. El primer ámbito donde esta actividad científica es importante es enseñar tu propia ciencia. Se necesita entrenamiento para aprender matemáticas por parte de cada individuo. Cada persona debe adquirir capacidades para el manejo formas de representación matemática y sus operaciones. La educación obligatoria proporciona educación científica básica para todos ciudadanos:

"Uno de los objetivos básicos de la enseñanza de la ciencia es la adquisición por parte de los estudiantes de representaciones mentales adecuadas de conocimientos científicos previos. Dichas representaciones no sólo son lingüísticas: no basta con poseer los conceptos o saberse de memoria las leyes básicas de una determinada teoría, sino que hay que haber interiorizado el porqué de dichas teorías, así como las técnicas de escritura, observación, medición, cálculo y experimentación que van ligadas a la misma". (Echevarría, 1995).

Desde esta perspectiva, la educación matemática como campo científico reúne todas las investigaciones relacionadas con la educación matemática y, debido a su gran extensión, se divide en muchos otros campos de estudio que sirven entre sí a las áreas de investigación mencionadas a nivel nacional e internacional. Por tanto, quienes trabajan en el campo de la educación matemática tienen que realizar una serie de tareas relacionadas con llevar a cabo, con toda la complejidad asociada, la transmisión del conocimiento matemático en la sociedad de nuestra modernidad. Estos deberes incluyen, entre otros: enseñar matemáticas, promover el aprendizaje de los estudiantes, evaluar el aprendizaje de los estudiantes, desarrollar y evaluar materiales de instrucción, escribir libros de texto y otros recursos, otros materiales escolares, preparación docente y difusión de experiencias de aprendizaje, colaboración con la investigación y la innovación docente.

¿Qué significa investigar en Educación Matemática?

Las actividades de investigación en educación matemática se ven facilitadas por el desarrollo de la “investigación en educación”; Se consolidó como un campo de estudio que poco a poco evolucionó hasta ganar un posicionamiento desde una perspectiva científica más que filosófica.

La educación matemática ha alcanzado un nivel de madurez que le permite afirmar su identidad en el contexto de las ciencias sociales; Además, puede limitar el espacio de los problemas que son esencialmente suyos, ha logrado decantar los abordajes metodológicos pertinentes y adecuados para la indagación de dichos problemas, en una perspectiva que es pluriparadigmática (González F. , 2004).

La creciente preocupación de matemáticos y educadores sobre qué se enseñan en matemáticas en las escuelas, cómo se enseñan y qué se debe enseñar, se ha convertido en un gran motivo para la formación e identificación de problemas en esta área de estudio e investigación, de igual forma, el descubrimiento de métodos adecuados de sensibilización e intervención. Así, a través de una investigación metódica, intentar dar respuesta a cuestiones específicas de su campo, abriendo las fronteras del conocimiento a la crítica y, a la confrontación e incluso la refutación (Kilpatrick, 1995).

Cuando se habla de investigación en educación matemática, es necesario describir, al menos en términos generales, algunas de las tendencias relacionadas con perspectivas paradigmáticas y metodológicas que han surgido en el campo y reflejan lo sucedido con la investigación en el campo educativo.

Las actividades de investigación científica, está basada por referentes circunscriben a un enfoque u otro, en función de su naturaleza y características. Este enfoque está representado por el llamado paradigma de investigación. “Un paradigma representa una matriz disciplinaria que abarca generalizaciones, supuestos, valores, ciencias y ejemplos corrientemente compartidos, de lo que constituye el interés de la disciplina” (Molina, 1993, p.18).

La investigación en educación matemática tiene componentes cuantitativos y cualitativos; hay asuntos que se abordan desde una perspectiva interpretativa o hermenéutica y otras que son centrales a sus preocupaciones y explicaciones empíricas, que pretenden llegar a conclusiones sobre el grado o proporción correspondiente a las

hipótesis. En cualquier caso, supone un fundamento teórico sólido. Según Font (2007), la didáctica de las matemáticas reúne las condiciones para considerarse un área de investigación con características científicas:

Los diversos enfoques que se han propuesto en la Didáctica de las Matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) Una metodología de investigación (Font, 2007, p.7).

En la misma línea, Rico ha afirmado que: “La educación matemática necesita un marco teórico estructurado que permita contextualizar toda la investigación, como pudo hacerse para la investigación en matemáticas” (Puig, 1997, p.52). Esto pudo significar que los profesores están algo alejados de la investigación y sus resultados, pero también la investigación está algo alejada de la práctica docente.

Las preocupaciones sobre controversias y retos de la educación matemática, que se traduce en investigación, son el resultado de identificar las problemáticas, en términos de perspectivas y basadas en teorías y enfoques; y matizadas con posturas epistemológicas, sociológicas, psicológicas, antropológicas, ideológicas y culturales de la matemática, dando significado y trascendencia a los abordajes intencionales de los ambientes escolares y a la reflexión pedagógica (Rico, 2012, p.6; Gómez P. , 2000, p.p. 3-5). Son diferentes las miradas que se hacen al respecto, de acuerdo con las concepciones e imaginarios de los investigadores.

Importancia de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática a nivel universitario

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario es ahora un campo de estudio maduro. Actualmente, estos estudios no se centran únicamente en la transición de la escuela secundaria a la universidad ni examinan la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de la universidad. Sin dejar de lado estas preocupaciones centrales, la investigación se ha ampliado para incluir el aprendizaje y la enseñanza de matemáticas más avanzadas, el papel del uso de modelos y la interdisciplinariedad en la educación matemática, y cómo los estudiantes de

diferentes disciplinas aprenden matemáticas de manera diferente y cuestiones relacionadas con lo anterior (Trigueros, M., & Sánchez-Matamoros-García, G. , 2022).

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario es ahora un campo de estudio maduro. Actualmente, estos estudios no se centran únicamente en la transición de la escuela secundaria a la universidad ni examinan la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de la universidad. Sin dejar de lado estas preocupaciones centrales, la investigación se ha ampliado para incluir el aprendizaje y la enseñanza de matemáticas más avanzadas, el papel del uso de modelos y la interdisciplinariedad en la educación matemática, y cómo los estudiantes de diferentes disciplinas aprenden matemáticas de manera diferente y cuestiones sociales relacionadas.

Según Trigueros, M., & Sánchez-Matamoros-García, G. (2022), hoy en día, muchas disciplinas que se imparten en las universidades requieren conocimientos matemáticos. La búsqueda de nuevos métodos de enseñanza de matemáticas a estudiantes con diversos intereses y las oportunidades que ofrece la tecnología digital ha contribuido al surgimiento de investigaciones que se centran en las necesidades de estudiantes y profesores, además de motivar a los estudiantes, y también ayudarlos a comprender el papel de matemáticos en distintos campos de estudios y comprender las limitaciones que implica la realización de esta tarea.

En el caso de la educación superior, los profesores son responsables de desarrollar un programa de análisis de materias y, sobre esa base, asignar la enseñanza según temas y actividades. Además, el profesor es responsable de evaluar de manera sistemática, individual y al final del semestre los resultados de aprendizaje de los estudiantes y específicamente en los temas desarrollados. Para ello elabora proyectos de evaluación en función de su periodicidad, lo que le permite obtener una valoración de los resultados del aprendizaje. La imagen del docente emerge como aquel componente al que la sociedad, a través de la institución educativa, ha dotado de autoridad para conducir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en función de coadyuvar a la formación integral de los estudiantes con los que interactúa (Naveira Carreño, W. J., & González Hernández, W. , 2021) .

Lo anterior, permite afirmar que, a través de sus acciones, los profesores deben crear las condiciones necesarias para que el proceso de aprendizaje se lleve a cabo dentro y fuera del aula. Es él quien regula el comportamiento del grupo, y especialmente de los estudiantes, durante la clase. Además, son responsables de colocar al estudiante en el centro del proceso y garantizar que prospere.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior presenta diversas características que lo distinguen del proceso que transcurre en otros niveles educativos, aunque muchas de ellas se mantienen. Estas características surgen a partir de la manera en que se relacionan sus componentes tanto personales como personalizados. Algunas de estas relaciones han sido abordadas por los autores Addine, F., & García, G. (2004). Sin embargo, al asumir la subjetividad histórico-cultural como fundamento psicológico deben enfatizarse en relación particular del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

La asignatura de Cálculo

La enseñanza del Cálculo tiene importancia histórica marcada por una trayectoria reflejada en el fracaso y abandono estudiantil en el contexto a nivel internacional (Barufi, 1999 y Vitelli, 2012).

Sin embargo, este hecho puede verse influenciado por muchos factores, como la formación académica, situaciones familiares, así como los conocimientos previos sobre el tema (Santos, 2014). Respecto a este tema, las investigaciones muestran que una de las causas de esta situación es que los estudiantes no se interesan por sus estudios e ingresan a la universidad con una grave deficiencia en este tipo de materias, donde se requiere álgebra, trigonometría, aritmética y otros conocimientos matemáticos (Cavasotto, 2010).

La realidad del Cálculo como se mencionó anteriormente se muestra de manera preocupante, no sólo a estudiantes y docentes sino también a las autoridades educativas, porque tal escenario de fracaso puede llegar a comprometer todo un sistema, es decir, la continuidad de la visión académica y pedagógica, así como los indicadores de calidad universitaria. Según (Vitelli, *Evasão Em Cursos De Graduação: Fatores Intervenientes No Fenômeno.*, 2012), la tasa de deserción y fracaso académico en las universidades brasileñas ronda el 70%. Según (Barufi, 1999), las tasas de fracaso oscilan entre el 30%

y el 80%. Molon (2013) reporta que en una determinada institución estos indicadores promedian el 60%.

Los datos anteriores, obligan a considerar la complejidad de los múltiples factores que influyen en la asignatura de cálculo en su ámbito institucional y dentro del trabajo en el aula, ya que estos resultados reflejan contextos de aprendizaje y enseñanza y toma de decisiones en las instituciones de educación superior.

Mientras escribía su tesis doctoral, Rezende (2003) encontró que el problema del Cálculo I era mucho más serio, ya que es de origen epistemológico. Este autor cree que esta es una de las razones de un alto índice de fracaso, marcado por la deserción y la reprobación. Para Rezende (2003), esta cultura alienta a los estudiantes de menor rango a continuar en la escuela, mientras que los estudiantes con puntajes altos y resultados deseables son considerados “excelentes” por el público y los maestros continúan cumpliendo este papel tradicional y unilateral.

Entre las áreas de investigación de la educación matemática, se centra el interés principalmente cuando se hablan a nivel universitario. Cada vez más son las investigaciones que buscan el foco de interés en este nivel, y especialmente el papel de la didáctica en la enseñanza matemáticas universitarias. La realidad es que los intereses de los estudiantes están cambiando gradualmente. Para los profesores, o al menos para ambos, el foco de atención obliga a los investigadores a cuestionar la orientación de sus investigaciones, así como la complejidad del tema en sí. Esta complejidad proviene no sólo de la especificidad de profesores y estudiantes, sino también de la propia materia, cada vez más abstracta y formal, así como de la especificidad de la universidad como institución que condiciona, limita y determina los límites de actuación en ella (Moreno Moreno, 2005).

La investigación didáctica a nivel universitario no es nueva. Tal como lo mencionó Artigue (2003), esta ha estado realizándose durante más de 20 años. Una época en la que, además de intentar comprender mejor las dificultades de los estudiantes y las disfunciones del sistema educativo, también se intentó encontrar formas de superar estos problemas.

Los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas a nivel universitario tal vez se centran en prácticas algebraica y algorítmica que eventualmente se convertirán

en hábitos (Artigue, 1995; Yusof, M. y Tall, D. , 1999) y a menudo intentan introducir métodos tradicionales de demostraciones matemáticas (Yusof, M. y Tall, D. , 1999). Los profesores evalúan de manera similar competencias que los estudiantes adquieren en esta área de algoritmos y álgebra, muchas veces basados en ejercicios iguales o similares a los presentados en clase, ejercicios que constituyen respuestas exactamente la misma forma de pensamiento.

Para Harel, G. y Trgalová, J. (1996), se considera el panorama contemporáneo de la investigación educativa en el campo del cálculo, en el que se puede distinguir tres ejemplos de tres nuevos métodos para enseñar el cálculo y, representar los movimientos cambiarios actuales en todo el mundo:

El primero de ellos, al que se refieren los autores, se llama "Proyecto de Cálculo en Contexto" (1987), en el que participó la Universidad de Massachusetts. La idea básica es que el cálculo es un lenguaje (el lenguaje de la ciencia), una red de conceptos y un conjunto de métodos útiles. El objetivo principal del proyecto es ayudar a los estudiantes a construir las matemáticas a través de sus aplicaciones y comprender las relaciones entre todos los elementos que componen el cálculo. La formación está organizada de manera que se discutan principios generales derivados de problemas y situaciones de la vida real. Los estudiantes trabajan en grupos pequeños y los problemas se resuelven primero numéricamente usando computadoras, luego se desarrollan métodos para obtener soluciones analíticas (O'Shea, D. y Senechal, L. , 1992).

Este formato presenta otro nuevo enfoque para la enseñanza del cálculo como lo es "El Proyecto Debate Científico" (Legrand, 1992) y su principal objetivo es garantizar que los estudiantes trabajen como matemáticos, introduciendo varios conceptos, como cálculo diferencial en el contexto de problemas científicos. Los estudiantes hacen preguntas y dan sugerencias, hacen suposiciones, sacan sus propias conclusiones dependiendo de la exactitud y validez de dichas suposiciones, y discuten y debaten sus puntos de vista con sus compañeros. El mayor obstáculo educativo de este proyecto es el conflicto entre el enfoque científico y los hábitos de estudio. creados por instituciones educativas.

El tercer enfoque novedoso al que se refieren los autores es el propuesto por Artigue y sus colaboradores (Artigue 1989, 1991, 1992, 1994; Alibert, A.; Artigue, M. et al. ,1989;

Artigue, M.; Menigaux, J. y Viennot, L. , 1990; Artigue, M. y Rogalski, M. , 1989) quiénes desarrollaron un modelo teórico y de enseñanza denominado ingeniería didáctica.

Finalmente, debido a que este es un ejemplo de investigación que tiene implicaciones para la enseñanza, es importante destacar la interesante contribución del profesor Gómez (2000) al trabajo sobre modelo de nivel universitario. Este estudio fue realizado en el contexto de la educación matemática para futuros ingenieros de la Escuela Politécnica de Vilanova i la Geltrú.

Uno de los objetivos del trabajo fue analizar la viabilidad de introducir elementos nuevos de aprendizaje, como es la modelización, y diseñar un curriculum innovador, mejorando y evaluando el proceso de aprendizaje (Moreno, 2005).

Didáctica en la enseñanza de la matemática

Antiguamente, la gente pensaba que enseñar matemáticas era un arte, por lo que era difícil analizar, controlar y seguir las reglas. Se cree que el aprendizaje depende únicamente del dominio que tenga el docente de lo que se enseña y la capacidad del estudiante para facilitar su autoformación. Esta idea todavía domina la cultura contemporánea y sigue siendo un “concepto” de enseñanza precientífico muy popular, que tiene un impacto en la cultura escolar (Gascón, 1998).

Es una visión un tanto "mágica" al considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la cual se fue desarrollando a medida que aumentó el interés por comprender y explicar los hechos didácticos. Así, desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina, se estableció una perspectiva que se llamó enfoque clásico (Brousseau, 1997) - que rompe con esta visión mágica y ve el aprendizaje en general y las matemáticas en particular, como un proceso psico-cognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales, emocionales y sociales.

Nuevas perspectivas sobre la enseñanza de las matemáticas, la didáctica fundamental, nació justo en el momento en que Brousseau tomó conciencia por primera vez, la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo específico de la actividad matemática, teniendo esto en cuenta que los modelos epistemológicos convencionales no estaban diseñados para adaptarse a ellos. Históricamente esto es correcto, las primeras formulaciones de la teoría de las situaciones didácticas, cuyo contenido se publicó a principios de los años 1970 (Brousseau, 1972). En esto se basa de hecho, en

los principales principios metodológicos de la teoría de las situaciones: definir un “conocimiento matemático” por medio de una “situación”, es decir un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite alcanzar una resolución óptima (Brousseau, 1994).

Con mayor precisión, se llama situación fundamental (correspondiente a un conocimiento matemático concreto C) a un conjunto mínimo de situaciones adidácticas (Específicas de C) que permite crear y manipular los valores de aceptación como son sus variables didácticas, problemas bastante amplios como para asegurar un buen rendimiento C relacionado con C en la institución didáctica en cuestión. Por lo tanto, sobre la teoría de situaciones, las actividades matemáticas de la escuela se modelan sobre la base del concepto de "situación fundamental ", así como con la ayuda de este concepto, porque en cada caso, se determina "aprender el conocimiento matemático C" en una institución didáctica (Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J., 1997).

La didáctica de las matemáticas no se enmarca solamente en la epistemología, entendida como la ciencia del origen y la estructura del conocimiento matemático, sino que también abre oportunidades para explorar los aspectos didácticos de todo tipo de operaciones institucionales de las matemáticas y asumir nuevas responsabilidades científicas, especialmente desde una perspectiva docente. De hecho, la didáctica debe encargarse de desarrollar y comparar empíricamente los modelos de actividad matemática que necesariamente utiliza (Gascon, 2001).

En definitiva, podría decirse que el paso de una perspectiva clásica a una didáctica fundamental abre un nuevo programa de investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas (Lakatos, 1978), que, a pesar de cambiar el objeto primario de investigación, abarca ampliamente toda la problemática didáctica clásica, puesto que permite reformular sus problemas, plantear y resolver muchos más. Este descubrimiento condujo a una expansión inesperada del área de investigación en la didáctica, incluyendo las prácticas matemáticas escolares, no como un objeto más entre otros, sino como el objeto primario de investigación, donde en cierto sentido, el aprendizaje depende de todos los demás.

Así, la problemática didáctica se sitúa dentro del marco epistemológico de las matemáticas, al mismo tiempo provocando la antropologización de la epistemología, para encajar en el “estudio de un matemático”. Así surgió la antropología de las matemáticas

como extensión de la "epistemología de las matemáticas", que sólo se ocupaba de la creación del conocimiento matemático. En esta antropología matemática surge (antropología) didáctica de las matemáticas (Chevallard, 1990).

Importancia de la enseñanza del contenido del límite de una función en educación universitaria, en la formación de profesionales.

De acuerdo a los lineamientos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación en Colombia (MEN, 2006), se distinguen cinco procesos importantes del que hacer matemático: formular y resolver problemas, modelar fenómenos del contexto, comunicar, razonar, formular y ejercitar procedimientos y algoritmos, estos procesos en sus diferentes niveles son los requeridos para que un estudiante desarrolle habilidades y sea matemáticamente competente, estos estándares a su vez están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático: el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional.

En el pensamiento variacional están presentes en la diversidad de los procesos de cambio, conceptos de variables, el cual requiere de diferentes sistemas: el sistema numérico para registrar cambios numéricamente, el sistema algebraico como una forma y modelo representativo y del sistema geométrico para representar gráficamente el fenómeno de variación, entendiéndose por variación como el proceso de cambio, el cual conlleva al individuo a un pensamiento dinámico, según Vasco (2003), el pensamiento variacional se refiere al proceso de pensar de manera dinámica para poder percibir lo que cambia y lo que se mantiene constante, para que luego sea posible llegar a un proceso de modelación bajo el esquema de relaciones numéricas y transformaciones con sus correspondientes clasificaciones y representaciones algebraicas y gráficas.

Aprender la definición de una función de variable real como una relación entre dos variables numéricas x e y , hablar sobre el dominio o codominio de una función, dibujar sus representaciones gráficas o memorizar un conjunto de fórmulas relacionadas al concepto de límite, sus reglas o valores de reemplazo en expresiones algebraicas, no significa que los estudiantes realicen procesos de estímulo para el desarrollo del pensamiento variacional, si no, esto se convierte en un obstáculo (Vasco, 2003).

Cuando se utilizan sistemas geométricos y espaciales no garantiza el desarrollo del pensamiento variacional, pero; lo sí está claro es que en los sistemas de representación

se manipulan diferentes objetos, unos en el plano cartesiano en forma de gráficas estáticas (sin movimiento ni cambio), otros son las ecuaciones, las funciones, etc., objetos que por ellos mismos a veces no definen el concepto de variación y no le permite comprender el concepto de límite o de la derivada de una función específicamente; por supuesto este pensamiento variacional está vinculado al sistema numérico, el sistema espacial y el sistemas métrico, pero el desarrollo del pensamiento variacional se ve con más cuidado, esto se debe a la conciencia, con las relaciones, con la identificación de la variación y el cambio en diferentes contextos (Mendoza, 2017).

La noción de límite, indudablemente, necesita la construcción de conceptos matemáticos, teoremas y principios básicos para resolver problemas. Sin embargo, en el proceso educativo, debería fundamentarse en fenómenos que experimentan cambios constantes. Esto implica llevar a cabo un registro numérico que permita analizar la variación del fenómeno y, posteriormente, avanzar hacia la modelación. Esto se complementa con los teoremas y conceptos fundamentales necesarios para mantener la integridad matemática.

En este contexto, se trata de desarrollar un tipo específico de razonamiento que permita analizar situaciones que involucren el cambio, las aproximaciones numéricas y la representación mediante funciones $f(x)$ de una variable real. Es evidente que esta estrategia requiere una inversión de tiempo considerable en la interacción directa con los estudiantes, considerando tanto el contenido como los conceptos. La enseñanza se vuelve aún más compleja al abordar la derivada a partir del concepto de límite, un proceso que resulta desafiante para los estudiantes, especialmente al tratar la derivada de funciones elementales (trigonométricas y exponenciales) basándose en el concepto de límite, según lo señalado por Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., & Font Moll, V. (2012).

La comprensión del concepto de límite presenta desafíos significativos para los estudiantes y es fundamental en el proceso de aprendizaje del Cálculo, ya que otros conceptos como continuidad, derivada, integral y serie se basan en él. Esta situación respalda la importancia de cualquier esfuerzo dirigido a lograr un aprendizaje efectivo de este concepto. Sin embargo, en la enseñanza convencional del tema de Límite de

Funciones de una variable real, los estudiantes enfrentan dificultades tanto en la identificación del concepto como en su visualización.

El obstáculo tanto en la ciencia como en la enseñanza de la matemática.

Los obstáculos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, que se exploran con el objetivo de comprender mejor algunos factores que pueden llevar al fracaso, se pueden clasificar principalmente en dos categorías: las dificultades comunicativas y los obstáculos comunicativos. Uno de los aspectos más destacados de este trabajo es, sin duda, la definición de los conceptos de dificultad comunicativa y obstáculo comunicativo, así como la distinción que se establece entre ambas nociones (Planas, Obstáculos en el aprendizaje matemático: la diversidad de interpretaciones de la norma. , 2001).

Con el propósito de adoptar un enfoque interactivo hacia los micro procesos en el aula de matemáticas, ubicamos los desafíos previamente mencionados dentro del marco normativo de dicha aula, interpretando este entorno normativo de acuerdo con la perspectiva de Voigt (1998).

La comprensión de las normas aceptadas en el aula y la adaptación del comportamiento y las formas de participación del estudiante conforme a estas normas son requisitos esenciales para participar en el diálogo pedagógico principal. No obstante, las oportunidades de comprensión y adaptación están relacionadas con la distancia cultural del estudiante respecto a los eventos en el aula (dificultades comunicativas), su distancia social respecto a los demás participantes (obstáculos comunicativos) y las características únicas de sus procesos individuales para asignar significado y configurar contextos emocionales (experiencia de dificultades y obstáculos) (Planas, 2001).

La concepción inicial de obstáculo proviene del filósofo francés Bachelard (1938-1983), quien la define desde un punto de vista epistemológico en relación con el progreso del pensamiento científico. Bachelard categoriza estos obstáculos según su origen en:

- La propensión a depender de experiencias intuitivas engañosas,
- La inclinación a realizar generalizaciones, lo cual puede ocultar las características específicas de la situación, o
- El uso del lenguaje natural.

Lo define en el contexto del progreso del pensamiento científico en general, no en términos de experiencias de aprendizaje específicas o individuales. Para este filósofo, el

conocimiento científico se construye superando obstáculos, no solo aquellos de naturaleza externa, como los derivados de la complejidad de los fenómenos o de las limitaciones de las capacidades perceptivas humanas, sino también los que surgen en el propio acto de conocer y se presentan como una inercia que provoca resistencia, la detención o incluso el retroceso del conocimiento. Estos últimos son denominados obstáculos epistemológicos (Robayna, M. M. S., & Medina, M. M. P. , 1994).

En la obra de Glaeser (1981), se aborda el tema de los desafíos vinculados a la enseñanza de las Matemáticas. Este trabajo, titulado "Epistemologie des nombres relatifs", toma la concepción original de GASTON BACHELARD sobre el obstáculo epistemológico, originalmente definido en el ámbito de la Física, y la ajusta para aplicarla específicamente a las Matemáticas, focalizándose especialmente en el estudio de los números. enteros.

En 1983, el Profesor G. Brousseau, en su artículo "Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathématiques", examina detenidamente la noción de obstáculo epistemológico y su posible conexión con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Hace referencia explícita a los estudios de Bachelard (1938) y Piaget (1975), indicando que ambos demuestran que el error y el fracaso no desempeñan simplemente el papel simplificado que a veces se les atribuye. "El error no es solo el resultado de la ignorancia, la incertidumbre o el azar, como se postula en las teorías empiristas y behavioristas del aprendizaje, sino más bien el resultado de un conocimiento previo que tenía sus méritos y éxitos, pero que ahora se revela como falso o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son ocasionales ni impredecibles; más bien, se erigen como obstáculos".

Brousseau, en dicho artículo, reconoce a Bachelard como el primer autor que aborda la temática de los obstáculos y los examina en el ámbito de las ciencias físicas. Señala que la noción de obstáculo tiende a expandirse más allá del ámbito estricto de la epistemología, abarcando disciplinas como la Didáctica, la Psicología y la Psicofisiología, entre otras. Sus primeras menciones a la noción de obstáculo datan de 1976, durante su presentación sobre "La problématique et l'enseignement des Mathématiques" en el CIEAEM de Louvain. Introduce el término "obstáculos didácticos" para describir las

dificultades que surgen en la construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes.

Por otro lado, también se refiere que un obstáculo se manifiesta a través de errores, pero estos errores no son aleatorios ni fugaces; son reproducibles y persistentes. Brousseau sostiene que tanto el conocimiento como el obstáculo son productos de la interacción del alumno con su entorno, y más específicamente, con situaciones que hacen que ese conocimiento sea relevante.

Este escritor categoriza los obstáculos que surgen en el sistema didáctico de la siguiente manera:

- De origen ontogénico o psicogénico, derivados de las características del desarrollo del niño.
- De origen didáctico, resultantes de la elección de un proyecto en el sistema educativo, es decir, de las decisiones didácticas que se toman para establecer la situación de enseñanza.
- De origen epistemológico, intrínsecamente vinculados con el propio concepto. Estos pueden observarse en la historia de los conceptos mismos. Sin embargo, esto no implica que se deba amplificar su impacto ni que se deban replicar en el entorno escolar las condiciones históricas en las que fueron superados.

Herscovics (1989) reconoce la introducción de la noción de obstáculo epistemológico por parte de Bachelard y su definición en el contexto del desarrollo del pensamiento científico, sin hacer mención a Brousseau o a sus obstáculos didácticos. Por primera vez, él utiliza el término "obstáculo" al referirse a las dificultades que surgen en la adquisición de esquemas conceptuales por parte del aprendiz, expresándolo en su trabajo "Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra," publicado en Wagner, S. - Kieran, C (Ed. 1989). Herscovics también indica que para que el obstáculo cognitivo sea considerado un suceso natural, es necesario vincularlo con una Teoría del Aprendizaje, y para ello recurre a la Teoría de Piaget del equilibrio.

En la Teoría de Piaget, la adquisición del conocimiento es un proceso que implica una interacción constante entre el sujeto que aprende y el entorno, a través de dos mecanismos inseparables: la asimilación de la experiencia a las estructuras deductivas (integración de nuevas experiencias en una estructura cognitiva existente) y la

acomodación de estas estructuras a los datos de la experiencia (modificaciones en la estructura cognitiva del aprendiz para incorporar nuevos conocimientos). En términos generales, la adaptación implica una interacción entre el sujeto y el objeto, donde el primero se ajusta al segundo teniendo en cuenta sus características, y la adaptación será más precisa cuanto más diferenciadas y complementarias sean la asimilación y la acomodación (Robayna, M. M. S., & Medina, M. M. P. , 1994).

Conocimiento Unitario y Pragmático

El conocimiento unitario y pragmático conforma el cuarto obstáculo e involucra la concepción de la realidad como una sola, universal, armoniosa y la verdad de las cosas se traduce por su utilidad como explicación. Bachelard (2000:110), lo dice así: “En todos los fenómenos se busca la utilidad humana, no sólo por la ventaja positiva que puede procurar, sino como principio de explicación. Encontrar una utilidad es encontrar una razón”. Para superar este obstáculo se requiere una evaluación de cada concepto respecto de su utilidad y “de la experiencia donde podría sufrir contradicción” (ob. cit.: 105).

En un trabajo publicado de Pinto, E. L. P., & Méndez, F. O., (2018), establece que la manera se superar o eliminar un obstáculo epistemológico, se requiere en primer lugar conocerlos y reconocerlos en sí mismo y en otros; en segundo lugar, aplicar estrategias orientadas a la superación. En tercer lugar, es necesario crear espacios dialogales, de discusión e interdisciplinarios, bajo el criterio de superar el error o de utilizarlo como detonante de la construcción conjunta de saberes, puesto que el precepto bachelardiano que sugiere plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos, entraña superar los patrones tradicionales de enseñanza aprendizaje desde la fragmetación.

Estrada, T. S., Castro, A. B. J., & Durán, M. T. S., (2004), en un trabajo realizado en la UNAM de la ciudad de México en la Escuela de Enfermería, abordaron el obstáculo epistemológico de dos maneras distintas: Conocimiento Unitario y Conocimiento Pragmático. En cuanto al primero, en enfermería existe la creencia que exclusivamente desde ésta se puede construir el objeto de estudio, desconociendo las herramientas filosóficas y antropológicas para definir el conocimiento científico. Es claro, que en este obstáculo lo que se prioriza es la disciplina del conocimiento sin tener un referente de tipo

filosófico y antropológica, que permitan establecer una coherencia de los orígenes de dicha disciplina. En lo que respecta al segundo, el caso de enfermería el obstáculo consistiría en utilizar un saber no fundado científicamente sino transmitido de generación en generación y aceptado dogmáticamente sin haberse demostrado su fundamento.

Lo anterior, es debido a que la propia palabra “enfermería” ha sido interpretado en mucho países de distintas maneras, algo muy parecido puede ocurrir con el término “*Límite de una función de variable real*”, los estudiantes pueden estar comprendiéndolo de una manera y el docente de otra dentro de un contexto específico.

Quizá guiadas por el deseo de saber, estamos o pretendemos construir un cuerpo de conocimientos únicos, con un lenguaje único, con una práctica única.

Esto genera de alguna manera confusión cuando se sabe que el conocimiento universal es único.

Fundamentación histórica del concepto de Límite

En esta parte se busca la realización de una fundamentación histórica acerca del concepto de límite a partir de la literatura encontrada al respecto (artículos, capítulos de libro, tesis, etc.).

Cabe reportar que la literatura sobre la historia del concepto es muy escasa, sin embargo; la búsqueda de los documentos se efectuó en distintas bases de datos (Springer, Dialnet, Scopus, etc.) y repositorios (de la Universidad Pedagógica Nacional y Funes de forma principal), es decir; se buscó documentación que fuera relativa de forma exclusiva a la historia del concepto de límite, ya que en su mayoría están relacionados con aspectos didácticos y pedagógicos en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del mismo.

Cajori (1923), en su libro *La historia de las notaciones del cálculo*, se extrajo lo siguiente:

La sección dedicada al límite inicia comentando que el primer reporte que se tiene para su notación es el uso de la expresión “lim.”, el cual data del suizo Lhuillier finalizando el siglo XVIII, quien en particular escribía expresiones como “*lim. q : Q*” y “*Lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$* ”, tal notación fue utilizada por diversos matemáticos (Stockler, Carnot, etc.) e incluso es la notación que emplea Cauchy; sin embargo, él agrega el uso de paréntesis para designar todos los valores que la función encerrada en tales paréntesis puede tomar cuando la

variable se aproxima a cero. Así, por ejemplo, escribe “ $\lim. (\sin. x)$ ” que tiene un único valor 0, mientras “ $\lim. \left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ” admite dos valores. Con el paso del tiempo “lim.” pasó a convertirse en “lim”.

Otro hecho importante que se encuentra en el artículo refiere a la notación empleada por Weierstrass en el siglo XIX, época en la cual emerge la necesidad de mencionar a qué valor se está aproximando el límite. En ese sentido se empieza a usar la expresión “ $\text{Lim}_{x=a}$ ” para expresar “el límite cuando x se aproxima a a ”, también se encuentra “ $\lim_{n=\infty} p_n = \infty$ ”. Esta última forma de escritura traería problemas más adelante que implicarían un nuevo cambio.

Hacia 1905, el inglés J.G. Leathem empieza a utilizar una flecha en la escritura del límite, para representar la aproximación al límite, es decir; el símbolo “tiende a” se debe a este autor. Este cambio en la notación llega incluso por el británico Godfrey Harold Hardy quien en uno de sus textos escribe la expresión “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ ” y a propósito del uso de la flecha resalta su importancia especialmente cuando infinito es a lo cual se aproxima el límite, pues comenta que en la notación anterior ($n=\infty$) se asume como si cualquier cosa fuera igual a infinito.

Fisher (1978), en su libro *Cauchy y lo infinitamente pequeño*, se pudo extraer lo siguiente con la ayuda de traducción realizada por Rendón Mayorga (2017):

El análisis de Cauchy se fundamenta en lo que él llama variables que decrecen indefinidamente o variables con límite cero y establece su teoría en el marco del análisis estándar y del análisis no estándar (sin que ello supusiera incoherencias). En esta última teoría se consideran los números infinitos, los cuales son los recíprocos de los infinitesimales “no cero”. Este sistema, denominado de Hiperreales, es consistente igual que el de los números reales. Robinson (pionero del análisis no estándar en 1966) comenta que para Cauchy las cantidades infinitamente pequeñas no son números ni variables sino más bien estados de variables cuyo límite es cero.

El artículo señala que la importancia histórica de Cauchy es que, por un lado, instaura la teoría de límites, y por otro la de las cantidades infinitamente pequeñas (y grandes), dándole particular valor a la variable la cual tiende al límite cero. Sin embargo, el mismo Cauchy parece no tener claro ese concepto de variable y Robinson comenta que el

primero terminó argumentando con cantidades infinitamente pequeñas (CIP) tratadas como infinitesimales en el sentido actual.

Un dato importante que comenta el artículo es que Cauchy en su libro de análisis nunca define el límite de funciones, solamente define el límite de variables (para él una función es una relación entre variables y una variable es una cantidad para la cual se puede pensar que toma sucesivamente un número de diferentes valores). Esto implica que una CIP no significa que sea el límite de una función en el marco de su teoría, más bien podría tratarse del límite de una variable.

Grabiner (1983), en su libro *¿Quién te dio el épsilon? Cauchy y los orígenes del cálculo riguroso*, y con ayuda de traducción realizada por Rendón Mayorga (Op.cit):

El aporte inicia resaltando que el Cálculo desde una perspectiva histórica aborda asuntos sobre velocidades, distancias, áreas y tangentes; en ningún caso de desigualdades o inecuaciones por lo cual la definición rigurosa y formal del límite carece por completo de la intuición que estimuló su aparición.

No se registran más aportes ya que los temas abarcados están más enfocados en series y sucesiones.

Jones (1987), en su trabajo titulado *Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas*, se extrajo lo siguiente:

En este trabajo se hace una revisión por lo que el autor llama los *primeros fundamentos de las matemáticas* (para distinguirlos de los fundamentos propuestos por Cantor, Russell, etc., y que el autor denomina los *segundos fundamentos*). En esa vía plantea *grosso modo* las dificultades que tuvieron los griegos al abordar lo continuo y lo discreto. El primero de tales fundamentos es el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y el otro fueron las paradojas de Zenón. El autor las explica brevemente: la primera supone que el continuo se puede dividir infinitamente (Aquiles y la tortuga); la segunda asume que el continuo se compone de indivisibles (paradoja de la flecha).

Un aporte importante del trabajo en relación con la investigación se presenta cuando el autor muestra la definición de continuo que Aristóteles expone en su libro *Física*: “el continuo es una subdivisión de lo contiguo (esto significa *estar en sucesión y tocándose*): cosas se llaman continuas cuando los límites del tocamiento de cada uno se convierten en uno y lo mismo y son, como la palabra implica, contenidos uno en otro: la continuidad

es imposible si estos extremos son dos”. Aristóteles emplea esta definición física para construir una matemática.

Laugwitz (1987), en su libro *Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks*, se tomó lo siguiente:

En este trabajo, Cauchy propuso una definición de Límite: *Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente nítidamente un valor fijo para terminar difiriendo de él tan poco como se desee, este último valor fijo se denomina límite de todos los demás.*

Se describen las concepciones que Cauchy tiene para las denominadas *cantidades infinitamente pequeñas* las cuales proveen de teoremas coherentes entre sí en el marco del análisis matemático cuando son estudiados desde los demás conceptos que Cauchy plantea. Así, se hace una reconstrucción de lo que él entiende por continuidad de funciones, límites y convergencia (de series), series binomiales, diferencial y derivada, integral, integración de series y polinomios de Taylor.

Por otro lado, Cauchy también introdujo el concepto de función continua, para referirse que un cambio infinitesimal de la variable produce un cambio infinitesimal de la función en sí.

Grattan-Guinness (1991), en su trabajo *¿Qué es y qué debería ser el Cálculo?*, se pudo extraer la siguiente información, tomando como referencia : El trabajo resume los principales aportes que se dieron en el desarrollo del Cálculo desde 1660 hasta 1900 a través de los trabajos de los autores más destacados en cada época (i.e. Newton, Leibniz, Lebesgue, Zermelo, etc.).

En lo que corresponde a los límites, se referencia el trabajo de Lagrange, en el cual se explica que él tiene un afán por formalizar el Cálculo convirtiéndolo en reglas formales de álgebra, en ese camino demuestra que casi cualquier función tiene una expansión en series de Taylor. Al reescribir las funciones como polinomios entonces lleva al terreno del álgebra los problemas del Cálculo y surge en ese momento la inquietud de si pueden los cálculos necesarios en ese trabajo realizarse sin tener que recurrir a la teoría de límites o infinitesimales. Sin embargo, lo cierto es que se menciona que Lagrange mostró que eso era posible solo en algunos casos y nada más.

Felscher (2000), en su trabajo titulado *Bolzano, cauchy, epsilon, delta*, realizó un importante aporte en términos epistemológicos de la siguiente manera y tomando a su vez, lo referenciado por Rendón Mayorga (Op.cit):

El trabajo inicia describiendo la definición actual de límite de una función en un punto, así como de límite de una sucesión y de convergencia de una sucesión. A propósito de eso realiza una observación en cuanto a la terminología empleada: para el caso del límite de funciones se emplean las letras ε y δ y la convergencia de una sucesión, lo cual significa implícitamente el uso de cuantificadores para cada uno de tales símbolos (letras). Por otra parte, cuando se trata el límite de sucesiones usualmente la literatura solo se sirve de las letras ε y n o N y de forma análoga el uso de “un cuantificador menos” en la definición. Esta distinción es importante porque a lo largo del documento va a estar comparando los límites entre funciones y sucesiones.

Una segunda parte del trabajo reseña las concepciones que tuvo D’Alambert acerca del límite y menciona que este matemático del siglo XVIII fue uno de los más representativos de la *época dorada del Cálculo* junto con Euler y los hermanos Bernoulli. En principio menciona la definición que D’Alambert da sobre *Limite* en la *Enciclopedia* que editan junto a Diderot. Al respecto dice que:

Una *cantidad (grandeur)* (N.A: refiriéndose a cantidad, magnitud; actualmente tal noción hace referencia a un punto de un continuo geométrico) es el límite de otra cantidad si la segunda se puede aproximar la primera más que cualquier otra *cantidad* dada que sea tan pequeña como se pueda suponer, siempre que la *cantidad* no supere a la cual se está acercando, tal que la diferencia entre la *cantidad* y su límite es absolutamente indeterminable.

A continuación, una tercera parte del trabajo está dedicada a Bolzano. En 1817 Bolzano publica un pequeño libro cuyo objetivo central es la demostración del teorema del valor intermedio. En ese libro Bolzano propone la siguiente definición de continuidad de una función f en un argumento x :

De acuerdo con una explicación correcta, la expresión ‘que una función $f(x)$ cambia por la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites’ significa exactamente esto: si x es tal valor, entonces la diferencia $f(x + w) - f(x)$ puede

hacerse menor que cualquier magnitud dada si sólo w se puede suponer tan pequeño como se desee.

Bolzano solo emplea su definición en dos secciones del libro:

1. Cuando demuestra que si f y φ son funciones definidas y continuas en una vecindad de un número α y si $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ entonces $f(\alpha+w) < \varphi(\alpha+w)$ probando que w es suficientemente pequeño.

2. Cuando muestra que cualquier función polinómica es continua.

Pourciau (2001), en su trabajo titulado *Newton and the notion of limit*, se pudo extraer la siguiente información:

Se investigó la comprensión de Newton del concepto de límite a través de un estudio de ciertas pruebas aplicadas, apareciendo en los Principia. Se encontró que Newton, no Cauchy, fue el primero en presentar un argumento épsilon, y que, en general, la comprensión de Newton de los límites era más clara de lo que comúnmente se pensaba. Observamos

La distinción de Newton entre dos propiedades se confunde fácilmente, a saber, $\frac{f}{g} \rightarrow 1$ y $f - g \rightarrow 0$, resolver un problema creado por una traducción falsa que aparece en la revisión de Cajori del original de Motte traducción final, y llegamos a una comprensión más profunda de los conocidos, pero menos comprendidos Lema XI de la Sección I, Libro I.

Para vislumbrar con claridad la comprensión del proceso de límite que Newton tenía, hay que revisar, según el autor, esencialmente tres de los once lemas que se proponen en los Principia: el lema I que trata sobre el límite de una diferencia, el lema II sobre la existencia de la integral y el lema XI sobre la segunda derivada.

En el Lema I el cual dice: “las cantidades, y también las proporciones de las cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden constantemente a la igualdad, y que antes del final de ese tiempo se acercan tan cerca unas de otras que su diferencia es menor que cualquier cantidad dada, se vuelven finalmente iguales” (traducción libre), aunque no son del todo explicitables las concepciones que Newton pone en juego aquí, lo cierto es que se presenta una idea clara de límite: que una cantidad tiene límite cero si esta puede ser volverse menor que cualquier distancia dada. Una idea sin confusiones en el sentido de no aludir a indivisibles o *fantasmas de cantidades desvanecidas*.

En cuanto al Lema II esencialmente el mismo se trata de considerar una curva y algunos rectángulos inscritos y circunscritos a la curva. Aunque Newton lo hace en algunos casos, con la terminología actual se puede entender que el área de los rectángulos es menor que cualquier rectángulo dado y concluye, gracias al lema I y en notación moderna que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$$

Siendo L_n y U_n la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos respectivamente y A el área bajo la gráfica de la curva. Aunque la notación simplifica la comprensión del lema II lo cierto es que, de fondo, es esa idea de límite la que subyace para el autor en dicha proposición y en su demostración.

Respecto al Lema XI que establece algunas proporciones entre magnitudes en el marco de un arco de una curva y una recta tangente a esa curva por un punto dado, se evidencia con claridad cómo es que Newton en un punto de la demostración hace referencia a una magnitud *que puede ser tomada tan pequeña como cualquier longitud dada*, haciendo referencia a una noción acertada de límite, en el sentido de prescindir de cantidades infinitamente pequeñas, o razones entre indivisibles o comentarios alusivos a la física, etc., simplemente en el lema XI plantea la pregunta clave: ¿puede ser la diferencia entre esta cantidad y un valor fijo menor que cualquier número dado positivo fijo?.

González (2003), en su trabajo *Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales*, se consideró el siguiente aporte:

En este trabajo se expone que el llamado cálculo infinitesimal o cálculo con números infinitamente grandes e infinitamente pequeños, reinó en la matemática durante casi dos siglos. A finales del Siglo XIX, la teoría se debilitó enormemente y empezó a imponerse una nueva doctrina oficial, que es la que se basa en el concepto *límite*, tal cual como hoy se está abordando en el aula de clase.

Se distingue una idea central e iniciática del trabajo. Para el autor, los fundadores del Cálculo (menciona a Newton, Leibniz, Wallis, Euler, L'Hopital, etc. -no a Cauchy-) tenían una distinción clara entre Álgebra y Cálculo. La primera de dichas ramas trabaja con un número finito de símbolos, mientras que la segunda manipula infinitos.

Posteriormente, Bertrand Russell, crítico implacable de los infinitesimales, ofrece la siguiente versión de lo que es el cálculo:

Cálculo infinitesimal es el nombre tradicional que recibe el conjunto del Cálculo diferencial e integral, y como tal lo conservo; pero como veremos en breve, no existe alusión ni implicación a lo infinitesimal en parte alguna de esta rama de la matemática.

La aparente ambigüedad en la utilización del doble término "cálculo infinitesimal" no obedece tanto a una confusión o un malentendido. Ella encierra el secreto de los cambios que se produjeron en el proceso de desarrollo del cálculo, en el que los infinitesimales y los infinitamente grandes -la materia original- fueron posteriormente desterrados como alternativa, y se impusieron otras construcciones matemáticas que imperan en los currículos oficiales y que, pese a los problemas teóricos y cognitivos que conlleva, han reinado durante los últimos cien años con éxito.

Más adelante, y en relación con los fundamentos del Cálculo infinitesimal, se reseña el ensayo del Obispo Berkeley que compara las bases del Cálculo para esa época con los cimientos de la fe o la religión. En ese sentido el autor cita a Berkeley: "Aquél que pueda digerir una segunda o tercera fluxión, o una segunda o tercera diferencia, no necesita, de veras, sentir pudor de cualquier asunto sobre la divinidad". Este suceso es importante en primer lugar, porque muestra la *debilidad* de los fundamentos de una teoría matemática que se creía sólida y estable. En segundo lugar, porque es el inicio de la reconfiguración de las bases del Cálculo en aras de encontrar un piso más estable sobre el cual construir su edificio teórico. En ese sentido es que los infinitesimales son expulsados del cálculo debido a las inconsistencias que presentan su tratamiento y conceptualización, e inicia así la llamada *época del rigor*, en la cual se alude al método de los límites como una manera de manejar el problema de la continuidad y lo continuo sin tener que acudir al tratamiento de lo infinitesimal (aparentemente).

Ímaz, C., & Moreno, L. (2009), en su trabajo titulado *Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza*, se obtuvo la siguiente información:

El Cálculo se desarrolló alrededor de dos ideas: variación y acumulación. Vamos a explicar cómo, durante los siglos XVII y XVIII, este Cálculo se tornó la lengua regia de la ciencia. Sin embargo, a comienzos del siglo XIX, en manos de los nuevos matemáticos, se fue desarrollando por un camino que no consolidó lo que vemos como ganancias del

entonces pasado reciente, sino que los esfuerzos se orientaron a la búsqueda de unos fundamentos en tierra extraña. Hoy día, en consecuencia, los enfoques del cálculo se preocupan más por la formalización que por el desarrollo de las ideas y métodos genuinos del Cálculo que van dirigidos a la resolución de problemas científicos. Queremos arrojar un poco de luz, al menos, sobre este drama educativo.

El abordaje de matemáticos de la talla de Fermat, Cavalieri, Descartes, Wallis y muchos otros (Edwards, 1979), diseñaron estrategias ad-hoc para resolver casos especiales de problemas de variación y acumulación. Problema por problema fueron acercándose a métodos cada vez más generales mediante los casos particulares, pero sin lograr desentrañar plenamente la relación oculta entre la variación y la acumulación. Hubo que esperar al trabajo de Newton y Leibniz para que cristalizara lo que se venía gestando: el teorema fundamental del cálculo, que establece una relación profunda entre la derivada y la integral.

En este trabajo publicado por Ímaz, C., & Moreno, L. (2009), mencionan que en el 2008, se publicó una investigación cuyo autor K. Roh, aportó una nueva conceptualización en el término de límite:

“El concepto de límite es una de las ideas más fundamentales no sólo para desarrollar el cálculo sino para desarrollar el pensamiento matemático más allá del cálculo en la búsqueda del rigor matemático (cursivas nuestras).”

Nakane (2014), en su trabajo titulado *¿Tenía el cálculo diferencial de Weierstrass un carácter de evitación de límites? Su definición de límite en estilo $\epsilon - \delta$, se pudo extraer la siguiente información:*

En la década de 1820, Cauchy fundó su cálculo en su concepto de límite original y desarrolló su teoría utilizando $\epsilon - \delta$ desigualdades, pero no aplicó estas desigualdades consistentemente a todas las partes de su teoría. En contraste, Weierstrass desarrolló consistentemente sus conferencias de 1861 sobre cálculo diferencial en términos de ϵ - δ . Sus conferencias no se basaron en el límite de Cauchy y se distinguieron por su carácter de evitación de límites. La publicación parcial de Dugac de las conferencias de 1861 deja claras estas diferencias. Pero en las partes inéditas de las conferencias, Weierstrass definió realmente su límite en términos de $\epsilon - \delta$ desigualdades. El límite de Weierstrass fue un prototipo del límite moderno, pero no sirvió como base de su teoría

del cálculo. Por esta razón, no proporcionó la estructura básica para la $\epsilon - \delta$ análisis de estilo. Así, fue el libro de texto de Dini de 1878 el que introdujo la definición de límite en términos de $\epsilon - \delta$ desigualdades.

Medrano, I., & Pino-Fan, L. R. , (2015), en un trabajo titulado *Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico*, se proporcionó la siguiente información:

En este trabajo se presenta una investigación sobre la génesis y la evolución de la noción de límite finito. Para tal propósito se realizó un estudio de tipo histórico-documental, en el cual se consideraron elementos relacionados con la estructuración conceptual de dicha noción: los números reales, el infinito, la noción de aproximación, el continuo geométrico y el continuo numérico. Para este estudio se consideró como punto de inicio el trabajo de los griegos, específicamente el desarrollo y uso del método de exhaustión, continuando con la introducción de los indivisibles por Viète y Cavalieri y la producción matemática generada en los inicios del cálculo diferencial por Newton y Leibnitz, finalizando con las etapas de formalización del límite y sus generalizaciones métricas y topológicas en el análisis estándar. Como resultado de la investigación se distinguieron siete estadios de comprensión del objeto matemático límite.

Un primer estadio llamado *La Noción de Aproximación Desarrollada por Eudoxo y Arquímedes*, en donde se señala la ruptura entre la aritmética y la geometría, Eudoxo años más tarde resuelve esta reconsideración de las matemáticas a través de su definición de proporcionalidad entre magnitudes geométricas el cual, apoyado por el hoy llamado axioma de Arquímedes, permite fundamentar el método de agotamiento y solucionar problemas que tengan implícitamente procesos infinitos.

Un segundo estadio *La Concepción de los Indivisibles*, este apartado se enfoca en los aportes de Cavalieri, Kepler, Galileo, Stevin y Viète. En particular se describe cómo la algebrización de la idea de indivisibles (estudiados por Cavalieri en su afán de comparar los volúmenes de figuras generadas a partir de rotación de figuras planas: conos, cilindros, etc., y de Kepler quien se sirve de las ideas de Arquímedes en cuanto al método de agotamiento) da origen a lo que se conocería como infinitesimales.

Las investigaciones matemáticas mediante el método de los infinitesimales, aunque tuvieron una calurosa acogida por gran parte de los matemáticos de esa época, no

estuvieron exentas de una fuerte oposición tanto religiosa –debido a la concepción filosófica que implicaba la teoría de los infinitesimales– como matemática –por parte de fieles seguidores de la geometría griega y de sus métodos–. Es en este escenario donde destaca la figura de Blas Pascal, quien asume la defensa de la teoría del cálculo de los indivisibles. En el marco de la polémica con el caballero de Mére, Pascal le responde:

Si fuese verdad que el espacio estuviese compuesto por un cierto número finito de indivisibles, se deduciría que dos espacios, cada uno de los cuales fuera cuadrado, es decir igual y semejante por todos lados, siendo doble uno del otro, uno contendría un número de indivisibles doble del número de indivisibles del otro. (Pascal, citado en Brunschvicg, 1945, p.197).

Un tercer estadio refiere al trabajo de Newton, en él se menciona que una primera pre concepción acerca de la idea de límite aparece en su trabajo cuando busca perfeccionar sus ideas sobre fluentes y fluxiones (las cuales pasan a denominarse método de las razones primeras y últimas).

En el primer Lema del libro primero de sus *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, Newton establece:

Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales. Si lo niegas, sean al final desiguales y sea su diferencia final D . Luego no pueden acercarse a la igualdad más que hasta una diferencia dada D . Contra la hipótesis. (Newton, 1726/2011, p.157)

El cuarto estadio hace referencia a la idea de infinitesimales en el desarrollo del trabajo de Leibniz. En este estadio se logra demostrar a través del uso de la geometría el concepto diferencial sin pasar por la noción de límite.

En los estadios quinto y sexto, se logra formalizar la noción de límite, que es lo que hoy en día se imparte en las aulas de clase.

Finalmente, el séptimo estadio refiere a la generalización del concepto de límite. Cuando Weierstrass define el límite a partir de distancia y completitud, estos se extienden a los conceptos de espacios métricos y conjuntos perfectos. Una generalización de los espacios métricos son los espacios topológicos, así, al definir límite entre espacios

métricos tal definición se puede expresar a partir de conjuntos utilizando las propiedades de los espacios topológicos.

Aspectos Cognitivos del Concepto de Límite

Mendoza, L. G., Alemán, M. R. B., & Nieves, L. M. A. , (2017), en su investigación obtuvieron importantes conclusiones:

- ✓ Los estudiantes, aunque consideraron tener buen dominio de los conceptos fundamentales de la derivada a partir de la definición del límite, el análisis de pruebas escritas aplicadas permitió evidenciar dificultades cognitivas y procedimentales respecto a estos conceptos. Esta situación se convierte en un obstáculo para el aprendizaje y el logro de los objetivos de las evaluaciones.

- ✓ Los estudiantes a pesar de que desarrollan procesos mecánicos correctos en el cálculo de las derivadas, existen grandes dificultades para abordar la derivada como una razón de cambio, dado que el concepto de la derivada a partir de la definición con límite no se comprende ni se conceptualiza, ni en la misma función ni la derivada en un punto específico $x=c$.

- ✓ Los de estudiantes en un gran porcentaje identifican las reglas de derivación, pero en el momento de aplicarlas muestran dificultades de tipo algebraico y aritmético, así como en la estructura algebraica de las funciones, lo cual hace difícil establecer la jerarquía que demanda las reglas de derivación.

- ✓ La construcción del cálculo diferencial llevó varios años de trabajo arduo por parte de grandes matemáticos, lo cual nos permite reflexionar sobre la forma en la que los docentes fundamentamos la derivada en las aulas de clase. De por sí, el concepto de la derivada no es tan fácil de asimilar y reconstruir a partir del concepto de límite, por lo que se deben buscar metodologías que faciliten su comprensión y su aprendizaje.

Verdú, C. F., García, G. S. M., Moreno, M. M., & de la Vega, M. L. C. , (2018), en esta investigación se hizo un aporte muy interesante y es que a través de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango de una función, se podría llegar a la comprensión del concepto de límite. Sin embargo, dentro de las dificultades que se detecta es que los avances a nivel conceptual solo ocurren desde la dimensión matemática y no cognitivo.

La diferencia entre las dos formas señaladas sugiere que los estudiantes para profesor deben llegar a ser conscientes de que el avance en la comprensión de los estudiantes de bachillerato depende de la coordinación de las aproximaciones en los diferentes modos de representación. Este hecho subraya la importancia del conocimiento del profesor sobre los elementos matemáticos importantes que subyacen en el concepto matemático, además de su conocimiento sobre el papel de algunos de ellos en el avance conceptual, en el estudio, la coordinación de las aproximaciones en los diferentes modos de representación. Por otro lado, se han mostrado que los estudiantes tienen dificultad en proponer decisiones instruccionales que les ayuden a progresar en su comprensión conceptual.

Claros, F. J.; Sánchez. M. T.; Coriat, M. , (2007) sostienen que el concepto de límite es reconocido en Educación Matemática como una de las nociones clave en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado de los alumnos, subrayando que las investigaciones desarrolladas en este ámbito han experimentado en los últimos años una evolución significativa en sus enfoques y propósitos, caracterizando las dificultades y obstáculos existentes en la comprensión de este concepto, analizando las razones que subyacen a tales dificultades y proporcionando, en base al nuevo conocimiento generado, soluciones efectivas en forma de propuestas didácticas sustentadas en marcos teóricos operativos.

Así las definiciones formales de límite admiten análisis desde un punto de vista simbólico y fenomenológico con diferencias identificadas en dos definiciones formales específicas para el límite como son, el de una sucesión y el de una función en un punto. Los estudios didácticos raramente han distinguido entre el estudio del límite de una sucesión y el límite de una función. Se han ocupado en la mayoría de los casos del estudio del límite en general.

Aspectos instruccionales del Concepto de Límite

Sierpinska (1990), señala que durante los años 1940 – 1995 los cambios estructurales y curriculares en cuanto al contenido de la noción límite, eran continuos, conociéndose que en un principio aparece ligado al concepto de sucesión y que posteriormente se aplica para definir la continuidad de funciones. Por otro lado, los contenidos se repiten en los diferentes niveles, ampliándose y completándose en el siguiente. El desarrollo es

secuencial y formal, las demostraciones no son rigurosas, sino que tienen un desenlace intuitivo. Durante ese período subyace la idea de la matemática ya hecha y el estudiante debe memorizar y practicar resolviendo ejercicios. Así las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno son: memorización de definiciones y propiedades y prácticas algorítmicas.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006), en el proceso de adquisición del concepto de límite aparecen diferentes obstáculos que se manifiestan por los errores que cometen los alumnos. Los errores suelen derivarse de dificultades en los procesos de aprendizaje matemático o por la interacción de variables de la educación matemática y pueden ser resistentes en el tiempo.

Al analizar los errores, se pudo detectar las siguientes dificultades asociadas al concepto de límite:

- Dificultades relacionadas con el concepto de función.
- ✓ Dificultades para representar gráficas que sean funciones.
- ✓ Dificultades relacionadas con el concepto de dominio de una función.
- ✓ Dificultades para distinguir entre variable independiente y dependiente.
- Dificultades relacionadas con el concepto de límite.
- ✓ Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- ✓ Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales.
- ✓ Dificultades para la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar.
- ✓ Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Dificultades para pasar de un sistema de representación a otro.
- ✓ Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

Llama la atención las dificultades encontradas para la construcción de gráficos de funciones a partir de condiciones dadas en forma verbal ya que cuyo tema se había trabajado en una materia anterior. Pareciera haber falta de capacidad de los alumnos para manejar mucha información en simultáneo, integrarla y dar una respuesta adecuada.

Se pretende que los errores y dificultades detectadas en este trabajo permitieron determinar los obstáculos relacionados con el concepto de límite. En carreras donde la matemática tiene un carácter instrumental, es decir, representa un medio que les permita como futuros profesionales la interpretación, el planteo y la resolución de problemas específicos de su carrera. Es importante que se promueva la visualización matemática utilizando diferentes representaciones para la construcción del concepto, presentándolo como una potente herramienta para resolver problemas de variación de funciones.

Hitt F. &. (2004), en su investigación, deja claro que en el caso de las demostraciones. el problema es grande, ya que el uso adecuado de cuantificadores está fuera del alcance de los estudiantes y los intentos de demostraciones que realizan no tienen. generalmente, significados geométricos que les permitan guiar sus acciones en los procesos algebraicos.

En este trabajo se pudo observar un doble problema, uno que tiene que ver directamente con la complejidad del concepto matemático en cuestión, y el otro que tiene que ver con los obstáculos que el mismo profesor de matemáticas promueve entre sus estudiantes.

El Concepto de Límite de una Función Real de Variable Real

La comprensión del límite de una función real de variable real es un aspecto importante para los estudiantes de bachillerato (Tall, 1992). Diferentes investigaciones indican que el concepto de límite es una noción difícil, y que muchas veces la idea de aproximación a un número es el primer contacto que tienen los estudiantes con este concepto a través de la noción dinámica de límite (Cornu, 1991). La concepción dinámica (Blázquez, S. y Ortega, T. , 2002) puede ser definida como: “Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a , y se debiera escribir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada”

Esta manera de dar sentido a la idea de límite influye en la comprensión de la concepción métrica:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

A continuación, una lista de contenidos específicos de la noción del límite de una función: Límite lateral, tendencia de un número, tender al infinito, indeterminación,

asíntota, continuidad, discontinuidad, límite de una función en un punto, límite de una función en infinito, asíntota horizontal, asíntota vertical, asíntota oblicua, continuidad en un punto, discontinuidad en un punto, cálculo de límite de una función en un punto por sustitución directa o mediante representación gráfica, cálculo del límite mediante las propiedades del límite respecto las funciones a saber, suma, producto, y composición, cálculo de límites en un punto con ayuda de una tabla de valores, reconocimiento de la continuidad de una función polinómica, representación gráfica, límite de funciones notables.

Sobre el concepto de Función

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto de X de números reales x a un conjunto Y de números reales y , donde el número y es único para cada valor específico de x .

En este sentido, una función es una relación que cumple con dos condiciones: “existencia y unicidad”, que se refiere a que para todo elemento del conjunto de partida existe un único elemento en el conjunto de llegada.

Una función se denota como $f: A \rightarrow B$, en forma de conjunto como:

$$f: \{(x, y) \in R / y = f(x)\}.$$

El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina *dominio* de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de *contradominio* de la función.

Función Real

Una función real de variable real, es una función cuyo dominio y conjunto de llegada son subconjuntos de R . Ejemplos:

- a. $f: R \rightarrow R$
- b. $g: R - \{0\} \rightarrow R$
- c. $h: R \rightarrow R$
- d. $f(x) = x$

Gráfica de una función

Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de .

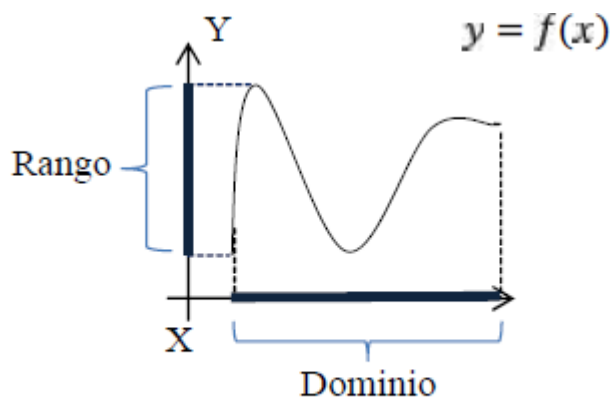


Gráfico 1: Dominio y rango de la función $y=f(x)$

Imagen tomada de Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., & Abellanas, L. (2006).

Límite de una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a , excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L , lo que se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si la siguiente proposición es verdadera:

Dada cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe un $\delta > 0$ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número a si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a .

Ejemplo: Utilice la definición de límite para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3$

Solución:

Se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

Si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(4x - 5) - 3| < \epsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $4|x - 2| < \epsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|x - 2| < \frac{\epsilon}{4}$

Esta proposición denota que $\frac{1}{4}\epsilon$ es una δ satisfactoria. Con esta elección se tiene el argumento siguiente:

$$0 < |x - 2| < \delta$$

$$\rightarrow 4|x - 2| < 4\delta$$

$$\rightarrow |4x - 8| < 4\delta$$

$$\rightarrow |(4x - 5) - 3| < 4\delta$$

$$\rightarrow |(4x - 5) - 3| < \epsilon \text{ (porque } \delta = \frac{1}{4}\epsilon \text{)}$$

Teoremas relacionados con el límite de una función

Sea m y b dos constantes cualesquiera, entonces

T1. $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$

T2. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

T3. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

T4. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

T5. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

T6. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y n es cualquier entero positivo, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$$

T7. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ si } M \neq 0$$

T8. Si n es un número entero positivo y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [\sqrt[n]{f(x)}] = \sqrt[n]{L}$$

Con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

EJEMPLO: Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5)$, y cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 7x - \lim_{x \rightarrow 3} 5 \quad (\text{T.4 L.}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 7 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 5 \quad (\text{T.5 L.}) \\ &= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 \quad (\text{T.1 L. y T.2 L.}) \\ &= 9 + 21 - 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Límites laterales

Definición de límite por la derecha: Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (a, b) . Entonces, el límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la derecha, es L , lo que se denota por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

Si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

Definición de límite por la izquierda: Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (d, a) . Entonces, el límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la izquierda, es L , lo que se denota por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

Si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

Teorema de los límites laterales

El $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existen y son iguales a L .

EJEMPLO: Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Dibuje la gráfica de h .

b) Determinen, si existen, cada uno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x); \lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

Solución:

a)

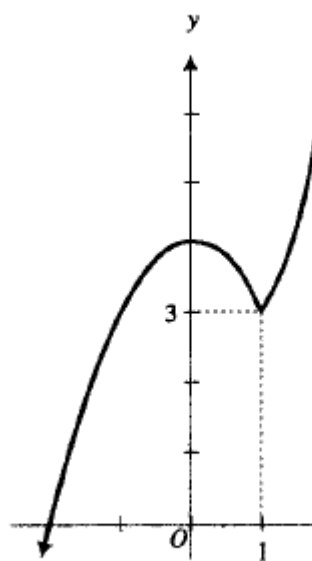


Gráfico 2: Representación de la función $h(x)$.

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x^2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + x^2) = 3$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ y ambos son iguales a 3, se concluye, por el teorema de límites laterales que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$

Límites Infinitos

Definición de valores de función que crecen sin límite: Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a , excepto posiblemente en a mismo. Conforme x se aproxima a a , $f(x)$ crece sin límite, lo cual se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Si para cualquier número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > N$

Definición de valores de función que decrecen sin límite: Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a , excepto posiblemente en a mismo. Conforme x se aproxima a a , $f(x)$ decrece sin límite, lo cual se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Si para cualquier número $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) < N$

Teorema 9 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

- i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$;
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

Teorema 10 de límites

Si a es cualquier número real y si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

- i. si $c > 0$ y $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$
- ii. si $c > 0$ y $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$
- iii. si $c < 0$ y $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$
- iv. si $c < 0$ y $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

El teorema también es válido si se sustituye " $x \rightarrow a$ " por " $x \rightarrow a^+$ " o " $x \rightarrow a^-$ ".

EJEMPLO: Sea

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x)$

c) Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de F

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+x-2}{(x-3)(x+1)}$

El límite del numerador es 14, lo cual puede verificarse fácilmente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores positivos. Entonces, del teorema 10(i) de límites,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+x-2}{(x-3)(x+1)}$

Como en el inciso (a), el límite del numerador es 14.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

En este caso, el límite del denominador es cero, pero el denominador se aproxima a cero por medio de valores negativos. Del teorema 10(ii) de límites.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = -\infty$$

Teorema 11 de límites

i. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

ii. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye " $x \rightarrow a$ " por " $x \rightarrow a^+$ " o " $x \rightarrow a^-$ "

EJEMPLO: Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Se deduce del teorema 11(1) que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right] = \infty$

Teorema 12 de límites

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

- i. Si $c > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;
- ii. Si $c < 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye " $x \rightarrow a$ " por " $x \rightarrow a^+$ " o " $x \rightarrow a^-$ ".

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(x-3)^2} = +\infty \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-4} = -7$$

Continuidad de una función en un número

Se dice que la función f es continua en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- i. $f(a)$ existe;
- ii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
- iii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a , entonces se dice que la función f es discontinua en a .

CAPÍTULO III CONTEXTO METODOLÓGICO

La Naturaleza de la Investigación

El término metodología hace referencia al modo en que se enfocan los problemas y se buscan las respuestas. Implica la reflexión sobre cómo obtener conocimiento, qué se debe hacer y cómo realizarlo. Los propósitos, supuestos e intereses determinan la metodología a seguir en una investigación.

Por ello, el investigador centró el desarrollo de la Tesis Doctoral en las dificultades detectadas durante la apropiación del concepto de límite de una función real de variable real en estudiantes universitarios de la Institución Universitaria de Barranquilla de la ciudad de Barranquilla.

En este aspecto, se señala el proceso metodológico realizado en la presente investigación con el fin de aplicar una metodología Cualitativa dentro de un enfoque epistemológico haciendo énfasis en el desarrollo cognitivo de los alumnos y el método de enseñanza por parte del docente, teniendo en cuenta para ello, un análisis exhaustivo de las dificultades que en forma de redes complejas hacen su aparición en las prácticas matemáticas como síndrome de obstáculo, especialmente en el conocimiento unitario y pragmático y manifestándose durante las prácticas matemáticas que los estudiantes materializan en forma de errores.

Además, cómo la investigación necesitará de un modelo teórico para interpretar exhaustivamente las narraciones suministradas por los informantes se utilizará la hermenéutica, los informantes clave, las técnicas e instrumentos de recolección de la información, las técnicas de análisis de la información, procedimiento y cronograma de actividades.

Por ello, la elección del Método Cualitativo deberá responder, entre otras cosas, a la relación existente entre el profesor y el alumno en el aula de clase durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del límite de una función real de variable real, desde ambas

perspectivas, intervendrá también la interpretación personal del investigador con el fin de obtener de manera cercana las actitudes tanto de profesor como la del alumno.

Paradigma

El paradigma que se abordó para la cristalización de la Tesis, es el paradigma Interpretativo, el cual es definido por Latorre, A., del Rincón Igea, D., & Arnal, J. (1996), como “Aquel constructo metodológico que acepta que la realidad es dinámica, múltiple, construida, divergente y holística, cuya finalidad es comprender e interpretar la realidad, los significados de las personas, percepciones, intenciones y acciones”. (p.44). Considero que este paradigma permitirá obtener la percepción pura del objeto de estudio (actitudes tanto del docente como del estudiante de Educación Superior) desde la visión de los sujetos.

Dentro de este paradigma se identificaron las siguientes dimensiones:

- La aproximación al Objeto de Estudio: Componente que corresponde a la Dimensión Ontológica. La realidad que se plantea en este trabajo corresponde en primera instancia al objeto de estudio: *Límite de una función de variable real*, el cual existen muchas investigaciones que han tratado dicho tema en virtud de las dificultades que comúnmente se generan en su enseñanza y aprendizaje, por parte de docentes y estudiantes. Algunas dificultades han sido expuestas en algunos trabajos citados en esta tesis doctoral.
- El Soporte Epistemológico: Componente que corresponde a la Dimensión Epistemológica. Una vez que se tiene claro el objeto de investigación, es importante conocer cómo desde la teoría de las situaciones didácticas planteadas por Brousseau, es posible la identificación de aquellos conocimientos llamados obstáculos están afectando el proceso de enseñanza en los estudiantes y a su vez, cómo el docente lo realiza desde su experiencia en la disciplina. Por otro lado, frente a esos obstáculos se toma en cuenta uno en particular que es el *Conocimiento Unitario y Pragmático* planteado por Bachelard.
- El Contexto Conceptual: componente que en la investigación cualitativa exige una posición reflexiva, crítica, sobre la literatura existente relacionada con su objeto de estudio, partiendo de la premisa que la producción teórica no es neutra y que sus diferencias no son de forma o de convencionalismos, sino que son guiadas por posturas

epistemológicas, es decir, por paradigmas, las cuales muchas veces subyacen en el discurso, por lo cual en esta investigación se develan sus contenidos.

- El Soporte Metodológico: componente que implica discusión teórico epistemológica. El investigador cualitativo se esforzará por evidenciar que los principios tanto teóricos como técnicos del soporte metodológico se relacionan coherentemente con las otras dos dimensiones del paradigma seleccionado, es decir, la dimensión ontológica y la dimensión epistemológica, en las cuales fundamentan esta investigación.

Método

La investigación fue llevada a cabo mediante el método hermenéutico, adoptando un enfoque interpretativo. Se eligió este método debido a la necesidad de obtener un entendimiento profundo del comportamiento humano y las motivaciones que lo guían. Además, la elección de una metodología cualitativa se basó en la capacidad de proporcionar información detallada y, al mismo tiempo, permitir una comprensión profunda de las acciones y actividades grupales realizadas durante las clases. De igual forma, permitió establecer parámetros o claves para superar el obstáculo epistemológico sobre el conocimiento Unitario y pragmático propuesto por Bachelard G. , (1999).

Es importante señalar que, en relación con la hermenéutica, Ferraris (2002) afirma que la palabra proviene del griego "hermeneunien", que significa declarar, anunciar, esclarecer y traducir; y del latín "interpretari". Por lo tanto, el hermeneuta es aquel que se dedica a interpretar y revelar el significado de los mensajes, facilitando así su comprensión (p. 7). Desde esta perspectiva, Garagalza (2002) sostiene que:

Según Gadamer, la forma humana de comprender es típicamente interpretativa, traduciendo la realidad percibida a la realidad propia comprendida. En este sentido, todo conocimiento se convierte en interpretación e implica el reconocimiento de la realidad que se comprende, lo que conecta con la línea heideggeriana en cuanto a la comprensión e interpretación (p. 22).

La hermenéutica, en líneas generales, se refiere a la habilidad y destreza para analizar un texto, comprenderlo, situarlo en su contexto, entender al autor, así como su contenido e intención. Los textos pueden ser tanto escritos como hablados o representados en forma de actuaciones (Beuchot, 2010). Dentro del texto, el lenguaje adquiere relevancia, ya que es en el lenguaje donde se encuentra el significado. Más allá de la verdad, lo crucial es el sentido que se halla en el lenguaje, no necesariamente en la realidad misma

(Gil, 2011). No obstante, la interpretación no consiste en adaptar las percepciones puras a nuestro punto de vista subjetivo, sino en participar en las "interpretaciones propias del ámbito intersubjetivo del lenguaje y de las prácticas sociales" (Quintana, 2005, p.438).

El fenómeno educativo debe ser abordado en su totalidad, considerándolo como un fenómeno intrínseco a la condición humana, lo que legitima su enfoque hermenéutico (García Carrasco, J. y García del Dujo, A. , 1996). Desde la perspectiva educativa, la hermenéutica nos señala constantemente que la educación, como aspecto humano, implica un constante pensar y repensar, así como una lectura y relectura, constituyendo una interpretación múltiple y continua (Moreu, A. y Prats, E. (Coords.) , 2010). Por lo tanto, si el objetivo es analizar el comportamiento humano como una acción que se realiza en un contexto de deseo, estamos examinando una realidad que debe caracterizarse en términos de significados, aunque surge la pregunta de si esto es suficiente para considerarla como objeto de estudio de la ciencia hermenéutica (Taylor, 1986, 24).

Debido a lo expuesto anteriormente, este método de investigación posibilitó al investigador, mediante el uso de técnicas cualitativas y el análisis del discurso, examinar y cotejar las contribuciones proporcionadas por los informantes clave con las teorías que respaldaron la investigación. Es esencial recordar que la creación de conocimiento implica la producción de valores. Por lo tanto, todos estos aspectos deben contribuir a la formulación del modelo teórico previamente anticipado.

Lo anterior, en el contexto del Manual de Trabajo de Grado, de Especialización, Maestrías y Tesis Doctorales de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2022), se inscribe en una investigación de campo:

El análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlo, entender su naturaleza y factores contribuyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característico de cualquiera de los paradigmas o enfoque de investigación conocidos o en su desarrollo... (p. 36).

Tipo de investigación

El tipo de investigación fue de tipo descriptiva. La investigación descriptiva puede emplear tanto un enfoque cuantitativo como cualitativo; sin embargo, en esta investigación, se centrará en el enfoque cualitativo. Desde esta perspectiva, el enfoque

se orienta hacia una descripción detallada de una realidad educativa específica, una situación particular, o las acciones, sentimientos o percepciones de un grupo de individuos en un contexto concreto. Siguiendo a Guevara, G., Verdesoto, A., y Castro, N. , (2020), se puede afirmar que el propósito de la investigación descriptiva es obtener un conocimiento detallado de las situaciones, costumbres y actitudes predominantes a través de la descripción precisa de las actividades, objetos, procesos y personas (2020, p. 171).

Las preguntas fundamentales que orientan este tipo de investigaciones son las siguientes:

- a. ¿Qué ocurre?
- b. ¿Cómo acontece?
- c. ¿Cuándo sucede?
- d. ¿Dónde se produce?
- e. ¿Qué características tiene?
- f. ¿Qué funciones cumple?

Las respuestas conducen a proporcionar información detallada sobre el objeto de estudio en una realidad específica y claramente delimitada. Estos datos se centran en las características, comportamientos, componentes, estructura u orden en el que se desarrollan ciertos eventos relacionados con fenómenos o hechos educativos. Este tipo de investigación no tiene como objetivo identificar causas o relaciones entre eventos. Como señala Sandelowski (2000), la/el investigador describe una experiencia, una situación desde el punto de vista de los sujetos; no busca interpretar y se mantiene próximo a los datos que recopila.

Como indica Niño (2011), la precisión en la descripción resulta fundamental en este contexto; por lo tanto, se debe evitar el uso de términos ambiguos o polisémicos en este tipo de investigación. Además, se caracteriza por abordar características o rasgos que son observables, verificables, o que están claramente expresados en los testimonios de los participantes de la investigación, como en las entrevistas (Guevara et al., 2020). El objetivo es recopilar toda la información disponible sobre lo que se desea comprender, con el fin de interpretar los significados desde la perspectiva de los sujetos.

En los estudios descriptivos, es crucial proporcionar detalles sobre el contexto en el que se desarrolla la situación, el fenómeno o el hecho en cuestión. Por ejemplo, es necesario indicar si la investigación se lleva a cabo en una escuela pública o privada, especificar en qué distrito se encuentra y señalar el grado que está siendo observado. Estos detalles son clave para lograr una comprensión más completa de los hallazgos. Además, es importante tener presente que, al tratarse de una investigación con un enfoque cualitativo, los resultados no son generalizables a todas las escuelas o aulas del mismo grado. También es fundamental tener una claridad precisa sobre las personas de las cuales se está recopilando la información. Podemos estar trabajando con maestras y maestros de una especialidad, con madres de familia, con directoras o directores, o con un tipo específico de materiales. Estas precisiones son esenciales para que los resultados sean comprensibles y puedan ser discutidos por otros investigadores (Valle, A., Manrique, L., & Revilla, D. , 2022).

Escenario e Informantes Clave

Para tales efectos se escogió la institución universitaria de Barranquilla de la ciudad del mismo nombre; en esta se imparte niveles de pregrado, postgrado e investigación. Para efectos de este estudio se tomará como unidades de análisis a cuatro (4) estudiantes de primer cuatrimestre del técnico profesional del programa Técnico en mantenimiento electromecánico y electrónico industrial correspondiente al segundo cuatrimestre del respectivo período académico, que no sean repitentes y que estén dispuestos a prestar toda la colaboración sin que ello implique una obligación. Así mismo, la cantidad de docentes serán cuatro (4), con grados de maestría y más de 5 años de experiencias en la disciplina de cálculo diferencial.

Es importante resaltar que el investigador trabaja desde hace 7 años en esta institución y en este nivel, además de gozar de la amistad de algunos profesores (facilitadores) y coordinadores de programa, situación le permitió establecer el rapport, término que es descrito por Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987), “como muy necesario e importante en este tipo de estudio; pues se trata de crear un clima de confianza y seguridad psicológica para que las unidades de análisis se sientan dispuestos a expresar sus sentimientos, ideas, proyectos de forma natural (p.67).

En este sentido, la investigación cualitativa emplea diversas técnicas para la obtención de datos. Los resultados y conclusiones varían según la recopilación y el análisis de la información. Entre las técnicas de recolección de datos se encuentran la observación participante, los grupos focales y las entrevistas, entre otras, todas las cuales involucran a los informantes. En el ámbito de la investigación cualitativa, se recomienda la utilización de la entrevista en profundidad debido a su facilidad de aplicación.

La selección de informantes

Antes de abordar la elección de los informantes, resulta fundamental explicar la razón por la cual se recurre a informantes en una investigación cualitativa. En este sentido, según lo expresado por Sánchez (2012),

A medida que las personas atraviesan diversas situaciones, están continuamente interpretando y dando significado a su entorno. Las acciones y palabras difieren entre individuos debido a las experiencias únicas que cada persona ha vivido y a los significados sociales que han aprendido. Además, estas diferencias se ven acentuadas por el hecho de que cada individuo se encuentra en contextos distintos (p. 14).

En este sentido, los informantes desempeñan un papel central en la investigación cualitativa y deben ser escogidos con atención. La elección de los informantes implica decisiones de muestreo tomadas al inicio del estudio y que se complementan a lo largo del trabajo de campo. Hay diversas estrategias para identificar a los posibles informantes, así como distintas maneras de acceder y seleccionar participantes, y todas estas son legítimas. El investigador tiene la responsabilidad de informar y describir detalladamente el proceso de selección de los informantes, con la intención de que el lector pueda entender y contextualizar los resultados de la investigación (Alejo, M., & Osorio, B. , 2016).

En cualquier investigación cualitativa, que se caracteriza por ser un diseño flexible, no se deberían establecer de antemano ni el número ni el tipo de informantes. Estos aspectos emergen durante el propio proceso de acceso al campo por parte del investigador. La disposición a modificar el enfoque después de las entrevistas iniciales es esencial. Lo crucial radica en el potencial de cada "caso" para contribuir al desarrollo de comprensiones teóricas en el área de estudio de la vida social, según señalan Glaser, B. y Strauss, A. (1967).

Ahora bien, los criterios para la selección de los informantes de esta investigación están detallados en el cuadro 1:

Cuadro 1: Criterios de selección de los informantes clave.

Criterios para la selección de los informantes clave.	
Informante clave	Criterios de selección
<i>Estudiantes</i>	• Ser estudiante del nivel universitario. • Cursar la asignatura por primera vez. • Estar dispuesto a colaborar con la investigación. • Disponer de tiempo necesario para participar en la investigación. • Contar con la aprobación de sus representantes si no es mayor de edad.
<i>Docentes</i>	• Ser docente de Matemática ordinario adscrito a la institución universitaria. • Tener experiencia no menor de cuatro (4) años como docente en la asignatura Matemática en el nivel universitario. • Estar dispuesto a desarrollar su capacidad de análisis crítico con relación a la enseñanza del límite de una función de variable real. • Disposición y tiempo para ser entrevistado por el investigador para desarrollar el estudio.

Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Las estrategias de adquisición de datos son sistemas e instrumentos empleados para recopilar y medir información de manera organizada y con un propósito específico. Comúnmente utilizadas en investigación científica, empresarial, estadística y marketing, cada técnica posibilita la recopilación de información de diversos tipos. Por lo tanto,

resulta crucial comprender sus características y tener en claro los objetivos para seleccionar aquellas que se adecuen a la información que se busca obtener. Estas estrategias se dividen en categorías cualitativas, cuantitativas y mixtas. La investigación cuantitativa se orienta hacia la recolección de datos numéricos o precisos, utilizando técnicas estandarizadas y sistemáticas con el fin de obtener información precisa, siendo más aplicable en campos como estadística o ciencias exactas como biología o química (Caro, 2021).

Por otro lado, la investigación cualitativa busca obtener información sobre el contexto y las características de los fenómenos sociales, siendo insuficientes los datos numéricos y requiriendo técnicas que profundicen en las realidades que se desean analizar. Por último, las técnicas mixtas, como su nombre indica, son aquellas que permiten la recopilación simultánea de información cualitativa y cuantitativa (Álvarez-Gayou, 2003).

Las técnicas mixtas, como su nombre lo indica, son aquellas que permiten recolectar información cualitativa y cuantitativa a la vez.

La entrevista

La entrevista se define fundamentalmente como una conversación cuidadosamente planificada, en la cual el investigador plantea una serie de preguntas o temas de discusión a una o varias personas con el objetivo de obtener información específica. Puede llevarse a cabo de forma presencial, telefónica o virtual. No obstante, en ciertos casos, la interacción personal con el entrevistado resulta crucial para captar la información transmitida a través de la comunicación no verbal. Por ejemplo, en una investigación sobre las causas de la deserción escolar en una institución, las entrevistas pueden ser aplicadas, siendo útil entrevistar a diversos actores involucrados, como padres, estudiantes y funcionarios públicos, para obtener una comprensión más profunda de la problemática. Dependiendo de la organización de la entrevista, esta puede ser estructurada, semiestructurada o informal y la no estructurada o en profundidad (Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M., & Varela-Ruiz, M., 2013).

Díaz Bravo et al (2013), establece que una entrevista estructurada se caracteriza por el hecho de que el entrevistador dispone de una lista predefinida de preguntas y se adhiere estrictamente a ellas. En cambio, en una entrevista semiestructurada, existe una guía de preguntas o temas generales, aunque el entrevistador puede formular nuevas

preguntas a medida que surgen aspectos de interés. La entrevista informal carece de una lista predeterminada de preguntas. El entrevistador tiene en mente los temas que desea explorar y los introduce de manera espontánea durante la conversación. Por último, la entrevista no estructurada o en profundidad, es aquella que se realiza sin un guion previo. Sigue un modelo de conversación entre iguales. En esta modalidad, el rol del entrevistador supone no sólo obtener respuestas sino también saber que preguntas hacer o no hacer. En la entrevista en profundidad no hay un guion prefijado sino una serie de temas con posibles cuestiones que pueden plantearse a la persona entrevistada.

Según Ruiz (1999), algunos de los objetivos de la entrevista en profundidad son:

- ✓ Comprender más que explicar
- ✓ Buscar la respuesta subjetivamente sincera.
- ✓ Obtener unas respuestas emocionales frente a racionales.
- ✓ Preguntar sin esquema fijo para las respuestas.
- ✓ Controlar el ritmo de la entrevista en relación con las respuestas recibidas.
- ✓ Alterar el orden y características de las preguntas, e interrumpir cuando es necesario introducir o matizar algo o reconducir el tema.
- ✓ Explicar el sentido de la pregunta tanto como sea necesario y permitir crear juicios de valor u opiniones.
- ✓ Encontrar un equilibrio entre familiaridad y profesionalidad.

En la investigación se utilizó como técnica para recolectar la información el análisis documental y la entrevista. Por tanto, se empleará el análisis documental con el propósito de analizar y obtener la información escrita, audiovisual, digital, electrónica, entre otros, orientada con las teorías, enfoques, reglamentos e investigaciones relacionadas con el tema de investigación, así como todo tipo de información relevante al objeto de estudio.

En este contexto López, N., & Sandoval, I. (2016) afirman, que:

La entrevista es la comunicación interpersonal establecida entre investigador y el sujeto de estudio a fin de obtener respuesta verbales a los interrogantes planteados sobre el tema propuesto (p.10).

En cuanto a la entrevista, la misma fue de tipo no estructurada o en profundidad, la cual facilitó llegar a las raíces del tema estudiado, permitiendo contrastar lo señalado por los docentes acerca del conocimiento sobre el límite de una función de variable real, así

como, el punto de vista de los estudiantes en cuanto al mismo tema, de manera que se logró identificar la forma de cómo ocurre el obstáculo epistemológico “*conocimiento unitario y pragmático*”, posteriormente, se pudo generar la triangulación, de acuerdo a lo anterior Muñoz (1997), quien afirma, que *el cruce de datos de origen diferente acerca de una misma realidad, suele ser fértil y provechosa, pues conduce a aumentar considerablemente la confiabilidad y validez de los resultados* (p.27).

La entrevista no estructurada o en profundidad no se redactará a priori todas las preguntas, se tendrá un gran conocimiento de las dimensiones a tratar y se irán elaborando las cuestiones en función de las respuestas de los entrevistados, incorporando dimensiones nuevas, etc.

Procedimiento

Para Martínez (2008), toda investigación plantea tres tareas básicas: hallar la información, categorizarla e interpretarla, sin necesariamente, realizarla en tiempo sucesivo, sino que se entrecruzarán continuamente.

En ese orden de idea, la investigación consistió, en primer lugar, recoger la información mediante la entrevista semiestructurada a los informantes clave: Docente y alumnos, mediante las preguntas elaboradas, contenidas en un cuestionario guía y registradas en un grabador.

Luego, se extrajo cada respuesta acerca de las concepciones en relación al límite de una función real de variable real, su definición, su aplicación, el desarrollo de una estrategia didáctica matemática basada en la apropiación del concepto del límite de una función real de variable en el nivel universitario.

Todo lo anterior, en sintonía con los objetivos de la investigación, elementos que orientaron la categorización, para que finalmente se realice el proceso de triangulación con el fin de verificar la información recabada, organizando las ideas de los informantes clave en un marco de referencia, para comparar y contrastar los relatos emitidos por cada informante, quienes con el mayor grado de libertad narrarán oralmente sus experiencias y conocimientos.

A continuación, se presenta un cronograma de actividades, en forma esquemática, que facilitó el desarrollo de la investigación.

Cuadro 2: Cronograma de actividades.

Preparación	Contacto inicial con las Actividades informantes clave	
	Comentarios	Acuerdos para la entrevista en profundidad Normas de la entrevista en profundidad
Recolección de la información	Entrevista en profundidad con los informantes clave	Relatos orales
		Comentarios sobre las dificultades comunes en la enseñanza del tema “Límite de una función”
		Comentarios sobre la Teoría de Situaciones Didácticas
Análisis Cualitativo de la Información	Codificar	Triangulación
	Categorizar	
	Teorización	
Informe final	Reflexión	Contexto Generativo
	Elaboración del trabajo final	
	Presentación de los hallazgos	

Análisis e interpretación de la información

En la investigación cualitativa, se busca obtener información directamente relacionada con el fenómeno bajo estudio, con el propósito de revelar las estructuras que dan significado a las conductas de los sujetos investigados. Este enfoque investigativo persigue un alto nivel de objetividad mediante la meticulosa elección de unidades de observación o informantes clave que demuestren empatía, disposición y confianza, factores esenciales para asegurar la confiabilidad y validez de los resultados. La metodología cualitativa emplea técnicas refinadas que controlan la subjetividad, manteniéndose dentro de los estándares del rigor científico, como la utilización de entrevistas en profundidad y la observación participante.

De acuerdo con Amescua, M. & Gálvez, A. (2002), la etapa de análisis de datos posiblemente constituye la parte más desafiante de la investigación cualitativa. Tanto los defensores teóricos del método como aquellos que realizan investigaciones cualitativas tienden a ofrecer poca información sobre cómo transforman los datos en interpretaciones que puedan ser respaldadas científicamente.

Estos autores sostienen que, independientemente del enfoque analítico elegido, llega un momento en el que el investigador se enfrenta a solas con los datos, y es entonces cuando realmente surgen las dificultades. En este punto, debe responder preguntas tales como: ¿Cómo llevar a cabo técnicamente las sugerentes propuestas de la teoría?,

¿Cómo gestionar una información tan variada?, y ¿Cuál debería ser el enfoque para identificar el flujo de conceptos y proposiciones que sugiere el análisis cualitativo?

En el enfoque cualitativo, se utiliza el método hermenéutico, que busca la interpretación de los significados humanos, es decir, comprender las interpretaciones que las personas asignan a sus acciones de manera comprensiva. Por lo tanto, el investigador emplea este método en todas las etapas del estudio para que surjan las categorías y subcategorías pertinentes. Para interpretar la información del estudio, se aplicó un nivel de abstracción en relación con las categorías y subcategorías emergentes, lo que permitió, en primer lugar, formular hipótesis y luego desarrollar teorías.

Categorización

Consistió en describir consistentemente, las narraciones realizadas por los informantes clave una vez registrada en la matriz respectiva, las cuales debieron ser vaciadas por fecha de recolección, y en concordancia con los objetivos de la investigación con la intención de definir las categorías emergentes.

Un punto crucial acerca de la reducción de información mediante la categorización y subcategorización (categorías secundarias) es que se reconsideraron las preguntas iniciales de la investigación que se habían delineado en el primer momento o capítulo. Este ajuste tuvo como objetivo crear dimensiones más específicas, que orientaran el proceso de construcción del modelo teórico final. Como resultado de este proceso, se presenta el cuadro 3, que contiene las preguntas generadas y dimensiones finales que guiaron la investigación, la recopilación y el análisis subsiguiente de la información. Es importante destacar que estas dimensiones sirvieron como un marco para desarrollar el guion de la entrevista, detallado en el anexo A. Se aclara que este guion se diseñó de manera general, aplicándose tanto a profesores como a estudiantes, y se adaptó "verbalmente" para ajustarse a las particularidades lingüísticas de cada grupo durante la realización de la entrevista.

Cabe destacar, que la investigación en este procedimiento, muestra su proceso lógico lineal al iniciar con las interrogantes de la investigación producto del planteamiento del problema, descritas en el contexto empírico, estas a su vez permiten ordenadamente el establecimiento de los objetivos a lograr. Para ello, se toman esas interrogantes y se generan debido a ellas, unas más específicas y estas a su vez permiten asentar las áreas

o dimensiones en las cuales se va a apuntalar la investigación por medio de la metodología previamente planteada. Estas dimensiones vienen a ser las fuentes de donde emergen las categorías y subcategorías correspondientes, aspectos clave para el análisis de la información.

Cuadro 3: Dimensiones establecidas para orientar el proceso de categorización y subcategorización de la información recolectada en las entrevistas.

Interrogante inicial	Interrogante (s) generada (s)	Dimensión final
.- ¿Qué dificultades presentan en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función, los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla?	¿Qué características tiene la didáctica empleada por el docente, en la enseñanza y desarrollo de la definición de límite de una función?	Práctica pedagógica del docente de cálculo diferencial
.- ¿Qué características presentan las concepciones que giran en torno a la definición de límite de una función, junto a los errores que comúnmente están asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje?	¿Qué aspectos son considerados como relevantes durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de la definición de límite junto a los errores que comúnmente están asociados a esos procesos?	Concepto de Límite de una función de variable real según las concepciones del docente y el estudiante
.- ¿De qué manera afecta el obstáculo epistemológico “Conocimiento Unitario y pragmático” el aprendizaje de la definición del Límite de una función, por parte de los alumnos de	¿Cómo influye el “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición del Límite de una función, en el aprendizaje por parte de los alumnos de	Consecuencias del Conocimiento Unitario y Pragmático

pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla?	pregrado en el módulo de Cálculo diferencial?	
.- ¿Qué estrategias de enseñanza y aprendizaje en conjunto podrían identificar el conocimiento unitario y pragmático presente en la situación didáctica empleada por el docente de matemáticas, en el desarrollo de la definición de límite de una función en la Institución Universitaria de Barranquilla?	¿Qué fundamentos o elementos teóricos de la práctica pedagógica son necesarios considerar, a fin de estructurar una didáctica que permita identificar el conocimiento unitario, durante el desarrollo de la definición de límite de una función, para su superación?	Elementos teóricos esenciales para la identificación del obstáculo epistemológico “conocimiento unitario pragmático” en el desarrollo de la definición de límite de una función.

Fuente: Elaboración propia.

Dado que es el investigador quien atribuye significado a los resultados de su investigación, uno de los aspectos fundamentales a considerar es la creación y separación de temas a partir de los cuales se recopila y organiza la información. En este sentido, distinguimos entre categorías, que representan un tema en sí mismo, y subcategorías, que detallan ese tema en aspectos más específicos. Estas categorías y subcategorías pueden ser predefinidas, es decir, concebidas antes del proceso de recopilación de información, o emergentes, surgiendo a medida que se identifican aspectos significativos durante la propia investigación. Esta distinción se relaciona con el planteamiento de Elliot al diferenciar entre "conceptos objetivadores" y "conceptos sensibilizadores", donde las categorías predefinidas corresponderían a los primeros y las categorías emergentes a los segundos (Elliot, 1990).

Triangulación

Como señala Cea (2001), la triangulación como estrategia de investigación no es novedosa, aunque el diseño de los procedimientos, que se requieren para utilizar y compaginar los diferentes métodos, no se debate hasta los años 50 del siglo XX. Por

tanto, es a partir de estos años, cuando se inician las investigaciones que sentarán las bases para un nuevo enfoque multimétodo y en el que aparecerán autores que serán clave para la articulación y desarrollo de la triangulación como estrategia de investigación, entre los que cabe destacar a Campbell, D. T. y Fiske, D. (1959) y a Denzin (1970). Con estos autores se trazan dos líneas de desarrollo metodológico en relación a la triangulación: mientras que Campbell, D. T. y Fiske, D. (1959) entienden la triangulación como medio para la validación de una investigación, es con Denzin (1970) con quien se desarrolla el cuerpo teórico del concepto y sus tipologías.

El concepto de 'proceso de triangulación hermenéutica' se refiere a la recopilación y al cruce dialéctico de toda la información relevante relacionada con el objeto de estudio en una investigación, utilizando los instrumentos apropiados. En esencia, este proceso constituye el conjunto de resultados de la investigación. Por lo tanto, la triangulación de la información es una acción que se lleva a cabo una vez que ha finalizado el trabajo de recopilación de la información. El proceso práctico para llevar a cabo esto implica los siguientes pasos: elegir la información recopilada durante el trabajo de campo; realizar triangulación de la información por cada entidad o grupo; realizar triangulación de la información entre todas las entidades o grupos investigados; hacer triangulación de la información con los datos obtenidos a través de otros instrumentos; y finalmente, llevar a cabo la triangulación de la información con el marco teórico (Cisterna, 2005).

Fases de la investigación

Como se mencionó previamente, se empleó el enfoque hermenéutico como método, y a partir de este, se propusieron las etapas siguientes para la ejecución del proyecto, las cuales surgieron de una integración de las sugerencias presentadas por Rodríguez (2007) y Vargas (2007).

Fase 1. Recopilación documental

Se refirió a la recopilación de información de tipo documental relacionada con el área de estudio. En esta etapa, se detallaron los antecedentes, las bases teóricas, legales y empíricas que fundamentan la investigación, es decir; se recopilaron los conceptos, construcciones, categorías, hipótesis, preguntas, resultados y conclusiones derivadas de otras investigaciones, y que están presentes en la sección II del trabajo.

Fase 2. Recolección de información

En esta etapa, se llevó a cabo la creación de los instrumentos y la aplicación de técnicas e instrumentos para recopilar información en la Institución Universitaria de Barranquilla, ubicada en la ciudad de Barranquilla, Colombia, que es el escenario vinculado al trabajo. Para este propósito, se involucraron tres (3) docentes de matemáticas que enseñan en el nivel universitario y tres (3) estudiantes en el nivel de pregrado. Estos participantes fueron entrevistados mediante un conjunto de preguntas estructuradas, lo que resultó en la identificación de categorías y subcategorías.

Fase 3. Presentación de la información obtenida

En esta etapa, se estructuró y categorizó la información recopilada, y se llevó a cabo la exposición ordenada y formal de los resultados de acuerdo con cada objetivo establecido.

Fase 4. Análisis e interpretación de la información

En esta sección, se procedió al análisis e interpretación de los datos recopilados como resultado de la búsqueda de información y la aplicación de los instrumentos correspondientes. Rodríguez (2007) sugiere que una guía efectiva para llevar a cabo esta fase es abordar las preguntas relacionadas con el qué, cuándo, cómo, con qué, con quiénes y para qué se llevan a cabo cada una de las actividades. Además, señala que los diseños de investigación indican y dirigen hacia un conjunto específico de técnicas de análisis, por lo que, si la investigación de campo adopta uno de los diseños del método cualitativo, el análisis se llevará a cabo bajo la perspectiva del paradigma interpretativo.

Fase 5. Sistematización de la información encontrada

Se hizo hincapié en un criterio de selección basado en la relación con los aspectos teleológicos de la investigación, los aportes y las características que ayudaron a proporcionar una interpretación de la realidad estudiada. Esto se logró a partir de la información proporcionada por los actores sociales, quienes fueron los informantes clave y compartieron sus pensamientos y experiencias, entre otros aspectos. De esta manera, se buscó comprender el proceso cognitivo en el que participan, la interacción que llevan a cabo con sus pares, así como los sentimientos y significados generados, todo ello con el fin de construir el aporte teórico.

Recorrido ontoepistémico de la investigación

El recorrido ontoepistémico de la investigación se refiere al trayecto o camino que sigue la investigación en términos de la ontología y epistemología, es decir, en la comprensión de la realidad (ontología) y en la postura epistemológica asumida para obtener conocimiento sobre esa realidad.

La postura epistémica hace referencia a la posición o perspectiva adoptada respecto a la naturaleza y adquisición del conocimiento. Es decir, cómo se concibe la relación entre el sujeto que investiga y el objeto de estudio, y qué métodos y enfoques se consideran válidos para obtener conocimiento.

Postura epistémica

El investigador determina la postura epistémica de la investigación mediante el uso de una imagen o matriz epistémica. La matriz epistémica representa el punto donde se encuentran distintas formas de conocimiento adoptadas por las culturas humanas y la realidad. En este punto, estos elementos convergen de tal manera que sirve como punto de partida para atribuir significados de regularidad a los conceptos, categorías, leyes y principios que serán simbolizados y transformados dialécticamente. Estas transformaciones nos conducirán a niveles más avanzados de conocimiento, y son precisamente estos niveles los que determinarán la dirección ideológica de la historia (Rojas, 2014).

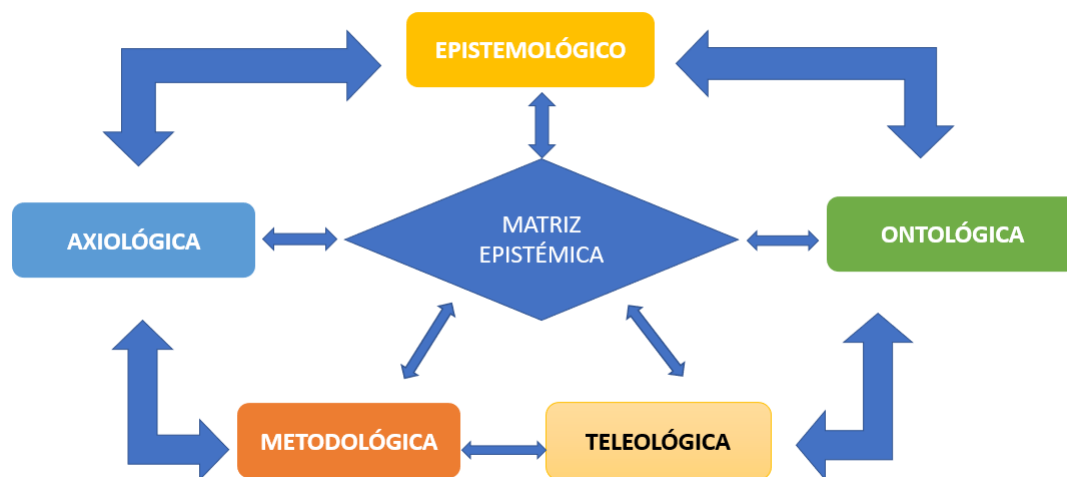
Otorga solidez al significado del conocimiento que se genera y propone. La base epistémica permite que el conocimiento individual adquiera significado colectivo en el contexto global, sirviendo como cimiento para el espíritu de la época y contribuyendo a mejorar las condiciones tanto materiales como espirituales de la vida. La palabra "epísteme" proviene de "epi", que significa "sobre", y "steme", derivado del sánscrito que denota "tenerse en pie" o "fijarse sobre" (Martínez Migueléz, 1997, p. 155).

Hernández (2008) indicó que la episteme es el espacio en el que el ser humano se sitúa para adquirir conocimiento y actuar de acuerdo con sus reglas estructurales. Las ciencias humanas forman parte de la episteme moderna que configura la identidad del individuo capaz de forjar "su propia historia", ya que la episteme define al ser humano como tal.

La matriz epistémica, en consecuencia, representa un sistema de condiciones para el pensamiento, prelógico o preconceptual, generalmente inconsciente, que constituye la esencia misma de la vida y la forma de ser. Esta matriz da origen a una Weltanschauung o visión del mundo, a una mentalidad e ideología específicas, a un Zeitgeist o espíritu de la época, a un paradigma científico, a un conjunto de teorías particulares y, en última instancia, también a un método y a técnicas o estrategias apropiadas para investigar la naturaleza de una realidad, ya sea natural o social. En resumen, según Martínez, la verdad de un discurso no radica en el método, sino en la episteme que lo define (Martínez, p. 18).

De acuerdo lo anterior, el gráfico 1 se presenta la matriz epistémica de la investigación, respaldada por la perspectiva de Popper, K. y Eccles, J. (1985), quienes expresan que la matriz epistemológica "...origina o determina una conformación o estructura de la mente", proyectando la investigación a través de seis dimensiones: teleológica, epistemológica, axiológica, ontológica, metodológica y tecnológica" (p. 185).

Gráfico 3: Matriz epistémica de la investigación.



Fuente: Elaboración propia.

Dadas las peculiaridades de la investigación, se puede situar desde diversas perspectivas:

- **Epistemológico:** se adopta un enfoque cualitativo junto con el paradigma interpretativo. Esto se debe a que estas elecciones facilitaron la comprensión de los

significados atribuidos por los actores sociales. Además, la investigación se sitúa en el ámbito de las matemáticas, particularmente en el desarrollo del pensamiento métrico.

- **Ontológica:** la idea es proyectar, partiendo del conocimiento integral (mundo de vida) del actor social (docentes), su conocimiento intrasubjetivo para generar posiciones, enfoques y procesos en el obstáculo epistemológico, conocimiento unitario y pragmático en el límite de una función real de variable real. Esto se debe a que el docente, a través de su interacción intrasubjetiva y mediante el modelo didáctico final, ejerce influencia en la construcción de los esquemas mentales de los estudiantes.

- **Teleológica:** La investigación se sumerge en las dimensiones internas de los actores sociales (docentes y estudiantes) de la institución universitaria de Barranquilla. Se enfoca especialmente en la relación entre sujeto, objeto de estudio, significado, función, contexto y ambiente de aprendizaje. Esto se debe a que el aprendizaje teórico-práctico del límite de una función real de variable real (praxis educativa) se construye, deconstruye y reconstruye en el contexto real (acción). Este proceso implica la utilización de conceptos, afirmaciones y conexiones que pueden modificarse en función de nuevas experiencias, dando lugar a una realidad social que se construye y deconstruye de manera continua en la cotidianidad.

- **Axiológica:** se muestra respeto hacia los valores inherentes a la investigación, al investigador y a los actores sociales (docentes y estudiantes) de la institución universitaria de Barranquilla. Este respeto se manifiesta cuando estos actores expresan sus opiniones sobre los elementos y factores que influyen en el desarrollo del Límite de una función real de variable real en dicho proceso.

- **Metodológico:** se adopta una metodología propia de la investigación cualitativa, centrándose en el fenómeno mencionado, es decir, en el obstáculo epistemológico, conocimiento unitario y pragmático del límite de una función real de variable real. Además, se emplea la hermenéutica para el análisis e interpretación de los textos y la información recopilada a través de entrevistas, relacionadas con la problemática de estudio.

CAPÍTULO IV

CONTEXTO CRÍTICO

En este capítulo presentan cada uno de los puntos de vista de los actores sociales de la investigación sobre el tema en estudio. Dado el carácter investigativo del trabajo, la información aportada por los informantes claves, se concentró en un conjunto de entrevistas transcritas, que luego se redujeron a datos analizables mediante la codificación y categorización (Cabrera, 2005). Es importante tener en cuenta que se hizo un proceso iterativo por la necesidad de categorizar y subcategorizar, haciendo uso del programa Atlas.ti, donde se construyó un mapa de redes semánticas para el análisis del mismo.

Las redes semánticas obtenidas a través del programa Atlas.ti se hicieron bajo cuatro categorías específicas: 1) Identificación de los obstáculos epistemológicos; 2) Proceso de enseñanza; 3) Concepto de Límite de una función de variable real; 4) Conocimiento Unitario y Pragmático y 5) Situaciones Didácticas.

Las redes de significados -llamadas también redes semánticas- son las concepciones que las personas hacen de cualquier objeto de su entorno, de acuerdo a Figueroa (1976), mediante el conocimiento de ellas se vuelve factible conocer la gama de significados, expresados a través del lenguaje cotidiano, que tiene todo objeto social, conocido.

La técnica de redes semánticas, proporcionan una forma experiencial de acceder a la organización del conocimiento. También muestra cómo fue percibida la información de manera individual (Noriega, J. Á. V., Pimentel, C. E., & de Albuquerque, F. J. B. , 2005).

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, la red construida a través del programa Atlas. Ti es la siguiente:

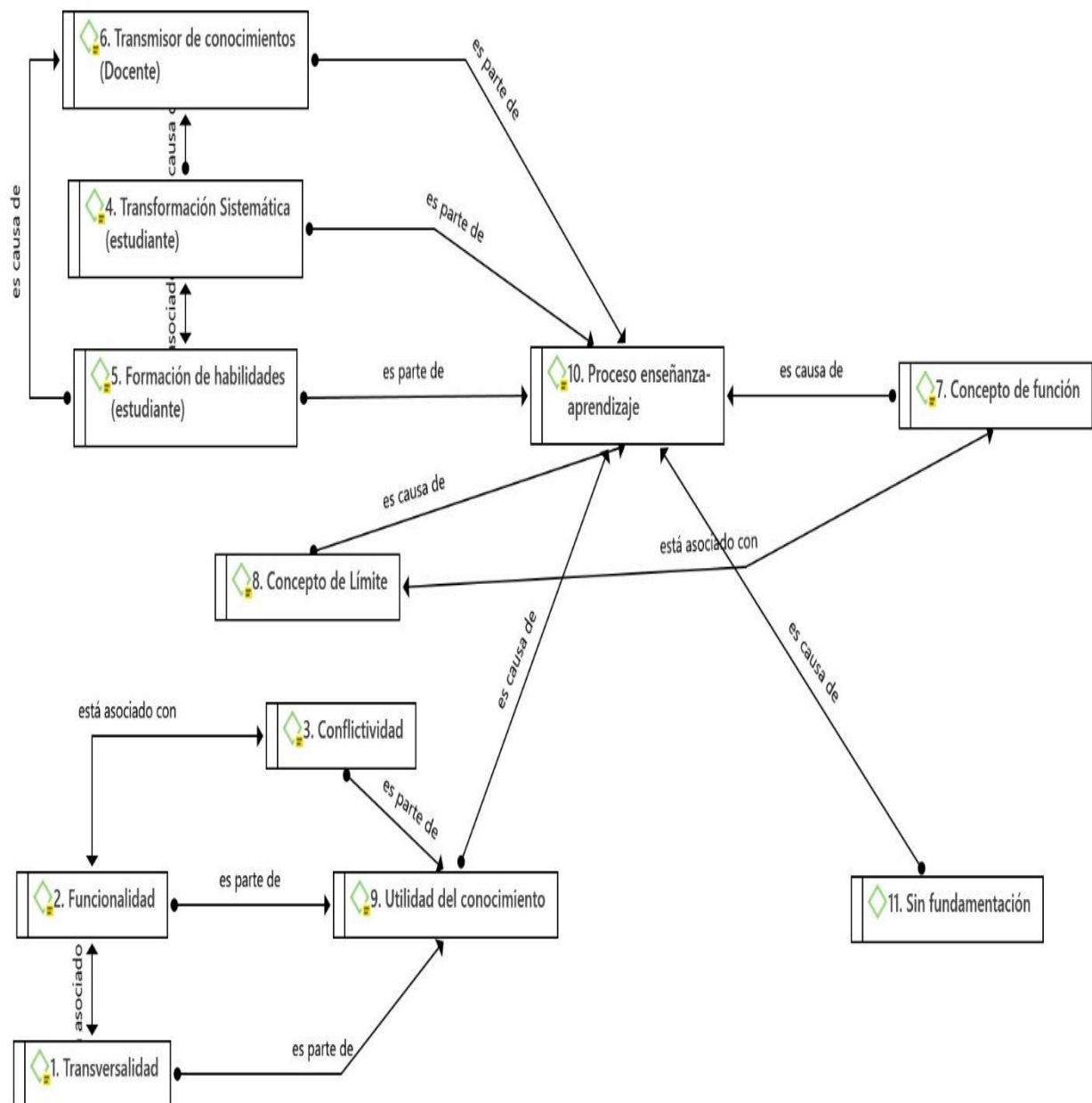


Gráfico 4: Red Semántica obtenida a través de la técnica de entrevista de los informantes claves. Programa Atlas. Ti. Elaboración Propia.

Describiendo las categorías y subcategorías

Esta sección presenta las categorías y subcategorías, que constituyeron la guía para el trabajo de triangulación de fuentes e interpretación por parte del investigador, lo que a su vez, permitió obtener hallazgos importantes que esclarecen el panorama investigativo e influyen en la generación teórica deseada en esta investigación.

Luego de las entrevistas al grupo de docentes y estudiantes, se obtuvo un conjunto de opiniones y perspectivas sobre las dimensiones asociadas con las interrogantes iniciales de la investigación. Durante este proceso se aplicó la reducción de la información obtenida en las entrevistas a los informantes clave mediante la categorización, subcategorización y saturación. Este proceso de reducción consistió en la revisión detallada de las transcripciones de las entrevistas y el subrayar cada expresión, frase, palabra, párrafo u oración que dejara ver las ideas principales, secundarias o asociadas de los entrevistados sobre cada punto conversado.

Cuadro 4: Categorías y subcategorías que emergen de las dimensiones.

Dimensión	Categoría(s)	Subcategoría(s)
Práctica pedagógica del docente de cálculo diferencial	Proceso de enseñanza la definición de límite de una función real	1.- Concepciones teóricas y epistemológicas. 2.- Identificación de Obstáculos o errores a nivel epistemológico presentes en el desarrollo del concepto de limite
Concepto de Límite de una función de variable real según las concepciones del docente y el estudiante	Importancia de la definición de límite de una función.	3.- Conceptualización del límite de una función real de variable real. 4.- Concepto muy difícil de aprender
Consecuencias del Conocimiento Unitario y Pragmático	Ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático	5.-Adopción de una sola postura sobre estrategias de enseñanza. 6.- Utilidad del Conocimiento y Pragmatismo

Elementos teóricos esenciales para la identificación del obstáculo epistemológico “conocimiento unitario pragmático” en el desarrollo de la definición de límite de una función	Conformación de una estructura didáctica	7.- Estrategias y recursos para estructurar una didáctica orientada a la identificación del conocimiento unitario y pragmático
---	--	--

Fuente: Elaboración propia.

Luego de obtener las subcategorías (cuadro 4), se llevó a cabo el proceso de validez interna y triangulación de fuentes y así se estableció la fiabilidad de los datos recopilados (cuadros del 4 al 18) y se logró contrastar las voces de los informantes claves con la interpretación del investigador y los referentes teóricos previamente expresados en el **Capítulo II** del contexto teórico. Se aclara que esto se hizo al final del establecimiento de cada grupo de subcategorías en cada interrogante de la investigación y estará representado en los cuadros numéricamente respectivos a partir de aquí y hasta el final del capítulo. Para ello se mantuvo la siguiente secuencia:

Interrogante → **Dimensión** → **Categoría** → **Subcategorías** → **Estudio Objetivo Inicial**

Cuadro 5: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves docentes.

Subcategoría 1.-Concepciones teóricas y epistemológicas.(**Objetivo 1**)

Informante docente 1	Informante docente 2
<i>... estoy de acuerdo con propiciar en los estudiantes diferentes tipos de aprendizaje que pueden ser memorísticos y algorítmicos...</i>	<i>...a través de la historia de la matemática, intento promover en los estudiantes una forma particular de abordar el estudio de las matemáticas...</i>
Informante docente 3	Informante docente 4

<i>...con mi método de enseñanza busco incentivar un pensamiento creativo en el estudiante que le permita aplicar de manera razonada la información, descubrir y, en otras palabras, construir su conocimiento ...</i>	<i>...para mi es esencial que los alumnos, conozcan, las estructuras de la matemática de manera axiomática, pues esto les permitiría resolver los problemas y aplicaciones que luego se les presenten...</i>
--	--

Interpretación del investigador

Cualquier estrategia a utilizar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas estará sustentada en alguna percepción sobre la naturaleza de las matemáticas. Esta percepción influirá en el tipo de actividades y ambiente de aprendizaje que el profesor proponga a sus estudiantes para inducir en ellos el aprendizaje de los conceptos matemáticos (Barrantes, 2008). En lo aportado por los docentes se puede notar que las creencias están presentes para justificar sus concepciones sobre la enseñanza de la matemática, al respecto Ponte (1992) sostiene que las creencias tienen una naturaleza proposicional y que las concepciones son constructos cognitivos que pueden verse como el marco subyacente que organiza los conceptos en el individuo. Para el investigador, de acuerdo a lo expresado por los actores sociales el proceso de enseñanza de las matemáticas está más ligada a la concepción instrumentalista, que promueve una enseñanza de las matemáticas fundamentalmente de tipo memorístico y algorítmico.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 6: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves docentes.

Subcategoría 2.- Identificación de Obstáculos o errores a nivel epistemológico presentes en el desarrollo del concepto de límite.

(Objetivo 1)

Informante docente 1	Informante docente 2
<i>... el tema de límites, presenta gran dificultad para su aprendizaje en los estudiantes, partiendo de que le cuesta mucho entender la definición de límite de una función, por lo que presentan serias dificultades en la aplicación ...</i>	<i>... la enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo es un proceso complejo para el estudiante, es claro que el concepto de límite de una función en realidad un ente abstracto, aunado a las deficiencias en algebra elemental como por ejemplo la factorización ...</i>
Informante docente 3	Informante docente 4

... los estudiantes presentan grandes dificultades para hacerlos entrar de verdad en el campo del cálculo y hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria, la definición de límite es poco comprensible por los alumnos y la parte algebraica muy deficiente ...	... ciertos conceptos de cálculo tienen un cierto grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. El concepto de límite ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo y su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, es problemático enseñarlo y aún más aprenderlo ...
--	---

Interpretación del investigador

A pesar que el resultado de los cuatro docentes fueron totalmente diferentes en lo que respecta al tipo de obstáculo o errores que ellos identificaron en sus estudiantes, cuando abordaron el tema de límites de una función real de variable real, dichos resultados coincidieron en un mismo tipo de obstáculo que sin duda está enmarcado en una epistemología sistemática, ya que la existencia está justificada por la coherencia entre campo conceptual (la necesidades detectadas por los docentes) y cuyos conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas (Schubring, 1986). Por otro lado, ninguna de las apreciaciones dadas por los docentes, coinciden en los reconocimientos de algún obstáculo epistemológico propuestos por Gastón Bachelard y Guy Brousseau. *“En la Educación, la noción de obstáculo pedagógico es igualmente desconocida. Son pocos los docentes de ciencias que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión”* (Bachelard G. , 1999; Brousseau G., 1997). No se equivocaron estos autores al escribir en sus artículos y libros científicos, lo preocupante que quiénes imparten el conocimiento, desconozcan el valor de reflexionar el conocimiento que sus estudiantes poseen al momento de aprender.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 7: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes clave docentes.

<u>Subcategoría 3.-</u> Conceptualización de límite de una función real de variable real asociados a su práctica de aula. (Objetivo 2)	
Informante docente 1	Informante docente 2

<i>... inicio con el gráfico de una función real de variable real, sus características en el plano real y establezco la definición formal de límite, mostrando su simbología...</i>	<i>...se hace un recuento del cuerpo de los números reales, el concepto de función, graficación y se define límite de la función real de variable real, expresando luego los teoremas correspondientes...</i>
Informante docente 3	Informante docente 4
<i>...comienzo con la definición formal o de las técnicas algorítmicas, se dan ejemplos aplicando la definición y pasamos a los teoremas y definiciones...</i>	<i>... lo hago apoyado en su carácter instrumental como herramienta para la solución de problemas tanto al interior de las matemáticas como de ciencias aplicadas como la Física, la Ingeniería...</i>

Interpretación del investigador

De esta manera, los docentes entrevistados convergen sus opiniones en un punto común, que se refleja en las primeras definiciones que se otorgaron para los conceptos de función y límite de una función en el siglo XX (Sastre, V., Rey, G., & Boubée, C. , 2008). Sin embargo, la pregunta que se les planteó no fue respondida en términos de conceptualización, sino a través de representaciones. Hoy día, dicha conceptualización está dada en términos de correspondencia y en representaciones. Además, para Tall y Vinner (1998) La definición formal da precisión y rigor matemático, pero, encapsula las situaciones y procesos que le dan sentido al concepto, ocultando su significación y complejidad. Para estos autores, en la Educación Superior generalmente la definición de límite se introduce a través de la definición formal o de las técnicas algorítmicas para su cálculo. Investigaciones en Educación Matemática han evidenciado que la definición de un concepto no garantiza la comprensión del concepto; una cosa es la imagen del concepto y otra la imagen de la definición que se forman los estudiantes.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 8: Validez interna. Triangulación de fuentes Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes claves docentes.

<u>Subcategoría 4.-</u> Concepto muy difícil de aprender. Objetivo 2	
Informante docente 1	Informante docente 2

<i>...durante el tiempo que tengo dando este contenido, he visto con preocupacion que al estudiante le cuesta mucho su aprendizaje, a pesar de haber aplicado diferentes formas de enseñanza ...</i>	<i>... la dificultad radica en lo abstracto de la definición, sobre todo en el manejo de los simbolos y mas complicado es cuando se solicita su aplicación en la solucion de problemas ...</i>
Informante docente 3	Informante docente 4
<i>...en realidad es un concepto complejo y el estudiante solo le queda memorizar la estructura matematica de la definicion ...</i>	<i>... considero que el estudiante aplica mas los teoremas en la resolucion, con desconocimiento de la definicion de limite, todo es mecánico...</i>

Interpretación del investigador

Como se puede observar, los cuatro docentes están al tanto de las dificultades que están presentes durante la enseñanza del concepto de límite de una función. Sobre este particular, Hitt (2003) sostiene, que para adquirir el concepto de límite no es suficiente con dominar procesos algorítmicos asociados al mismo, se requiere además, de traspasar el obstáculo que no permite distinguir el concepto de infinito potencial y actual en su uso coherente en las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos (p.5). señala además el autor antes citado, que para comprender el concepto de límite de una función cuando $x \rightarrow c$ ("x" tiende a "c"), comprender límites en infinito y límites infinitos, se debe hacer desde un punto de vista intuitivo, usando la aproximación numérica y la interpretación gráfica"...El concepto de límite se puede interpretar de ejemplos de la vida cotidiana como: El límite de velocidad, en física el límite de elasticidad, o en las playas cuando marcan con boyas el límite hasta donde pueden nadar para no correr peligro...se deduce que se puede aproximar cierta cosa pero que nunca debe de ser rebasado en ocasiones ese valor límite, el mismo no se toca, se acerca muchísimo a esa marca pero nunca se toca." Pero para Resnick (2008) esto indica que las ideas primitivas que tienen los alumnos son reforzadas por la manera que este profesor de matemáticas introduce el tema de límites. La construcción de la noción de límite por parte del estudiante bajo estos términos creará una dificultad más en la adquisición del concepto de límite. Por tanto, la construcción del concepto de límite enfrenta dificultades de aprendizaje que tienen que ver con la complejidad del concepto en sí y dificultades de aprendizaje con la forma como el docente lo enseña.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 9: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático. Informantes clave docentes.

Subcategoría 5.- Adopción de una sola postura sobre estrategias de enseñanza. Objetivo 3

Informante docente 1	Informante docente 2
<i>...creo que cada docente tiene su propia forma de planificar y desarrollar la clase correspondientes al tema de límite de una función, es decir tiene dominio de estrategias y metodologías a las cuales se ha adaptado su enseñanza...</i>	<i>...si la postura es evaluada y se demuestra que vale la pena adoptarla, no tengo problema en probarla, eso es crecimiento profesional, pues no podemos pensar que las sabemos todas....</i>
Informante docente 3	Informante docente 4
<i>...como docente debo estar abierto a los cambios, mas cuando estamos conscientes, de que la forma en que hasta ahora hemos enseñado los conceptos del calculo diferencial, no reportan mejoría en cuanto al aprendizaje en los estudiantes ...</i>	<i>...No estoy de acuerdo, por que estaria en contra de la autonomia que tiene el docente de seleccionar las estrategias que considere necesarias para la enseñanza...</i>

Interpretación del investigador

Cada día cobra más importancia para diversos profesionales de la educación una reflexión seria sobre la didáctica. No sólo porque el olvido de sus teorías y principios, de sus particularidades metodológicas y sus modos de operar ha desembocado en la improvisación y el facilismo educativo, sino porque en el saber-hacer mismo de la didáctica están implícitas las claves de la profesión docente (Vásquez, 2010). Las estrategias de enseñanza son recursos o procedimientos utilizados por los que tienen a su cargo la enseñanza con el fin de promover aprendizajes significativos (Mayer, 1984; Shuell, 1988; West, Ch. K., Farmer, J. A. y Wolff, P. M., 1991; Díaz B.. F; y-Hernández-R, G., 1999). Para obtener buenos resultados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matematicas resulta de vital importancia, que el profesor conozca desde un inicio cual es el nivel de partida de los conceptos esenciales de la enseñanza precedente y en que nivel está presente el mismo en cada uno de los estudiantes. (Brito Vallina, 2010). Toda influencia del diagnóstico y la utilidad de lo que se logre con el mismo, debe permitir un desarrollo eficiente de la clase, como la célula básica del trabajo de la escuela, ya que es en la misma en la que se garantiza el éxito de todo proceso educativo con los estudiantes.

Por otra parte, el profesor universitario no puede limitarse solo a la transmisión de conocimientos, si no que además debe estimular en los estudiantes la

avidez de adquirir los mismos; de ahí la importancia de encaminar la atención hacia el estudiante como elemento central del aprendizaje, por tanto, es recomendable optar por métodos activos con el fin de garantizar una calidad elevada de la enseñanza, que ayuden a dinamizar este proceso y lo conviertan en una actividad en la que, tanto profesor como estudiante, colaboren simultáneamente.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 10: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático. Informantes claves docentes.

Subcategoría 6.- Utilidad del Conocimiento y Pragmatismo. Objetivo 3

Informante docente 1	Informante docente 2
<i>... pienso que al mantener un conocimiento unitario es posible simplificar un estudio de cualquiera, pues al explicar el todo se puede explicar sus partes...</i>	<i>...Para conocer la realidad en las aulas es necesario, primero la reflexión como docente y atacar los inconvenientes presentes en las clases, por lo que se debe estar siempre preparado para aceptar los cambios ...</i>
Informante docente 3	Informante docente 4
<i>... estoy de acuerdo en realizar acciones concretas, en la búsqueda de soluciones de problemas en la enseñanza de las matemáticas ...</i>	<i>... me gusta enseñar un nuevo conocimiento, comenzado por su definición y luego expongo una serie de ejemplos del tema estudiado, o señalando simplemente uno de sus usos específicos...</i>

Interpretación del investigador

Dice Bachelard G. (1999), "Que en todos los fenómenos se busca la utilidad humana, no sólo por la ventaja positiva que pueda procurar sino como principio de explicación" (p:110). De acuerdo a lo aportado por los informantes, la realidad señala que existe un aprendizaje competente cuando el estudiante es capaz de hacer uso de sus conocimientos en un contexto diferente donde lo adquirió; sin embargo, no es posible pretender que los estudiantes desarrollen conocimientos nuevos, cuando el docente enseña esos conocimientos sesgado en un ejemplo específico. *"Para conseguir competencias en educación es necesario hacer reconocimiento epistemológico de las temáticas tratadas, el verdadero maestro tiene un claro dominio de la disciplina que guía"* (Gómez M., 2018). El obstáculo del conocimiento unitario y pragmático, se hace evidente en el profesor

universitario en el momento que tiende a reducir, sintetizar y simplificar sus explicaciones, de tal manera que pretenda explicar o definir cualquier concepto mediante la idea de utilidad o beneficio. Dentro de las respuestas dadas por los informantes, no se menciona algún tipo de material didáctico, lo que puede dar a entender, que una enseñanza situada debe coincidir con lo que se llama pragmatismo, es decir; suponer que existe una relación mutuamente co-constitutiva entre sujetos- actividades-contexto, donde el sujeto que aprende es un individuo que actúa en situaciones concretas y que decide sobre alternativas en contextos singulares según sus valores, intereses y fines (Valladares, 2010).

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 11: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves estudiantes.

Subcategoría 1.- Concepción de la enseñanza docente de según la apreciación del estudiante. Objetivo 1

Informante estudiante 1	Informante estudiante 2
<i>...el profesor comienza con la definicion de entrada y describe su simbologia, luego elabora un grafico funcional para presentar despues ejemplos ...</i>	<i>...el profe intenta darse a entender con los alumnos, si en dado caso no entendiste siempre trata de devolverse un poco y explicar más a menudo el tema...</i>
Informante estudiante 3	Informante estudiante 4
<i>...Su enseñanza comienza con la importancia del concepto de limite y lo describe con una gráfica, para luego expresarlo en simbolos, nos resuelve ejercicios y copiamos...</i>	<i>...repasa el concepto de funcion real, luego grafica la funcion y nos indica que la noción que va a dar es intuitiva para luego expresarla formalmente y resuelve ejercicios ...</i>

Interpretación del investigador

Los cuatro estudiantes describen un proceso de enseñanza basado en la transmisión de conocimientos de manera unidireccional, el profesor expone y el alumno copia, restando así la participación del estudiante en la construcción del conocimiento. Se evidencia entonces la necesidad de que los estudiantes entiendan y comprendan la definición de límite de una función, así como sus reglas, aplicaciones y propiedades fundamentales, con el destacado de la construcción y descubrimiento del conocimiento por parte de los propios estudiantes sobre los conceptos asociados con el contenido de límite de una función, tal como lo sustenta la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1998) y que es construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los estudiantes un saber determinado mediante relaciones establecidas implícita o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad

de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 12: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 1. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real. Informantes claves estudiantes.

Subcategoría 2.- .- Obstáculos o errores a nivel epistemológico presentes en el aprendizaje del concepto de límite de una función.
Objetivo 1

Informante estudiante 1	Informante estudiante 2
<i>... me cuesta eso de entender muchas cosas del lenguaje matemático, específicamente esa noción de límite tal como está expresada matemáticamente me cuesta comprenderla...</i>	<i>...es difícil aplicar la definición para hallar el límite de una función y en la aplicación de los teoremas, presento muchas deficiencias algebraicas que me impiden resolver los límites ...</i>
Informante estudiante 3	Informante estudiante 4
<i>...por mas que me expliquen la definición, no la entiendo, así que solo me queda memorizarla, pero al aplicarla dejo todo a medias, los teoremas si me parecen fáciles de aprender y aplicar ...</i>	<i>... no es lo mismo cuando estás en el aula de clase y tienes al profesor para que te despeje dudas e inquietudes a cuando estás en tu casa solo y no sabes cómo resolver un problema...</i>

Interpretación del investigador

Estas afirmaciones están relacionadas directamente con lo propuesto por Bruner (1960), quien propone que el aprendizaje de conceptos matemáticos se introduzca a partir de actividades simples que los estudiantes sean capaces de manipular para descubrir principios y soluciones con el objeto de que esta estrategia repercuta en sus estructuras mentales. Hay que formar imágenes perceptivas de las ideas matemáticas para desarrollar una notación para describir la operación. Se debe promover el trabajo con objetos concretos antes de pasar a establecer las abstracciones porque el aprendizaje va de lo concreto a lo abstracto. Cuando estas abstracciones se han consolidado, se está en condiciones de emplearlas como elementos concretos. En la información dada por los estudiantes se puede apreciar, el obstáculo que presenta en sí el conocimiento de la definición de límite de una función, el cual unido a los obstáculos didácticos generados por el docente, el texto, programa o guía, dificultan el aprendizaje de este concepto y peor si se considera los obstáculos ontogenéticos en el propio estudiante.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 13: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes claves estudiantes.

Subcategoría 3.- Conceptualización de límite de una función real de variable real asociado a la práctica en el aula. Objetivo 2

Informante estudiante 1	Informante estudiante 2
<i>...concepto muy complicado para comprenderlo de una vez, se requiere varias explicaciones y de varias maneras para entenderlo ...</i>	<i>...uno de los conceptos que para mi son difíciles, prefiero su aplicación usando los teoremas ...</i>
Informante estudiante 3	Informante estudiante 4
<i>...aun cuando considero que es un concepto importante para derivar funciones y resolver problemas, reconozco que no es fácil dominarlo ...</i>	<i>...lo podrá explicar el profesor varias veces en clase, pero si no se memoriza no se puede aplicar, es muy complicado ese concepto ...</i>

Interpretación del investigador

Vrancken (2006), indica que, la enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos como la abstracción, el análisis, la demostración, etc. La importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento así como herramienta o útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería). Azcárate (1996) sostiene que, la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 14: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 2. Importancia de la definición de límite de una función. Informantes claves estudiantes.

Subcategoría 4.- Concepto difícil de aprender, errores comunes al resolver un problema de límite de una función de variable real. Objetivo 2

Informante estudiante 1	Informante estudiante 2
<i>...cometo muchos errores en la aplicación de la definición, en el uso del álgebra elemental, como factorización y en la aplicación de los teoremas ...</i>	<i>...creo que mis errores se deben a la mala base de la matemática vista en el nivel de media y por supuesto en la aplicación de los teoremas y la definición ...</i>
Informante estudiante 3	Informante estudiante 4

<i>...en las evaluaciones cometo los errores mas tontos, pero creo que es por no estar seguro de lo dado en la teorías ...</i>	<i>... los errores en este contenido son muchos, desde la aplicación de la definicion, la radicacion, los de factorizacion y la graficacion de funciones, entre otros...</i>
--	--

Interpretación del investigador

El error debe ser considerado como la presencia en el alumnado de un esquema cognitivo inadecuado, no solo como la consecuencia de una falta de conocimiento o de una distracción (Socas, 1997). El análisis de los errores sirve al docente de ayuda a la hora de organizar estrategias que contribuyan a un aprendizaje exitoso, pudiendo hacer hincapié en aquellos aspectos que generan mayores dificultades. En lo expresado por los estudiantes, se puede notar que, los errores son debidos a dificultades del lenguaje. Errores derivados del mal uso de símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático y de errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Además de Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 15: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario y pragmático. Informantes clave estudiantes.

Subcategoría 5. Adopción de una sola postura sobre estrategias de enseñanza. Objetivo 3	
Informante estudiante 1	Informante estudiante 2
<i>...creo que sería más complejo, ya que si explicaran más formas uno escogería la que mejor se acopla a nosotros...</i>	<i>...Bueno nuestro profesor siempre nos enseña varias opciones para resolver un problema, ya está en uno con cuál se te haga más fácil y así puedas solucionar el problema...</i>
Informante estudiante 3	Informante estudiante 4
<i>...Es muy importante para mí siempre y cuando la estrategia sea clara y precisa...</i>	<i>...tal vez si el profesor nos enseña muchas estrategias diferentes para el aprendizaje esto llega a confundir a cierto grupo de estudiantes incluyéndome, uno se acostumbra a la manera en que el profesor te da da entender un tema y eso te facilita mucho más el aprendizaje...</i>

Interpretación del investigador

Sobre el particular, a los estudiantes les da por igual si el docente sostiene su enseñanza basada en una postura unitaria o si varia utilizando diferentes estrategias. Para Aguilar (2016) el concepto de unidad permite simplificar el

estudio de cualquier realidad, al poderse explicar el todo también se ha de poder automáticamente explicar sus partes, la unificación explica toda la realidad. Ahora bien, en investigaciones realizadas sobre el tema se ha comprobado que los estudiantes con éxito difieren de los estudiantes con menos éxito en que conocen y usan estrategias de aprendizaje más sofisticadas que la pura repetición mecánica.(Fajardo, 2020)

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 16: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 3. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario y pragmático. Informantes clave estudiantes.

Subcategoría 6. Utilidad del Conocimiento y Pragmatismo. Objetivo 3			
Informante estudiante 1		Informante estudiante 2	
...respecto al límite de una función, es un concepto muy util en cálculo diferencial, sin el no es posible definir la derivada de una función y resolver problemas de aplicación ...		... según la utilidad del concepto es amplia, pues permite definir otros conceptos de cálculo y entender los teoremas para resolver los ejercicios ...	
Informante estudiante 3		Informante estudiante 4	
...para mi sin la tabla de los teoremas es difícil resolver los problemas, esa tabla contiene toda la informacion necesaria para ello ...		...sinceramente la definicion como tal no la aplico, solo utilizo las formulas de los teoremas y me preocupo mas en las expresiones algebraicas ...	
Interpretación del investigador			

Lo expreado por los estudiantes sobre el concepto de limite y la utilidad de este conocimiento, refuerza lo expresado por Hitt (2020) de que, el utilitarismo plantea una serie de problemas a la hora de definir un término, ya que existe la tendencia de reducirlo y sintetizarlo de tal manera que se pretende explicar o definir un concepto solamente mediante la idea de utilidad o beneficio. De acuerdo a García (2019), los estudiantes tienden a darle unidad a los conceptos, y reducen su significado tomando en cuenta sólo un aspecto de la realidad: la relación con los beneficios que generan al medio, por lo que considera que la utilidad es la razón que sirve de base para construir las definiciones. Para Bachelard (1981), la utilidad ofrece una especie de inducción muy particular que podría llamarse inducción utilitaria. Esta, conduce a generalizaciones exageradas. Esto obviamente lleva a concepciones erradas y reduce notablemente el significado del concepto.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 17: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 4. Conformación de una estructura didáctica. Informantes clave docentes.

Subcategoría 7.- . estructurar una didáctica orientada a la identificación del conocimiento unitario y pragmático Objetivo 4

Informante docente 1	Informante docente 2
... considero que nos hemos alejado del conocimiento didáctico, siendo este la base de la práctica pedagógica, sin embargo, apoyo cualquier proyecto que tenga que ver con mejorar la enseñanza del contenido de límite de una función...	<i>...el manejo de diferentes estrategias de enseñanza debe estar ajustado al conocimiento didactico, la reflexion interior de cada docente debe centrarse en este caso, en si son eficaces las estrategias en la enseñanza de limites que aplico y que debo cambiar de ser necesario ...</i>
Informante docente 3	Informante docente 4
<i>...no estoy cerrado al cambio de metodlogia de enseñanza de limites, pues tal vez la forma como enseño este contenido es parecido cuando a mi me enseñao...</i>	<i>...si es para mejorar la enseñanza de limite, de tal manera que se superen los obstaculos que impiden su aprendizaje, bienvenida la estructura y atento a su puesta en marcha...</i>

Interpretación del investigador

El investigador se adhiere a la apreciación de Vásquez (2010) cuando afirma que, la didáctica ha vuelto a tomar su centro en la discusión de la formación de educadores. Se sabe que no basta con la buena voluntad o la sola vocación para ser un maestro. También son indispensables, y mucho más en nuestra época, conocer estrategias, apropiar recursos, estudiar saberes especializados, familiarizarse con obras y autores fundamentales, en fin, capacitarse de verdad en la disciplina didáctica. Y ello demanda enfrentarse a un verdadero campo profesional con currículos y prácticas particulares. Más que recetas fáciles de replicar, la didáctica (cuando se piensa de manera estratégica) es un método de pensar y de actuar, una disciplina potente para conducir a otros. La didáctica, expuesta así, es un saber y un hacer clave a la hora de tomar decisiones. Los docentes entrevistados reconocen el papel clave que tienen como guía y organizador de la interacción en las aulas, por lo que están dispuestos a aceptar sugerencias, propuestas, líneas de trabajo, estrategias innovadoras, entre otras.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 18: Validez interna. Triangulación de fuentes. Categoría 4. Conformación de una estructura didáctica. Informantes clave estudiantes.

Subcategoría 7.- . estructurar una didáctica orientada a la identificación del conocimiento unitario y pragmático Objetivo 4

Informante estudiante 1	Informante estudiante 2
<i>...si esta es para mejorar el aprendizaje de la deficion de limite y su contenido de aplicación, claro que estoy de acuerdo que se cree esa nueva forma de enseñar limites ...</i>	<i>... si con ella se van a superar los problemas que tenemos cuando vemos clases sobre limites, se estaria avanzando en la preparacion de nosotros y en los que vienen detrás ...</i>
Informante estudiante 3	Informante estudiante 4
<i>...cambiar la forma de enseñar para mejor, es un gran adelanto si con esa forma se reconocer las dificultades que presentamos al estudiar limites ...</i>	<i>...errores cometemos todos cuando estudiamos limite de funciones, tal vez porque no tenemos base o porque ese tema es dificil, si se aplica una nueva forma de enseñar, tomando en cuenta los errores, seria muy positivo ...</i>

Interpretación del investigador

Para Medina y Mata (2008) la Didáctica es considerada como una disciplina pedagógica centrada en el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje, que procura la formación y el desarrollo instructivo-formativo de los estudiantes, y la mejora de la concepción y práctica docente, mediante la generación de un entorno cultural puramente didáctico, basado y reconstruido desde una actitud rigurosamente investigadora del profesorado y los colaboradores. El aprendizaje de la matemática es considerado como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos. Las interacciones sociales *verticales* (docente-alumno) y *horizontales* (alumno-alumno) ocupan un lugar central, siendo clave el modo en que el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación de ideas por parte de los alumnos. En este mismo orden de ideas, Arroyo (2001), sostiene que la Didáctica se concreta en la reflexión y el análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje, profundizando en su naturaleza, y en la anticipación y mejora permanente, por lo que, la didáctica debe tener como finalidad, facilitar a los docentes que dictan la asignatura calculo diferencial, un conjunto de estrategias metodológicas, que contribuyan a ser más efectivo el proceso enseñanza y de acuerdo a la teoría de Ausubel (base psicológica) que el

aprendizaje de los contenidos de esta asignatura sean significativos, entre ellos el contenido de límite de una función.

Fuente: Elaboración propia.

CIERRE CATEGORIAL

Cierre categorial. Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable real, desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes

Finalmente se hizo la unión de las categorías y subcategorías individuales de los dos grupos de informantes clave con respecto a las características del Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real de variable, a saber:

Ninguna de las apreciaciones dadas por los docentes, coinciden en los reconocimientos de algún obstáculo epistemológico propuestos por Gastón Bachelard y Guy Brousseau, aun cuando el proceso de enseñanza está fundamentado en permitir al estudiante la autoconstrucción del conocimiento, así como el desarrollo de las habilidades y destrezas para su comprensión y aplicación en nuevos escenarios. Adicionalmente, existe la situación de presentar los temas a partir de los planteamientos teóricos formales (acción, definición, teorema y aplicación) a lo cotidiano, es lugar de presentar primero, a los educandos, situaciones problemáticas cotidianas comprensibles y luego los fundamentos matemáticos teóricos que permitan su representación y solución.

Por su parte, los estudiantes describen un proceso de enseñanza basado en la transmisión de conocimientos de manera unidireccional, el profesor expone y el alumno copia, restando así la participación del estudiante en la construcción del conocimiento.

En la información dada por los estudiantes se puede apreciar, el obstáculo que presenta en sí el conocimiento de la definición de límite de una función, el cual unido a los obstáculos didácticos generados por el docente, el texto, programa o guía, dificultan el aprendizaje de este concepto y peor si se considera los obstáculos ontogenéticos en el propio estudiante.

Cierre categorial. Importancia de la definición de límite de una función, desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes

La importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento así como herramienta o útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería), por supuesto, el concepto de límite dentro del área de cálculo, es generador de otros conceptos dentro de esa área.

Los cuatro docentes están al tanto de las dificultades que están presentes durante la enseñanza del concepto de límite de una función.

En cuanto a los estudiantes, se puede notar que, los errores son debidos a dificultades del lenguaje. Errores derivados del mal uso de símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático y de errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

En la información dada por los estudiantes se puede apreciar, el obstáculo que presenta en si el conocimiento de la definición de límite de una función, el cual unido a los obstáculos didácticos generados por el docente, el texto, programa o guía, dificultan el aprendizaje de este concepto y peor si se considera los obstáculos ontogenéticos en el propio estudiante.

Cierre categorial. Ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático. , desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes

De acuerdo a los docentes, el profesor universitario no puede limitarse solo a la transmisión de conocimientos, si no que además debe estimular en los estudiantes la avidez de adquirir los mismos; de ahí la importancia de encaminar la atención hacia el estudiante como elemento central del aprendizaje, por tanto, es recomendable optar por métodos activos con el fin de garantizar una calidad elevada de la enseñanza, que ayuden a dinamizar este proceso. Además, El obstáculo del conocimiento unitario y pragmático, se hace evidente en el profesor universitario en el momento que tiende a reducir, sintetizar y simplificar sus explicaciones, de tal manera que pretenda explicar o definir cualquier concepto mediante la idea de utilidad o beneficio.

Por otro lado, no se menciona algún tipo de material didáctico, lo que puede dar a entender, que una enseñanza situada debe coincidir con lo que se llama pragmatismo, es decir; suponer que existe una relación mutuamente co-constitutiva entre sujetos-

actividades-contexto, donde el sujeto que aprende es un individuo que actúa en situaciones concretas y que decide sobre alternativas en contextos singulares.

Para los estudiantes, les da por igual si el docente sostiene su enseñanza basada en una postura unitaria o si varia utilizando diferentes estrategias.

Los estudiantes tienden a darle unidad a los conceptos, y reducen su significado tomando en cuenta sólo un aspecto de la realidad: la relación con los beneficios que generan al medio, por lo que considera que la utilidad es la razón que sirve de base para construir las definiciones.

Cierre categorial. Conformación de una estructura didáctica para identificar el conocimiento unitario y Pragmático, desde la perspectiva de los actores sociales: Docentes y Estudiantes

Se sabe que no basta con la buena voluntad o la sola vocación para ser un maestro. También son indispensables, y mucho más en nuestra época, conocer estrategias, apropiar recursos, estudiar saberes especializados, familiarizarse con obras y autores fundamentales, en fin, capacitarse de verdad en la disciplina didáctica. Y ello demanda enfrentarse a un verdadero campo profesional con currículos y prácticas particulares. Más que recetas fáciles de replicar, la didáctica.

Los docentes entrevistados reconocen el papel clave que tienen como guía y organizador de la interacción en las aulas, por lo que están dispuestos a aceptar sugerencias, propuestas, líneas de trabajo, estrategias innovadoras, entre otras.

El aprendizaje de la matemática es considerado como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos. Las interacciones sociales *verticales* (docente-alumno) y *horizontales* (alumno-alumno) ocupan un lugar central, siendo clave el modo en que el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación de ideas por parte de los estudiantes.

Por su parte, los estudiantes apoyan la iniciativa, pues consideran que serían beneficiados en el aprendizaje y comprensión del contenido de límite, que hasta el momento ha reportado serios problemas en su aprendizaje.

HALLAZGOS

La enseñanza del Calculo Diferencial, y en particular la enseñanza del contenido correspondiente al límite de una función, está siendo administrada bajo metodologías muy tradicionales que solo propician la memorización en el estudiante, ya que el docente desarrolla la teoría, utilizando el pizarrón mediante el enfoque expositivo, sin propiciar la participación o integración del alumno en las clases.

El estudiante ante este enfoque de enseñanza, se comporta solo como un ente pasivo y receptivo ante la información que suministra el profesor en su exposición, por lo que se dedica a copiar todo lo expuesto.

El docente al enfocarse más en los procesos matemáticos durante la enseñanza de la definición de límite de una función y los contenidos que de allí se derivan, influye en que el alumno en las pruebas o en la resolución de problemas, devuelva solo el discurso matemático ofrecido por el docente obviando la interpretación de los resultados que son necesarios para la toma de decisiones. Además, sabiendo que cuyo aprendizaje significativo permitiría el aprendizaje también significativo de los contenidos que a continuación de él se derivan.

Los docentes no elaboran materiales que impacten o motiven al estudiante a integrarse y ser partícipes de su propio aprendizaje, pues llevan el proceso enseñanza – aprendizaje de una manera unidireccional.

Es importante destacar que el docente que administra la asignatura, está consciente de la importancia y la necesidad de cambio en el enfoque actual de su enseñanza.

Los docentes, no están preparados para reconocer algún obstáculo epistemológico propuesto por Gastón Bachelard y Guy Brousseau, entre ellos el conocimiento unitario y pragmático.

Los errores son debidos a dificultades del lenguaje, así como los derivados del mal uso de símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático y de errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

El utilitarismo plantea una serie de problemas a la hora de definir un término, ya que existe la tendencia de reducirlo y sintetizarlo de tal manera que se pretende explicar o definir un concepto solamente mediante la idea de utilidad o beneficio.

Los docentes están ajenos al hecho de que, la utilidad ofrece una especie de inducción muy particular que podría llamarse inducción utilitaria. Esta, conduce a generalizaciones exageradas, la cual lleva a concepciones erradas y reduce notablemente el significado del concepto.

A los estudiantes les da por igual si el docente sostiene su enseñanza basada en una postura unitaria o si varía utilizando diferentes estrategias.

Tanto los docentes como los estudiantes están claros en que, la importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento así como herramienta o útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería),

Ante el panorama antes descrito, urge la conformación teórica de una estructura didáctica orientada a identificar el obstáculo epistemológico “conocimiento unitario y pragmático en la enseñanza del límite de una función” con el fin de lograr un aprendizaje significativo de este concepto y el desarrollo de su contenido en alumnos de pregrado.

Es claro que, la didáctica no solo debe ser concebida solamente como una interrelación entre estrategias que la conformen, debe soportarse sobre nuevas formas de organización de las actividades, donde se puedan poner en práctica estas estrategias, como por ejemplo la generación de unidades didácticas, teniendo presente los llamados organizadores curriculares para su fortalecimiento.

CAPÍTULO V

CONTEXTO GENERATIVO

En este capítulo se exponen y examinan los hallazgos de la investigación, procedentes de la información suministrada por los actores sociales y luego procesada mediante codificación y categorización, permitiendo esto realizar su hermenéusis mediante la triangulación a fin de comprender el fenómeno estudiado. Estos hallazgos constituyen la base esencial para generar una aproximación teórica a una didáctica orientada a identificar el obstáculo epistemológico “el conocimiento unitario y pragmático” en la enseñanza de la definición de límite de una función, proceso de interpretación respaldado por los enfoques teóricos y epistemológicos previamente seleccionados Y establecidos en el marco teórico de esta investigación.

Posterior al proceso de interpretación para comprender el fenómeno estudiado, fue considerado el hecho que, una teoría efectiva se define por su habilidad para desvelar la complejidad y totalidad de un fenómeno. En otras palabras, es una suposición que se enfoca completamente en el fenómeno en cuestión, según Padrón (2004), la teoría se podría entender como una interpretación o explicación de cómo los grupos sociales y los individuos perciben los acontecimientos desde su propia perspectiva interna o su conciencia individual.

En este mismo orden de ideas, se reflexionó sobre lo planteado por Martínez (1999) quien sostiene que en el proceso de teorización se trata de integrar en “un todo coherente y lógico los resultados de la investigación...”. (p.19) y que los resultados se amplían con los aportes de los autores reseñados en el marco teórico referencial

establecido después del trabajo de contrastación. Continúa indicando el autor antes citado que construir la teoría en una investigación (en este caso los constructos que conformaran el todo, es decir la aproximación a una didáctica que permita identificar el obstáculo conocimiento unitario y pragmático) se logra relacionando siempre más entre si las categorías y sus propiedades, así van apareciendo cada vez más nexos y analogías y las teorías implícitas se van haciendo cada vez más explícitas, es decir una red de relaciones entre las categorías.

Con respecto de lo anterior, Galeano (2004), plantea que “Las interrelaciones entre categorías se diagraman trazando mapas. Una forma de interrelación la constituyen los mapas conceptuales o construcción de tipologías” (173).

Por tanto, la teorización que a continuación se presenta, surgió de la investigación de la situación actual del proceso enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una función real y su importancia en el conocimiento de los temas de cálculo diferencial, asignatura obligatoria en la carrera de Técnico en Mantenimiento Electromecánico y Electrónica Industrial, en la Institución Universitaria de Barranquilla, en barranquilla, en el departamento del Atlántico, siendo esta institución de educación superior el recinto donde se conformó el escenario de la investigación. Se tuvo por norte establecer una nueva forma de enseñar este contenido y los contenidos donde este concepto tiene pertinencia, con el agregado de identificar el conocimiento unitario pragmático a fin de superar este obstáculo epistemológico por medio de un conjunto de estrategias metodológicas diferentes a la utilizada actualmente por el docente, con el objeto de fortalecer su aprendizaje.

Resultados Organizados según cada uno de los objetivos planteados, de acuerdo a las interrogantes de la investigación

De acuerdo con lo anterior, se presentan a continuación los resultados organizados según cada uno de los objetivos de investigación definidos en el capítulo I. Esto facilitó un progreso gradual para abordar las preguntas de investigación a partir de las dimensiones establecidas en el capítulo III. El gráfico 5 ilustra el proceso seguido para elaborar esta sección.

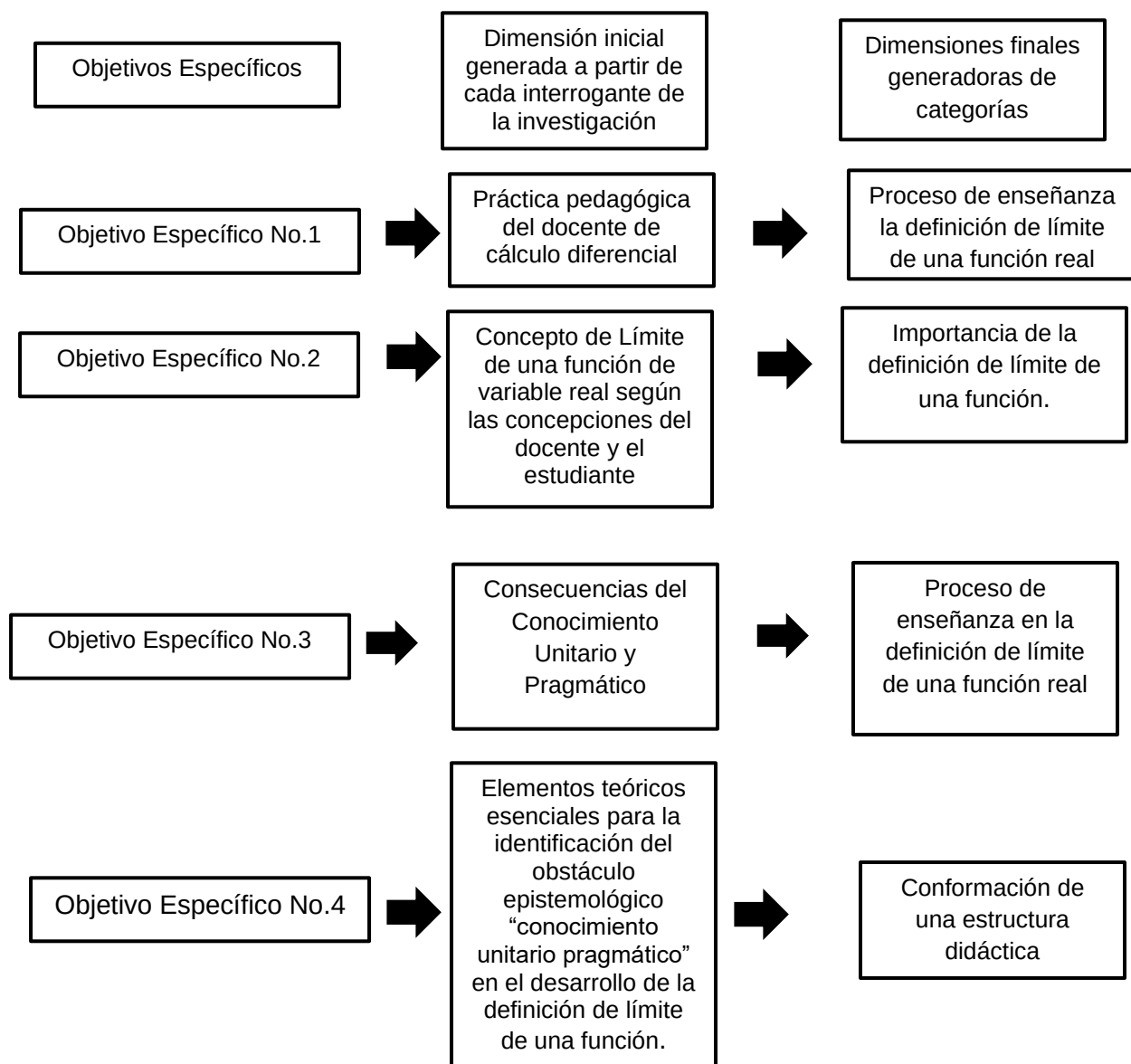


Gráfico 5: Esquema Introductorio de acuerdo a los Objetivos 1, 2, 3 y 4 de los soportes que permitieron el establecimiento de las fases del modelo didáctico. NOTA: Elaboración propia.

Después de presentar los esquemas iniciales de los elementos a tener en cuenta para crear las fases del modelo, se procede a desarrollar estos esquemas según los objetivos 1, 2, 3 y 4. Es en el objetivo 4 donde se definen las fases del modelo de acuerdo

con lo establecido en la sección de objetivos específicos de la investigación, tal como se indicó en el Capítulo I.

Desarrollo de los objetivos

Objetivo específico No.1: Caracterizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas.

El desarrollo de este objetivo tuvo como fin abordar la primera de las cuatro preguntas de investigación surgidas en la etapa inicial. En este sentido, se buscó identificar, desde la perspectiva de los actores sociales, las particularidades de la metodología que actualmente emplean los profesores de matemáticas en el nivel universitario de la Institución Universitaria de Barranquilla, Departamento del Atlántico, Colombia, para enseñar los conceptos de límite de una función real de variable real. Según las entrevistas realizadas a docentes y estudiantes, se identificaron conjuntos de aspectos característicos, que se detallan en los gráficos 6 y 7.

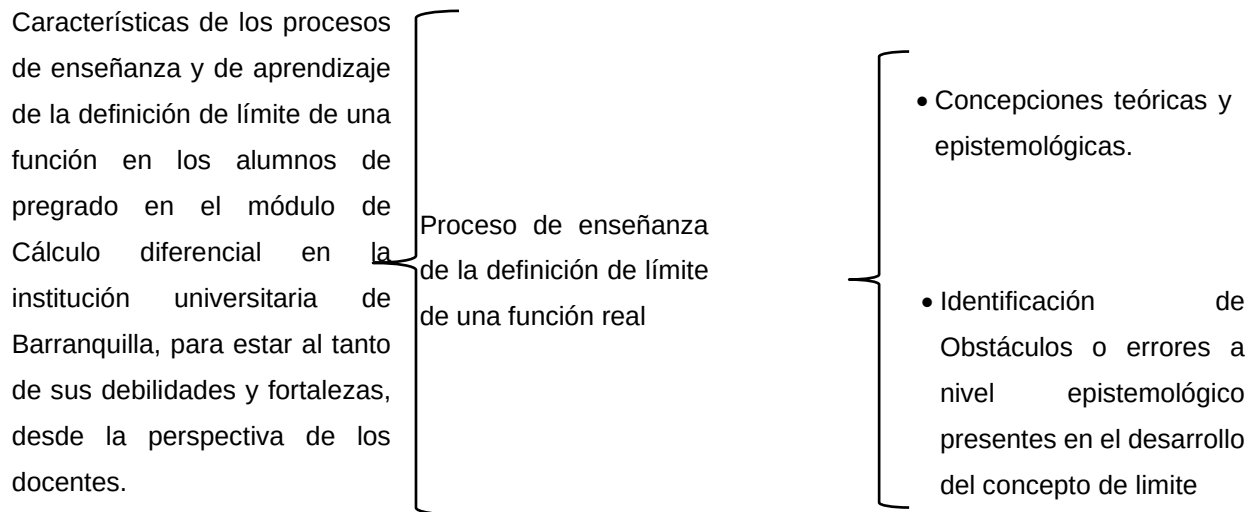


Gráfico 6: Desarrollo del objetivo No.1. Características de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas, desde la perspectiva de los docentes. NOTA: Elaboración propia.

Características de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas, desde la perspectiva de los estudiantes.

Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real.

- Concepción de la enseñanza docente de según la apreciación del estudiante.
- Obstáculos o errores a nivel epistemológico presentes en el aprendizaje del concepto de límite de una función.

Gráfico 7: Desarrollo del objetivo No.1. Características de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición de límite de una función en los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla, para estar al tanto de sus debilidades y fortalezas, desde la perspectiva de los estudiantes. NOTA: Elaboración propia.

A continuación, se presenta el respectivo análisis del proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real desde la perspectiva de los actores sociales. Se hizo de forma conjunta y general con los profesores y los estudiantes simultáneamente.

Proceso de enseñanza de la definición de límite de una función real Concepciones teóricas y epistemológicas.

Según Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P., (1995), claramente la enseñanza de los principios del cálculo presenta desafíos evidentes. Diversas investigaciones indican, con resultados sorprendentemente similares que, aunque es posible enseñar a los estudiantes a realizar algunos cálculos de derivadas y primitivas de manera más o menos mecánica, así como resolver ciertos problemas estándar, los docentes se enfrentan a dificultades significativas para que los estudiantes comprendan verdaderamente el ámbito del cálculo y alcancen una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento fundamentales en esta rama de las matemáticas. Además, estos estudios también demuestran claramente que, ante estas dificultades, la

enseñanza tradicional, especialmente a nivel universitario, tiende a enfocarse en la práctica algorítmica y algebraica del cálculo, evaluando principalmente las habilidades adquiridas en este ámbito. Este enfoque crea un ciclo negativo: para obtener tasas de éxito aceptables, se evalúa lo que los estudiantes pueden hacer mejor, lo cual a su vez es considerado por los estudiantes como lo más importante, dado que es lo que se evalúa.

Para el investigador, de acuerdo a lo expresado por los actores sociales el proceso de enseñanza de las matemáticas está más ligada a la concepción instrumentalista, que promueve una enseñanza de las matemáticas fundamentalmente de tipo memorístico y algorítmico. Después de diez años, los problemas identificados y la insatisfacción que causaban han tenido dos efectos notables. Por un lado, han servido como un impulso significativo para el desarrollo de investigaciones didácticas en este ámbito. De hecho, la mayoría de las investigaciones didácticas en educación superior se han centrado en el ámbito conceptual del cálculo, como evidencia el contenido de la obra "Advanced Mathematical Thinking" (Tall, 1991).

Por otro lado, los problemas de este tipo han generado numerosos proyectos de innovación educativa, especialmente en los niveles de educación media y universitaria inicial. Ejemplos notables incluyen la revisión completa del plan de estudios en Francia y Australia, así como las crecientes innovaciones y experimentos en los Estados Unidos (Artigue, M. & Ervynck, G., 1992).

Por último, en el caso de los estudiantes, estos describen un proceso de enseñanza basado en la transmisión de conocimientos de manera unidireccional, el profesor expone y el alumno copia, restando así la participación del estudiante en la construcción del conocimiento.

Identificación de Obstáculos o errores a nivel epistemológico presentes en el desarrollo del concepto de límite

En este aspecto, al igual que se hizo en la triangulación respectiva (Contexto IV), vale destacar lo apuntado por Schubring (1986), los docentes cuando abordaron el tema de límites de una función real de variable real, los resultados coincidieron en un mismo

tipo de obstáculo que sin duda estaba enmarcado en una epistemología sistemática, ya que la existencia está justificada por la coherencia entre el campo conceptual (la necesidades detectadas por los docentes) y cuyos conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas.

En las investigaciones acerca de la enseñanza del cálculo, el concepto de límite ocupa un lugar fundamental, como era de esperarse debido a su posición central en este ámbito. Entre los estudios más destacados, varios han intentado combinar enfoques cognitivos e históricos. Basándose en la idea de obstáculos epistemológicos introducida por G. Bachelard, se han explorado el desarrollo histórico de este concepto y posibles obstáculos que podrían explicar las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar, como se resume en Cornu (1991).

Hitt (2003) afirma: “es difícil concebir que un alumno pueda entender el Cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos”. Según Hitt (2003), se destaca que utilizar repetidamente un solo tipo de representación en la enseñanza puede dificultar la comprensión de los conceptos matemáticos, es decir se convierte en un obstáculo. Por lo tanto, se sugiere que un buen enfoque de enseñanza en el aula debería promover el uso y la combinación coherente (sin errores) de diferentes formas de representación semiótica.

Lo anterior, concuerda con el interés que los investigadores en el campo de la Educación Matemática han mostrado por el limitado entendimiento que los estudiantes tienen de los conceptos matemáticos al concluir su educación secundaria. Una prueba de esto son los resultados de Colombia en evaluaciones internacionales como el Trend in International Mathematics and Science Study (TIMSS) y el Programme for International Student Assessment (PISA), donde el desempeño promedio de los estudiantes del país ha estado por debajo del promedio general de la prueba (Hernandez-Suarez, C. A., Prada-Núñez, R., & Ramírez-Leal, P. , 2017).

También, es muy importante resaltar, que autores como Santos (1994); señala que "Las actividades promovidas en el aula tienen un impacto directo en el rendimiento que los estudiantes demuestran en sus procesos de comprensión y resolución de problemas". Es decir; si el docente presenta en el aula ejemplos asociados a situaciones de la vida real para introducir los conceptos matemáticos, pero si dichos ejemplos no han sido bien

diseñados, conlleva a una incoherencia lógica que no se ajusta a la realidad, donde seguramente provocará una apropiación limitada y posiblemente errónea en el estudiante.

Objetivo específico No.2: Describir cada una de las concepciones que giran en torno a la definición de límite junto a los errores que comúnmente están asociados al proceso de su enseñanza, con la finalidad de establecer sus puntos de encuentro y sus diferencias.

El desarrollo de este objetivo sirvió para responder la segunda de las cuatro interrogantes investigativas generadas en el capítulo I, que fue: ¿Qué características presentan las concepciones que giran en torno a la definición de límite de una función, junto a los errores que comúnmente están asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje? Nuevamente, según los docentes y estudiantes entrevistados, se obtuvieron una serie de factores que se muestran en los gráficos 8 y 9.

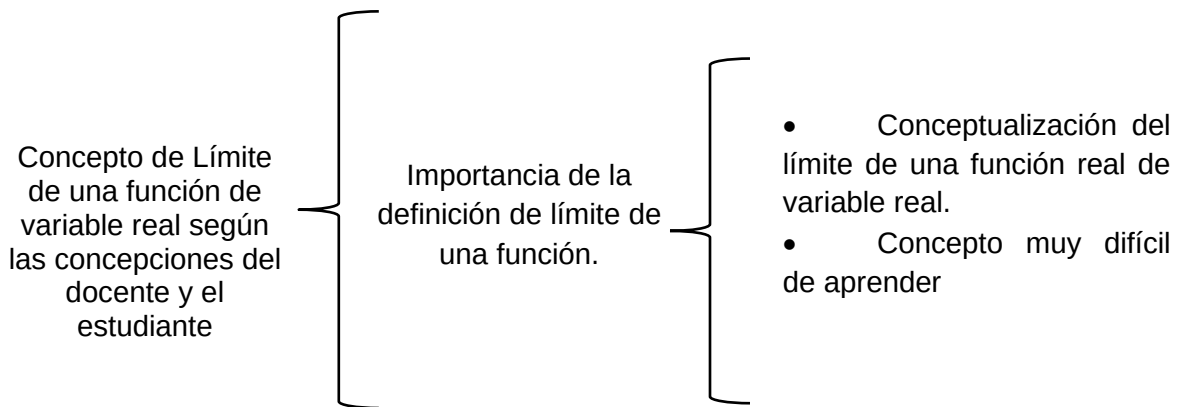


Gráfico 8: Desarrollo del objetivo No.2. Concepto de Límite de una función de variable real según las concepciones desde la perspectiva docente *NOTA: Elaboración propia.*

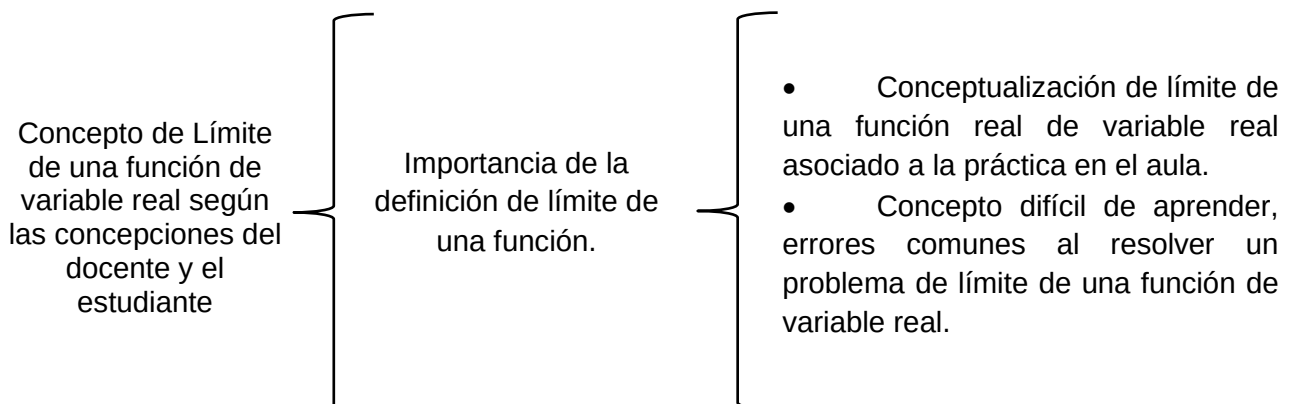


Gráfico 9: Desarrollo del objetivo No.2. Concepto de Límite de una función de variable real según las concepciones desde la perspectiva de los estudiantes. NOTA: Elaboración propia.

A continuación, se presenta el respectivo análisis de la importancia de la definición de límite de una función desde la perspectiva de los actores sociales. Se hizo de forma conjunta y general con los profesores y los estudiantes simultáneamente.

Importancia de la definición de límite de una función

Conceptualización del límite de una función real de variable real

...se hace un recuento del cuerpo de los numeros reales, el concepto de función, graficación y se define limite de la función real de variable real, expresando luego los teoremas correspondientes...(informante profesor); *...concepto muy complicado para comprenderlo de una vez, se requiere varias explicaciones y de varias maneras para entenderlo ...*(Informante estudiante). Estas son voces y expresiones que, desafortunadamente se han escuchado muchas veces en la universidad con respecto a lo difícil de comprender el cálculo diferencial, y en consecuencia, con el tema del límite de una función real de variable real, que es el objeto de estudio.

De acuerdo a lo anterior, algunas investigaciones sobre este tema aseguran que en la conceptualización del límite de una función real, los estudiantes enfrentan diversas dificultades al aprender sobre límites, tales como problemas conceptuales, inconvenientes con la notación matemática, dificultades para visualizar y entender la noción de infinito y de lo infinitesimal, así como problemas para aplicar estos conceptos en la resolución de ejercicios y problemas (Cordero, A. D., & Albanés, V. B. , 2022).

Según Hitt (1996,1998), el desafío que enfrentan los estudiantes y algunos profesores de enseñanza media para alcanzar una comprensión profunda del concepto de función se debe a que, generalmente, tanto estudiantes como algunos profesores se enfocan únicamente en la manipulación algebraica del concepto, lo cual limita su entendimiento. En general, muchos profesores no consideran fundamental la actividad de vincular las diferentes representaciones de un concepto en la construcción del

conocimiento matemático. En particular, las tareas de conversión son subestimadas por los profesores en relación con el concepto de función. El argumento es que dichas tareas de conversión promoverían una mejor comprensión de las funciones y también permitirían el desarrollo de procesos de visualización. Lo anterior, sigue generando evidencia que es muy débil el trabajo que se hace a nivel epistemológico sobre el concepto de límite y se tiende a tomar el camino o ruta más cómoda, como es directamente al trabajo representativo y algebraico, lo que tiende a generar un primer obstáculo en los estudiantes y por ende confusiones.

Por otro lado, desde los orígenes, el concepto de límite ha venido generando dificultades, de acuerdo a lo que señala Mira (2016):

El proceso de refinar el concepto de límite resultó complicado para los científicos de la época debido a su naturaleza profunda, así como a la necesidad de una precisión en el pensamiento y una comprensión del sistema de números reales que no era fácil de lograr (p.7).

Lo anteriormente mencionado, sigue siendo un factor de apertura de investigaciones en el tema, ya que es importante encontrar rutas adecuadas para la superación de obstáculos que hoy día, aún persiste en la enseñanza dada por los docentes y el aprendizaje recibido por los estudiantes. Por su parte Blázquez, S. y Ortega, T. (2000), indican que este tema presenta posiblemente la mayor cantidad de dificultades en su aprendizaje. Estas dificultades están relacionadas con el propio concepto, que para muchos estudiantes, según los autores, resulta "árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan con mucha facilidad y, en definitiva, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p.1).

Concepto muy difícil de aprender

Destaquemos aquí estas voces de los actores sociales: *... la dificultad radica en lo abstracto de la definición, sobre todo en el manejo de los símbolos y mas complicado es cuando se solicita su aplicación en la solución de problemas ...*(Informante profesor); *...creo que mis errores se deben a la mala base de la matemática vista en el nivel de*

media y por supuesto en la aplicación de los teoremas y la definición ...(Informante estudiante).

El concepto de límite ha resultado especialmente complicado de enseñar y de comprender. Como indica Cornu (1991), este concepto es "esencial en el Pensamiento Matemático Avanzado, desempeñando un papel central en el análisis matemático y siendo fundamental en la teoría de la aproximación, de la continuidad, y en el cálculo diferencial e integral" (p. 153) (Guarin Amorocho, S. A., & Parada Rico, S. E. (2023)., 2023). Hay otras numerosas investigaciones, como por ejemplo en Blázquez, S., y Ortega, T. , (2002), García et al (2002), Pons (2014) y Mira (2016) han señalado que, para entender el concepto de límite, es necesario considerar aspectos como: las ideas de aproximación y tendencia, la visión dinámica del límite de una función en un punto, la concepción óptima del límite de una función en un punto y la concepción métrica del límite de una función en un punto.

Otras investigaciones denotan que una gran parte de las dificultades están relacionadas con la manera en que se enseña el tema de los límites (Hitt, F., & Páez, R. , 2003). Según Hitt, F., & Páez, R. (2003), se podría pensar que el problema se resolvería simplemente escribiendo buenas notas y capacitando adecuadamente a los profesores de matemáticas. Sin embargo, la historia de las matemáticas nos ha mostrado que este concepto es complejo y que probablemente los obstáculos que algunos matemáticos encontraron al intentar entender y formalizar este concepto también surgirán en el aula de matemáticas. Además, considerando que el problema es complejo y que muchos matemáticos no lograron superar el obstáculo generado por el infinito potencial ("designa la posibilidad de ir más lejos, continuación indefinida...", Hitt, 2003) para concebir el infinito actual ("es la toma de conciencia simultánea de todos los elementos de un conjunto infinito", Ídem), es de suponer que algunos profesores de matemáticas también podrían tener problemas para aprenderlo.

También se han hecho muy notorias, otras investigaciones cuyas consideraciones llevan a la posición de que el concepto formal de límite no es estático, como se cree comúnmente, sino que es un esquema muy complejo con importantes aspectos dinámicos y requiere que los estudiantes hayan construido fuertes concepciones de cuantificación (Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., &

Vidakovic, D., 1996). De acuerdo a lo anteriormente descrito, lo que hace que el concepto de límite sea tan difícil de comprender para la mayoría de los estudiantes no es tanto la naturaleza "formal" de la definición estándar- δ del límite, sino más bien la necesidad de desarrollar un esquema que coordine dos procesos junto con el uso avanzado de la cuantificación existencial y universal.

Objetivo específico No.3: Interpretar los efectos del obstáculo epistemológico “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición del Límite de una función, en su aprendizaje por parte de alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial de la institución universitaria de Barranquilla, a fin de que sea superado.

El desarrollo de este objetivo sirvió para responder la tercera de las cuatro interrogantes investigativas generadas en el momento I, que fue: ¿De qué manera afecta el obstáculo epistemológico Conocimiento Unitario y pragmático” el aprendizaje de la definición del Límite de una función, por parte de los alumnos de pregrado en el módulo de Cálculo diferencial en la institución universitaria de Barranquilla? Nuevamente, según los docentes y estudiantes entrevistados, se obtuvieron una serie de factores que se muestran en el gráfico 10.

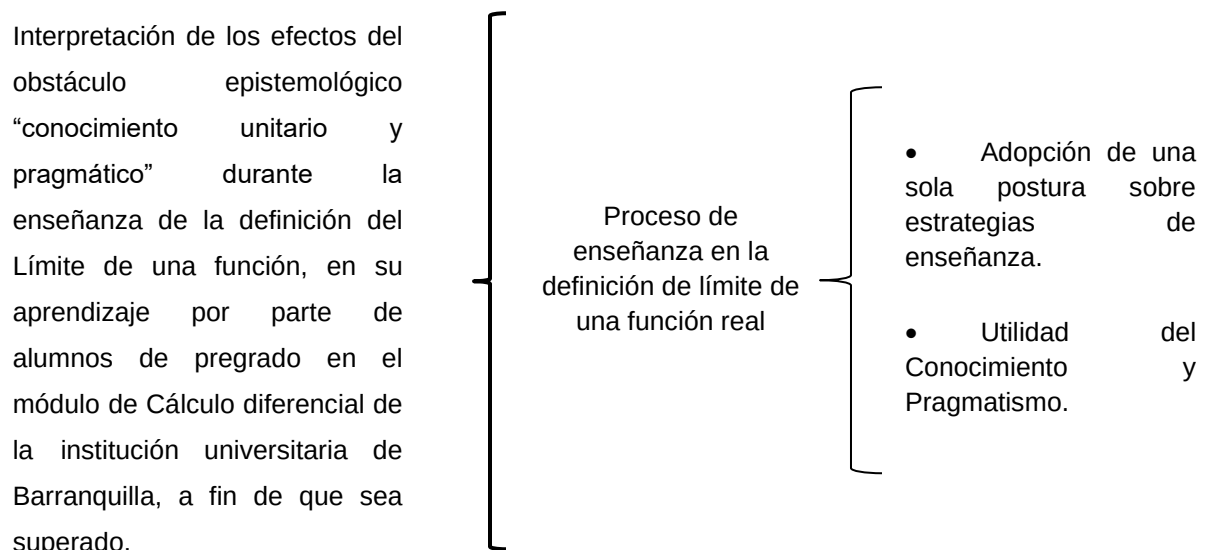


Gráfico 10: Desarrollo del objetivo No.3. Interpretación de los efectos del obstáculo epistemológico “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición del Límite de una función, en su aprendizaje por parte de alumnos de pregrado en el módulo de cálculo diferencial de la Institución Universitaria de

Barranquilla, a fin de que sea superado, según las concepciones desde la perspectiva docente y de estudiantes. NOTA: Elaboración propia.

A continuación, se presenta el respectivo análisis del proceso de enseñanza en la definición de límite de una función real desde la perspectiva de los actores sociales. Se hizo de forma conjunta y general con los profesores y los estudiantes simultáneamente.

Proceso de enseñanza en la definición de límite de una función real Adopción de una sola postura sobre estrategias de enseñanza

Destaquemos aquí algunas de las voces de los actores sociales: *...creo que cada docente tiene su propia forma de planificar y desarrollar la clase correspondientes al tema de límite de una función, es decir tiene dominio de estrategias y metodologías a las cuales se ha adaptado su enseñanza...* (informante profesor); *...creo que sería más complejo, ya que si explicaran más formas uno escogería la que mejor se acopla a nosotros...* (Informante estudiante). Para Brousseau (1997) el concepto de unidad permite simplificar el estudio de cualquier realidad, al poderse explicar el todo también se ha de poder automáticamente explicar sus partes, la unificación explica toda la realidad. Ahora bien, en investigaciones realizadas sobre el tema se ha comprobado que los estudiantes con éxito difieren de los estudiantes con menos éxito en que conocen y usan estrategias de aprendizaje más sofisticadas que la pura repetición mecánica. Estrada, M. D. C., Estren, L. M., & Fajardo, J. D. J. ,(2017).

La Matemática, en general, se compone de definiciones, axiomas, propiedades y relaciones, y el manejo correcto de cada uno de estos elementos es fundamental para comprender su contenido. No obstante, en la enseñanza del Cálculo a nivel universitario, especialmente en el caso del concepto de límite, se recomienda abordar el tema de la siguiente manera: primero una idea intuitiva, luego la definición, seguida de los teoremas y sus demostraciones. Este enfoque puede hacer que la enseñanza no se concentre en los procesos de asimilación, donde realmente se pueden identificar y superar muchas dificultades previas a la definición de conceptos y la formulación de teoremas (Morales, A., Sigarreta, J., & Locia, E., 2012).

El papel que juega cada contenido en Matemática es crucial no solo para el desarrollo de la teoría, sino también para su comprensión. Varios investigadores (Jungk, 1985; Lafuente, 2005; Polya 2001; Morales, 2008) están de acuerdo en que los conceptos y sus definiciones son esenciales para entender gran parte de la Matemática, y que sin ellos, sería imposible comprender el contenido. En cuanto a los conceptos, Ballester, S. et al (1992) señala que son una categoría especial en la enseñanza de la Matemática, ya que constituyen la base con la que opera el pensamiento matemático. La formación de conceptos contribuye a lograr uno de los objetivos importantes de la Matemática: representar la relación entre las Matemáticas y la realidad objetiva.

Tomando como referencia lo dicho anteriormente, es fundamental que en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, se procure que los estudiantes reconozcan que tanto los conceptos como las formas de trabajo matemático, tienen su origen en las necesidades y características de la práctica, derivadas de la lucha del hombre por transformar la realidad.

Utilidad del Conocimiento y Pragmatismo

Se tomará como referencia algunas voces de los actores sociales, evidenciados en el capítulo IV: *... pienso que al mantener un conocimiento unitario es posible simplificar un estudio de cualquiera, pues al explicar el todo se puede explicar sus partes...* (informante profesor); *...respecto al límite de una función, es un concepto muy útil en cálculo diferencial, sin el no es posible definir la derivada de una función y resolver problemas de aplicación ...* (Informante estudiante). El obstáculo del conocimiento unitario y pragmático, se hace evidente en el profesor universitario en el momento que tiende a reducir, sintetizar y simplificar sus explicaciones, de tal manera que pretenda explicar o definir cualquier concepto mediante la idea de utilidad o beneficio. Dentro de las respuestas dadas por los informantes, no se menciona algún tipo de material didáctico, lo que puede dar a entender, que una enseñanza situada debe coincidir con lo que se llama pragmatismo, es decir; suponer que existe una relación mutuamente co-constitutiva entre sujetos- actividades-contexto, donde el sujeto que aprende es un individuo que

actúa en situaciones concretas y que decide sobre alternativas en contextos singulares según sus valores, intereses y fines (Valladares, 2010).

Unificar el conocimiento es característico del pensamiento antes de la ciencia; intentar encontrar un principio que abarque todas las teorías acaba por eliminar las diferencias, simplificar la realidad y, a su vez, elimina la posibilidad de descubrir objetos de estudio que no se ajusten al conocimiento unificado.

La unificación se convierte en un obstáculo para el avance de las matemáticas cuando la geometría se considera el elemento unificador de todo conocimiento matemático. Según el pensamiento griego, era necesario encontrar un mecanismo que superara todo saber cotidiano o conocimiento común. Así, los desarrollos geométricos permitían establecer un carácter riguroso para resolver distintos tipos de problemas. En la cosmovisión griega, la geometría era sinónimo de verdad, por lo que todo lo derivado de ella se asumía como una verdad incuestionable y "eterna".

Así, un conocimiento se consideraba científico si podía ser demostrado geométricamente, lo que obligaba a los pensadores a seguir desarrollos geométricos, aunque fueran complicados y extensos. Un ejemplo de esto es la necesidad planteada por Arquímedes de demostrar la cuadratura del segmento parabólico utilizando el método exhaustivo, avalado por la geometría, ya que consideraba que el método mecánico no garantizaba las condiciones de rigurosidad exigidas en su época.

Otro aspecto a considerar para identificar el carácter totalizador de la geometría griega, que puede ser visto como un obstáculo en el desarrollo del conocimiento matemático, es su capacidad para "definir" y "delimitar". Esto evita situaciones ambiguas, como las generadas por el "horror al infinito", ya que fue uno de los elementos fundamentales y/o característicos para la noción sólida de límite, al igual que el movimiento continuo y el término de aproximación a través de figuras geométricas, cuyos aportes fueron dados por los matemáticos clásicos como Zeno de Elea, Arquímedes e Isaac Newton. En este sentido, la geometría actúa como una zona de confort, un obstáculo que eventualmente debe superarse para buscar nuevas estrategias y métodos que permitan el avance de la ciencia matemática.

Por otro lado, basar la construcción del conocimiento únicamente en su carácter pragmático también genera problemas para la fundamentación del conocimiento

científico, ya que lo que resulta útil para algunos puede ser inútil para otros, lo que llevaría a que los estudios o investigaciones caigan en un alto grado de subjetividad.

En el ámbito matemático, la noción de límite ha sido una idea que matemáticos de distintas épocas no lograban fundamentar sólidamente, aunque les permitía resolver problemas de manera práctica. Según Bachelard, esta situación sería un obstáculo, ya que la utilidad genera complacencia y evita la búsqueda de una explicación última de las cosas, haciendo que la utilidad se convierta en la explicación en sí. Sin embargo, respetando la perspectiva de Bachelard (1999), se considera que este carácter útil que Newton y Leibniz encontraron en las cantidades infinitamente pequeñas permite que el conocimiento matemático avance, fomentando el descubrimiento y la creatividad. De hecho, con la implementación del límite, lograron resolver algunos problemas como el de encontrar la tangente en un punto a una curva, un desafío que había persistido en las matemáticas durante mucho tiempo.

Objetivo específico No.4: Derivar los elementos que conformarán una estructura didáctica a fin de identificar el “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición de límite de una función en la Institución Universitaria de Barranquilla.

A continuación, se presenta el análisis e interpretación de la información recolectada desde la perspectiva conjunta de profesores y estudiantes sobre los elementos que conformarán una estructura didáctica que permita identificar el obstáculo “conocimiento unitario y pragmático” durante la enseñanza de la definición de límite de una función a fin, de que sea superado por el estudiante en la Institución Universitaria de Barranquilla.

Inicialmente es importante diferenciar entre un modelo y una estructura didáctica, a fin de que no se genere confusión alguna en dichos términos. Los *modelos didácticos* son herramientas para analizar el quehacer docente, que representan la realidad o algún aspecto concreto de ella, como es el caso de los modelos de enseñanza o de aprendizaje (Jorquera, 2010). Los modelos didácticos pueden ser, por tanto, una simulación de la realidad, que es más cercana a la práctica en comparación a los paradigmas y las teorías. Los modelos, entonces, son aproximaciones con carácter provisional, sujetos a modificaciones según lo que se vaya encontrando en su aplicación. Son además adaptables, permitiendo formular hipótesis acerca de la realidad que se

estudia y son útiles para organizar la acción investigadora o de actuación en el aula. Por su carácter provisional, los modelos deben ser evaluados constantemente al ser confrontados con la realidad misma (Vargas, 2023).

Todos los modelos son producto de actividad científica o de reflexión, además de testimonio de un itinerario de búsqueda de conocimiento, de modo que representan una herramienta de gran interés para estudiar cualquier disciplina.

Las estructuras didácticas están diseñadas para ayudar a los niños a conocer, organizar y entender su entorno, permitiendo su análisis mediante contenidos adecuados. La organización de las actividades permitirá que los niños elaboren significados temporales a partir de sus interacciones en nuevas situaciones y realicen reconstrucciones sucesivas de esos significados iniciales (Jacinto, 2021).

Esto conlleva trabajar en dos dimensiones:

1. En profundidad: Recapitulando y sistematizando experiencias previas, avanzando hacia un conocimiento más amplio.

2. En extensión: Estableciendo conexiones entre los distintos elementos de la realidad, enriqueciendo y complejizando los significados.

En la Educación Inicial, la planificación como intervención docente se organiza a través de estructuras como Unidades Didácticas, Proyectos y Secuencias Didácticas. La elección entre estas opciones dependerá de las características de las situaciones propuestas (Rojas, 2021).

La Unidad Didáctica se estructura en torno a un contexto específico. Esta organización de los contenidos se basa en seleccionarlos de acuerdo con el contexto elegido, considerando las necesidades, intereses y conocimientos previos de los niños. La unidad didáctica representa un fragmento de la realidad, abordado desde perspectivas de las ciencias sociales, naturales y culturales. La propuesta se centra en la selección de un contexto lo suficientemente significativo para el grupo de niños y se enfoca en su estudio (Azzerboni, 2004).

El Proyecto se estructura en torno a productos específicos que se desean alcanzar tras un proceso de desarrollo. En otras palabras, los proyectos parten de contenidos contextualizados en el marco de una producción determinada. Los proyectos representan "...una manera de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje que aborda el estudio

de una situación problemática para los alumnos, favoreciendo la construcción de respuestas a las preguntas que estos plantean (Velandia, 2018).

La Secuencia Didáctica se estructura en torno a un contenido específico que se desea explorar en profundidad. No es necesario que esté conectada con las otras dos estructuras. La secuencia didáctica consiste en una serie de actividades interrelacionadas, organizadas en base a ciertos contenidos, que pueden ser uno o dos según la propuesta. Estos contenidos se desarrollan “mediante conjuntos de situaciones didácticas estructuradas y vinculadas entre sí por su coherencia y sentido propio (Nemirovsky, 1999).

PRESENTACIÓN DE LA ESTRUCTURA DIDÁCTICA

Durante el proceso de aprendizaje de cualquier tema matemático que sea considerado como algo nuevo para un estudiante, se pueden encontrar varios obstáculos o impedimentos, que emergen por diversas causas, sean por la forma errónea de explicar el tema por parte del docente o por el manejo extenso de ejemplos y/o teorías de baja dificultad, entre otras. Estas barreras impiden la construcción de cualquier conocimiento matemático. Razón por la cual, resulta muy importante identificar los llamados obstáculos epistemológicos y cognitivos en el aprendizaje, de tal manera que puedan ser superados, puesto que facilitaría el crecimiento metódico en la estructuración del conocimiento, y permitiría confeccionar una base fuerte para la construcción del conocimiento.

Para esta investigación se tomó como contenido matemático, el tema de límite de una función que, por experiencia personal del investigador, ha podido constatar que presenta gran dificultad para su aprendizaje en los estudiantes de pregrado y aun mas en los contenidos matemáticos donde interviene este concepto.

El trabajo está orientado a generar una aproximación teórica a una estructura didáctica que permita identificar durante la enseñanza y el aprendizaje, el obstáculo epistemológico denominado “conocimiento unitario y pragmático” (definido por Bachelard, 1993) que impide un aprendizaje significativo de la definición de límite de una función, esto siempre enfocado en los obstáculos epistemológicos y cognitivos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los límites. El interés está centrado en que dicha estructura didáctica permita dar luces para la búsqueda y empleo de herramientas

metodológicas que permitan identificar el obstáculo antes mencionado y ofrezcan recursos para superarlo.

Cabe recordar que, el conocimiento unitario y pragmático es considerado como el cuarto obstáculo epistemológico que se puede presentar en toda comunidad precientífica, debido a que el concepto de unidad permite simplificar el estudio de cualquier realidad (Bachelard, 1993).

El utilitarismo plantea una serie de problemas a la hora de definir un término, ya que existe la tendencia de reducirlo y sintetizarlo de tal manera que se pretende explicar o definir un concepto solamente mediante la idea de *utilidad o beneficio*.

Según Bachelard, en todos los fenómenos se busca la *utilidad* humana, no solamente por la ventaja positiva que pueda procurar sino como *principio de explicación*.

En esta investigación se pudo conocer que los alumnos de pregrado tienden a darle unidad a los conceptos de matemática y que esto se traslada desde la educación media, en el caso de la asignatura Cálculo diferencial, reducen los significados de los conceptos tomando en cuenta sólo un aspecto de la realidad: la relación con los beneficios que generan al medio o a las personas. Por ejemplo: al preguntarle a un alumno de pregrado que cursó la asignatura: ¿Qué es el límite de una función?, este contestó: “es una fórmula matemática que ayuda a calcular las propiedades termodinámicas, los niveles de producción y los costos de materiales para generar la mayor ganancia posible”. En este caso podemos ver claramente que no se define el concepto de límite, sino que el estudiante se limita únicamente a mencionar los beneficios que nos brinda el límite de una función y sus propiedades.

Los conceptos mencionados por los estudiantes son básicamente tomando en cuenta la referencia que tienen de estos; es decir, la utilidad que tienen (para lo que interesan) y es lo que usan como principio para explicar diversos términos, en otras palabras, se refiere a que *la utilidad* es la razón que proporciona la base para construir las definiciones.

Para Bachelard, *la utilidad* ofrece una especie de inducción muy particular que podría llamarse *inducción utilitaria*. Esta, conduce a generalizaciones exageradas. Esto obviamente lleva a concepciones erradas y reduce notablemente el significado del concepto.

Por otro lado, en los hallazgos a la pregunta a un docente, ¿Cómo desarrolla usted el tema de límite de una función, sabiendo que es algo novedoso para el estudiante? Respondió: “escribo el concepto, explico su importancia y utilidad, desarrollo muchos ejercicios de aplicación donde se manejen las propiedades”.

Sobre el conocimiento general, autores como Rolong (2022), sostienen que, al explicar mediante el uso de generalizaciones un concepto, se entra; en la mayoría de las veces, en equivocaciones porque los conceptos se vuelven vagos e indefinidos, ya que se dan definiciones demasiado amplias para describir un hecho o fenómeno y se deja de lado aspectos esenciales, como los detalles que son los que realmente permiten exponer con claridad y exactitud los caracteres que permiten distinguirlos y conceptuarlos correctamente. Por ejemplo: al preguntarle a un alumno que cursó Cálculo ¿Cuándo existe el límite de una función?, este contestó: “cuando se puede estudiar el comportamiento de la función a medida que se acerca a un punto dado”. Aquí, se excluye la existencia de los llamados límites laterales y su principal característica. De esta manera, se dejan detalles importantes que pueden inducir a errores de conceptualización.

Al generalizar, el alumno sale del paso con una explicación sencilla que la aplica a toda una definición de una forma resumida y concreta, se dejan de lado detalles que son los que realmente le dan sentido a la definición, y sobre todo le dan validez científica. Por lo que, es necesario resaltar lo que indica Bachelard, de que el conocimiento general se convierte es un obstáculo epistemológico en el proceso de construcción de conocimiento científico.

En cuanto a lo pragmático, consiste en la preferencia de lo práctico y lo útil, de acuerdo a la Definiciones de la Real Academia Española. El pragmatismo es un sistema filosófico. Introducido en la filosofía por el filósofo y físico estadounidense Charles Sanders Peirce en 1878, donde se sostiene que, ningún objeto o concepto posee validez inherente o tiene importancia. Su trascendencia se encuentra tan sólo en los efectos prácticos resultantes de su uso o aplicación. La verdad de una idea u objeto, por lo tanto, puede ser medida mediante la investigación científica sobre su utilidad.

Sobre el aprendizaje de la noción de Limite de una función

Para Salinas y Alanís (2009), resulta evidente que el aprendizaje de los principios del Cálculo es un proceso complejo para el estudiante. Pues en numerosas investigaciones entre las que se destacan, las de Arias en 2019, Hernández, Prada y Ramírez en 2017 señalan, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma mecánica algunos cálculos de límites y derivadas, y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar de verdad en el campo del cálculo y hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas.

De acuerdo a Fernández (2015). la comunidad matemática dispone hoy de una caracterización formal del concepto de límite. Respecto a este concepto, las definiciones propuestas por Weierstrass y Cauchy respectivamente, mantienen, aún hoy, su vigencia. La caracterización lógico-formal del límite y la derivada ha sido uno de los fundamentos en ciertos modelos de enseñanza. Pero tal como lo muestran los resultados de investigaciones didácticas desarrolladas, las dificultades que presentan los estudiantes son fuertes y resistentes.

Si bien es cierto, la definición de límite de una función ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo y su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Según Medina (2001), primero por su carácter estructural que lo constituye el eje central y concepto básico sobre el cual se construye la estructura del Cálculo diferencial e integral y otros conceptos de otras ramas de la matemática; también por su carácter instrumental como herramienta para la solución de problemas tanto al interior de las matemáticas como de ciencias aplicadas, tales como la Física, la Ingeniería y finalmente, como objeto matemático que se gesta en diferentes contextos: geométrico, aritmético, métrico, topológico y asociado a otros objetos matemáticos.

Ahora bien, es recomendable tomar en cuenta que en la Educación Superior generalmente se introduce este concepto a través de la definición formal o de las técnicas algorítmicas para su cálculo. Investigaciones en Educación Matemática como la de Tall y Vinner (1981) han evidenciado que la definición de un concepto no garantiza la comprensión de dicho concepto; una cosa es la imagen del concepto y otra la imagen de

la definición que se forman los estudiantes, la definición formal da precisión y rigor matemático, pero, encapsula las situaciones y procesos que le dan sentido al concepto, ocultando su significación y complejidad.

En el caso de esta investigación, en cuanto a la información suministrada por los estudiantes durante la entrevista, se realizó una comparación del significado que le dan al concepto de límite desde un primer nivel de complejidad cognitiva, al puntualizar en los hechos, propiedades, términos, palabras, representaciones, y modos de uso del límite, lo que permitió caer en cuenta del cambio del significado que evidencian los estudiantes durante la enseñanza de este concepto y posterior a la misma.

Fundamentación de los constructos que conforman la estructura

Los constructos teóricos obtenidos como producto final del estudio tienen su fundamentación en las interrogantes de la investigación que, a su vez permitieron generar los objetivos de la misma y que fueron materializados en el planteamiento del problema; en las teorías de entrada de acuerdo con las perspectivas teóricas de la Educación Matemática; en el aporte de los antecedentes o investigaciones afines al tema en cuestión y los conceptos teóricos referenciales, presentados en el capítulo II, así como en los resultados obtenidos mediante el análisis de la información proporcionada por los docentes, que desde hace varios años administran la asignatura Cálculo diferencial y por estudiantes que son futuros ingenieros de los programas de Mecatrónica, Telemática, Industrial, Eléctrica y Seguridad y Salud en el trabajo; que participaron en la investigación, los cuales fueron seleccionados bajo ciertos criterios, a los cuales se le aplicó una entrevista en profundidad, todo en el marco de la metodología cualitativa.

Este modelo consta de cinco fases. Estas fases se ilustran en el gráfico 11.

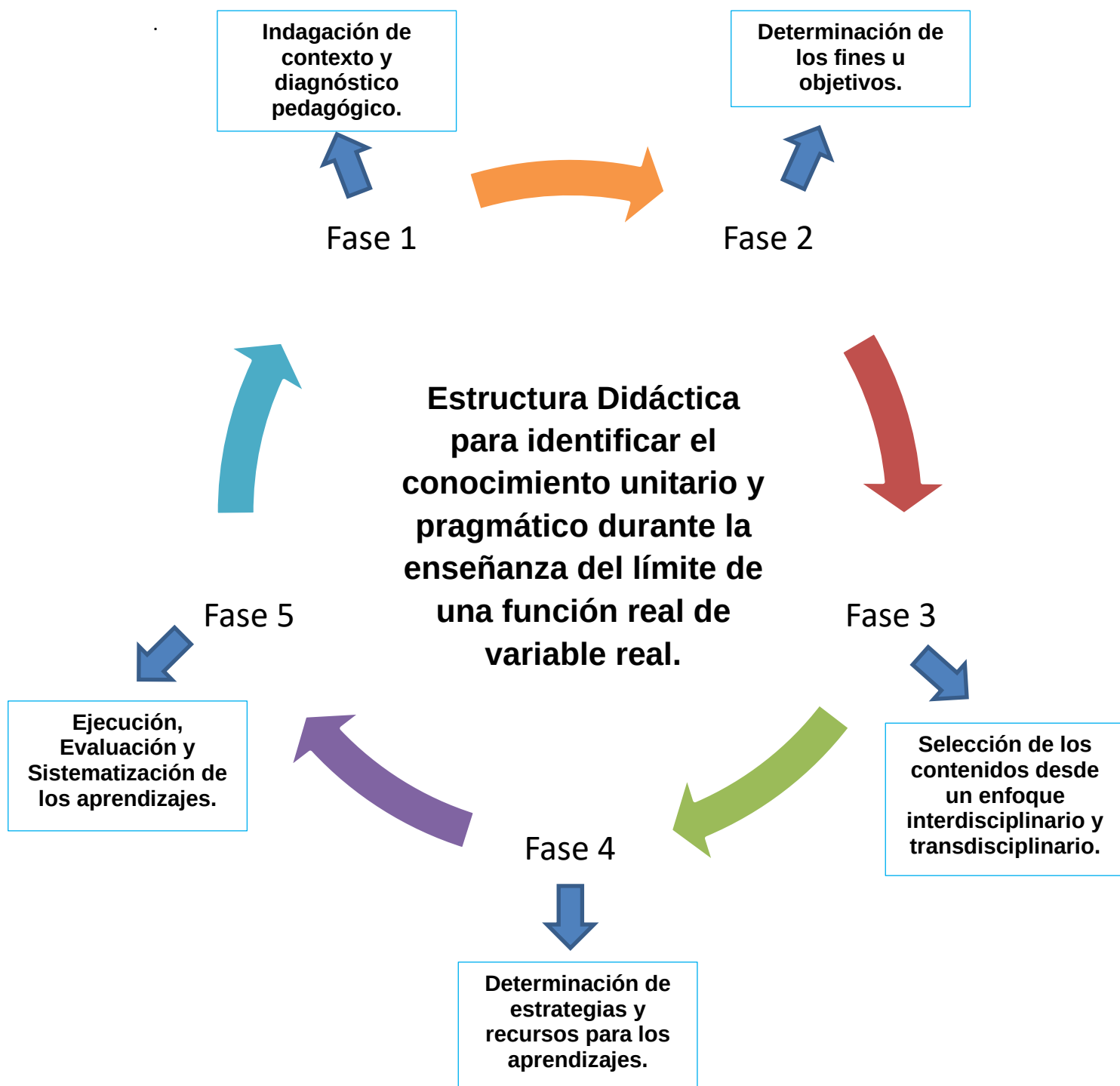


Gráfico 11: Elementos de una estructura didáctica para identificar el obstáculo epistemológico "conocimiento unitario y pragmático" durante la enseñanza del límite de una función real de variable real. Nota: Elaboración propia.

En esta producción teórica se concibe a la didáctica como la disciplina pedagógica de carácter práctico y normativo que tiene por objeto específico la enseñanza, esto es, la manera coherente y sustentada de dirigir, orientar, acompañar eficazmente a los estudiantes en su aprendizaje, respetando sus características, intereses y saberes, anexando en ella la particularidad de poder identificar durante su puesta en práctica durante la enseñanza y en el aprendizaje de obstáculo “conocimiento unitario y pragmático” a fin de superarlo.

Para Medina, A y Mata, F. , (2008) “la didáctica, es el conjunto sistemático de principios, normas, recursos y procedimientos específicos que todo docente debe conocer y saber aplicar para orientar con seguridad a sus alumnos en el aprendizaje” (p.31). En el caso de esta investigación sería del límite de una función y sus propiedades en el marco del Cálculo diferencial.

En este sentido, los aportes teóricos – didácticos que en esta investigación emergen, tienen como finalidad, facilitar a los docentes que dictan o deseen dictar la asignatura Cálculo diferencial, a futuros ingenieros de los programas de Mecatrónica, Telemática, Industrial, Eléctrica y Seguridad y Salud en el trabajo, el diseño de una estructura didáctica que en el contexto de la Educación Matemática conformen una didáctica novedosa, que contribuya a ser más efectivo el proceso enseñanza y que el aprendizaje de los contenidos de esta asignatura sean verdaderamente significativos.

DESCRIPCIÓN DE LAS FASES QUE CONFORMAN LA ESTRUCTURA DIDACTICA

FASE 1. Indagación de contexto y diagnóstico pedagógico

Hay dos elementos fundamentales en esta fase, que vale la pena tenerlos en cuenta como son la indagación del contexto y, por otro lado, el diagnóstico pedagógico.

Según Camacho, H., Casilla, D., & de Franco, M. F. (2008), la indagación puede definirse como la capacidad de formular preguntas, una habilidad que surge de las necesidades humanas y que se transforma en una herramienta para entender y captar el objeto de estudio. John Dewey (1929), señalaba que la pregunta y la curiosidad, en cuanto actitud exploratoria, es la que da origen al pensamiento, decía, que en el niño la curiosidad es como un instinto natural y que, en su crecimiento y participación en las

relaciones sociales, éste se vale del lenguaje interrogativo, de las preguntas, para continuar explorando, por medio de los adultos, el mundo.

Este autor sostiene que, al principio, hacer preguntas es simplemente un acto de curiosidad, un deseo exploratorio y de manipulación. Con el tiempo, se transforma en una actividad mental de la curiosidad y en una estructura del pensamiento, ya que al formular una pregunta se inicia una búsqueda y procesamiento de información que genera nuevo conocimiento (Dewey, 1965).

Según los National Standards, la indagación se describe como aquellas actividades que llevan a los estudiantes a hacer observaciones; formular preguntas; examinar libros y otras fuentes de información; planificar investigaciones; revisar lo conocido a la luz de la evidencia experimental o experiencial; recopilar, analizar e interpretar datos; plantear preguntas, explicaciones y predicciones; y comunicar y compartir los resultados obtenidos a través de procesos sistemáticos. Por lo tanto, las actividades de indagación requieren habilidades para identificar conceptos, suposiciones, teorías, y utilizar el pensamiento lógico, crítico, reflexivo, así como considerar explicaciones alternativas (Camacho, H., Casilla, D., & de Franco, M. F. , 2008).

Teniendo claridad sobre el término de indagación, ahora al asociarlo con el contexto, esencialmente termina siendo un método estructurado a manera de entrevista de campo, fundamentado en algunos principios clave que lo distinguen de una entrevista periodística común. Se trata más de un proceso de descubrimiento que de una evaluación; se asemeja más al aprendizaje que a la evaluación, y donde al formular preguntas, se constituye en una primera intención de inicio para provocar el acto didáctico dentro del aula de clases.

Una vez que se inicia con la indagación del contexto, se prosigue con el diagnóstico pedagógico. El diagnóstico educativo es un concepto que se menciona frecuentemente en el discurso pedagógico actual (García, 1995). No obstante, la confusión en torno a su terminología o los significados que se le atribuyen disminuye su gran importancia.

Marí Mollá (2001) define el diagnóstico educativo como un proceso de indagación científica basado en una fundamentación epistemológica, cuyo objetivo abarca tanto a individuos o grupos como a entidades, tales como instituciones, organizaciones,

programas, y contextos familiares o socio-ambientales. Este diagnóstico considera la complejidad y totalidad de su situación e incorpora una intervención educativa perfeccionadora en su metodología (p. 201). De lo anterior, es importante destacar que la indagación debe constituirse en el primer momento y posteriormente, debe culminar con el diagnóstico, puesto que hacerlo es crucial para entender profundamente una situación, tomar decisiones informadas, diseñar intervenciones efectivas y evaluar su impacto, lo que en última instancia contribuye a la eficacia y eficiencia en la resolución de problemas.

Por otro lado, los estudiantes presentan estilos de aprendizaje diversos, mientras que los docentes utilizan métodos y enfoques, de enseñanza que frecuentemente no se alinean con las necesidades educativas actuales. Por ende, es crucial que los docentes realicen un autoanálisis de las metodologías aplicadas y los contenidos curriculares, tomando en cuenta los resultados del diagnóstico para explorar alternativas adecuadas. Así mismo, los docentes, al revisar los conocimientos previos de sus estudiantes, lo que se trata es de responder a estos interrogantes: ¿Qué saben los estudiantes de la temática seleccionada? ¿Cómo la conocen? ¿Qué desconocen? ¿Crees que sea útil en tu vida cotidiana?

Por último, esta etapa es crucial para abordar los obstáculos epistemológicos. En este momento, el docente debe prestar especial atención a los conceptos científicos incluidos en la temática de abordaje, así como a las concepciones y modelos mentales que los estudiantes manejan sobre el tema. Es necesario analizar las ideas previas de los estudiantes, junto con sus nociones y definiciones, ya que a menudo se basan en creencias tradicionales y mitos culturales de su entorno. Este análisis permitirá identificar generalizaciones, metáforas, analogías, y descripciones superficiales pero amplias de los conceptos básicos relacionados con dicha temática.

FASE 2. Determinación de los fines u objetivos

Después de completar la primera fase de indagación y diagnóstico, es necesario establecer otro elemento clave: la determinación de los fines u objetivos. Un objetivo se define como la identificación de un desconocimiento, una necesidad, una habilidad por desarrollar o un problema por resolver. Basándose en los desconocimientos detectados

en la fase 1, se deben formular objetivos que promuevan el desarrollo del conocimiento a través de la corrección y ampliación del conocimiento previo (Rico, 2012). En este contexto, los objetivos incluirán, por un lado, la intención de adquirir los contenidos relacionados con las ciencias involucradas y sus conceptos fundamentales, descritos y analizados en profundidad.

En esta fase, se pretende responder interrogantes como: ¿Qué se quiere lograr? ¿Qué potencialidades se pretenden desarrollar en los estudiantes? ¿Pará qué lo voy hacer? ¿Qué obstáculos o desafíos pueden generarse? ¿De qué manera podrías considerar útil lo aprendes o lo que enseñas? ¿Crees que lo práctico es una forma de aprender más rápido? ¿Es importante el aprendizaje teórico de un concepto? ¿Crees en la utilidad de un concepto? ¿Crees en la utilidad de la práctica?

Es importante destacar que la formulación de los fines u objetivos influye en la planificación, ya que son fundamentales para seleccionar los contenidos, en estrecha relación con la indagación de los conocimientos previos y los obstáculos epistemológicos identificados durante el diagnóstico. Además, guían la elección de las estrategias más adecuadas para alcanzar dichos objetivos, identificar y superar dichos obstáculos epistemológicos.

Los objetivos, hacen parte de uno de los principios didácticos dados por Viviano (1988), en el que establece que: “Los objetivos deben formularse tomando en cuenta la naturaleza del contenido y los procesos psicológicos del aprendiz”.

FASE 3. Selección de los contenidos desde un enfoque interdisciplinario y transdisciplinario.

Bachelard (1993), en su análisis sobre las barreras que impiden el avance del conocimiento científico, propuso el concepto de "Conocimiento unitario y pragmático" como un obstáculo epistemológico significativo. Este obstáculo se refiere a la tendencia a simplificar y unificar el conocimiento, así como a buscar soluciones prácticas inmediatas en lugar de profundizar en la complejidad y la teoría. Identificar este obstáculo en la selección y eliminación de contenidos es crucial para evitar limitaciones en el entendimiento y progreso científico. Lo anterior, se relaciona con otro principio didáctico establecido por Viviano (1988): La participación constructiva. Trabajo de ascenso. UPEL-

Maracay., 1988) Viviano (1988), el cual establece que: “En cada momento del proceso el docente debe tener presente la concepción que él tiene de los objetivos, del contenido, de la estrategia y de la evaluación, o al menos la concepción del hombre que se educa”.

Para identificar este obstáculo, es necesario seguir un proceso riguroso de revisión de contenidos. El primer paso se le puede llamar el *Análisis de Simplicidad*. Es esencial revisar si los contenidos tienden a simplificar excesivamente los conceptos, un ejemplo de esto sería la presentación de fenómenos complejos con explicaciones excesivamente reducidas. Este tipo de simplificación puede llevar a una comprensión superficial y errónea de los fenómenos estudiados. Es importante destacar, que, en esta fase, se debe responder los siguientes interrogantes: ¿Qué se quiere aprender? ¿Qué contenidos se integran a la temática planteada? ¿Cuál es su aplicabilidad en su vida cotidiana?

El siguiente aspecto a considerar es la *Unificación Forzada*. Esto implica observar si se intenta unificar todo un contenido temático sin respetar sus diferencias y matices. La eliminación de teorías alternativas o complementarias en favor de una sola explicación dominante puede ser indicativa de este obstáculo. Un conocimiento verdaderamente enriquecido necesita considerar y valorar la diversidad teórica y metodológica.

Un Pragmatismo Excesivo es otro factor clave. Aquí, se identifica si hay un enfoque desproporcionado en las aplicaciones prácticas inmediatas sin considerar la importancia de la teoría y la investigación básica. La búsqueda de soluciones rápidas y prácticas puede ser útil a corto plazo, pero puede limitar la profundidad y alcance del conocimiento a largo plazo (Mercado, 2016).

Tras la revisión inicial de los contenidos, es importante realizar una *Comparación de Fuentes*. Evaluar la *Diversidad Teórica* implica comparar los contenidos seleccionados con otras fuentes para ver si se han eliminado teorías alternativas o enfoques diferentes que podrían enriquecer el conocimiento. Además, contrastar la *Complejidad vs. Simplicidad* es crucial para verificar si se ha perdido la riqueza teórica en favor de explicaciones simplificadas.

La *Evaluación Crítica* es el siguiente paso. Formular *Preguntas Clave* sobre los contenidos es fundamental: ¿Se ha considerado la multiplicidad de perspectivas? ¿Se ha priorizado la utilidad inmediata sobre la comprensión profunda? ¿Se ha reducido la complejidad de los fenómenos estudiados? Además, es necesario un *Análisis de*

Omissiones para investigar si se han omitido conceptos importantes o si se han eliminado contenidos que podrían complicar la explicación unitaria y pragmática.

Finalmente, *un chequeo o revisión* son esenciales para asegurar la validez y profundidad del conocimiento. Consultar con expertos en la materia puede proporcionar retroalimentación valiosa sobre si la selección de contenidos ha sido demasiado simplificadora o pragmática. La *Revisión Iterativa* implica ajustar los contenidos repetidamente para mantener un equilibrio entre la unidad y la complejidad, así como entre la teoría y la práctica.

FASE 4. Determinación de estrategias y recursos para los aprendizajes.

En esta fase, la identificación del obstáculo “conocimiento unitario y pragmático” puede representar una barrera significativa en el contexto educativo, ya que limita la capacidad de los estudiantes para desarrollar un entendimiento profundo y crítico. Para identificar y abordar este obstáculo, es fundamental analizar cómo se diseñan y emplean las estrategias y recursos para el aprendizaje.

Las estrategias de enseñanza juegan un papel crucial en la formación del conocimiento de los estudiantes. Sin embargo, estas pueden caer en el obstáculo del conocimiento unitario y pragmático si no se manejan adecuadamente (Gibbons, 1998). Por otro lado, un enfoque excesivo en la simplicidad puede ser perjudicial para el desarrollo del pensamiento crítico. Es esencial evaluar si las estrategias de enseñanza se centran en simplificar los conceptos para facilitar una comprensión inmediata, en lugar de permitir la exploración de la complejidad teórica. Por ejemplo, se debe verificar si los docentes prefieren enseñar “fórmulas mágicas” o pasos simplificados en lugar de explicar el fundamento teórico detrás de ellos. Esta práctica puede llevar a una comprensión superficial, donde los estudiantes no desarrollan habilidades para manejar problemas complejos de manera independiente.

Las estrategias no pueden estar encaminadas a la uniformidad de contenidos, ya que se incurre a unificación del conocimiento. Las estrategias de enseñanza que tienden a unificar el conocimiento, eliminando la diversidad de enfoques y teorías, pueden ser problemáticas. Esto puede incluir el uso de un solo libro de texto o una única perspectiva teórica, sin considerar otras interpretaciones. La uniformidad de contenidos reduce la

exposición de los estudiantes a diferentes marcos de pensamiento, lo que es crucial para desarrollar una comprensión integral y multifacética (Marciales, 2004).

Esta fase también sustenta en dar respuesta a objetivos, contenidos e incluye las intencionalidades y los ejes integradores, así mismo; pretende dar respuesta a: ¿Qué vamos a hacer, ¿qué vamos a usar?, ¿Qué recursos para aprender tienen los y las estudiantes de la temática?, ¿Cómo les gustaría que se desarrollara la temática?, ¿Cuál es su aplicabilidad a la vida cotidiana?, ¿Cómo se va hacer?, ¿Qué estrategias y recursos vamos a utilizar?, ¿Qué tiempo vamos a emplear?

En esta fase, se debe evitar un enfoque pragmático ya puede limitar el desarrollo teórico de los estudiantes. Es necesario revisar si hay una inclinación predominante hacia la aplicación práctica y utilitaria del conocimiento, con poca atención a la teoría y la investigación básica. Las actividades y proyectos pueden estar más orientados a resultados inmediatos y aplicables, dejando de lado el entendimiento profundo. Este enfoque puede ser útil a corto plazo, pero no fomenta un aprendizaje duradero y una comprensión profunda de los principios subyacentes.

Al promover un enfoque que valore la complejidad teórica y la diversidad de perspectivas, se puede enriquecer el proceso de aprendizaje y fomentar un entendimiento más profundo y crítico del conocimiento. La educación debe aspirar a desarrollar no solo habilidades prácticas, sino también una comprensión teórica y crítica que permita a los estudiantes enfrentar y resolver problemas complejos de manera innovadora y efectiva.

FASE 5. Ejecución, Evaluación y Sistematización de los aprendizajes.

Identificar el obstáculo epistemológico "conocimiento unitario y pragmático" en los procesos de Ejecución, Evaluación y Sistematización de los aprendizajes implica reconocer cómo este obstáculo puede limitar o distorsionar la comprensión y el desarrollo del conocimiento en un contexto educativo (Alzate, 2011).

La ejecución se enfoca en la participación activa de los estudiantes en el desarrollo y realización del evento pedagógico. Esto implica que los estudiantes se involucren en las acciones necesarias para llevar a cabo sus actividades de aprendizaje, lo que permite motivar, integrar, investigar, reflexionar, consolidar conocimientos y aplicarlos. En otras

palabras, se trata de transferir conocimientos para lograr un aprendizaje verdaderamente significativo. Los estudiantes son quienes implementan las estrategias planificadas, y es en este momento cuando pueden superar los obstáculos epistemológicos (Gordón, 2016).

En una ejecución de aprendizajes, se pueden presentar algunos indicadores que ayudarían a identificar el Obstáculo Epistemológico “Conocimiento Unitario y Pragmático”, como por ejemplo la simplificación excesiva, el enfoque utilitarista y la descontextualización. Como se dijo en la fase anterior, los contenidos cuando se presentan de manera simplificada, hacen que se pierda la complejidad de los temas. Por otro lado, un enfoque utilitarista, se privilegia la enseñanza de conocimientos y habilidades que tienen una aplicación inmediata y directa, dejando a un lado el fomento de un pensamiento crítico y la comprensión profunda.

En la evaluación del aprendizaje se debe distinguir entre el objeto y el instrumento; es decir, qué entregará o hará el estudiante y con qué registrará el docente la evaluación. Esto es importante, porque el tipo de evaluación va a permitir la identificación del obstáculo. Por ejemplo, las evaluaciones cerradas y unidimensionales, no permitirían la exploración de diversas perspectivas o enfoques alternativos (Gil Mora, 2014).

Cuando se hace énfasis en la memorización, también se convierte en un indicador de identificación del obstáculo, ya que se evalúa la capacidad del estudiante para recordar información específica, en lugar de su comprensión profunda o capacidad de análisis crítico. Algo, que no se debe apartar y es que, las preguntas en la evaluación, juegan o tienen un papel fundamental, puesto que es posible que no vinculen los conocimientos con situaciones prácticas o problemas reales, lo que refuerza una visión fragmentada del conocimiento.

Finalmente se sistematiza, es decir, se describe, ordena y reflexiona sobre lo que sucedió en el desarrollo de las actividades de aprendizaje. Esta reflexión gira en torno a los logros, alcances y limitaciones antes, durante y después de su ejecución, desde la experiencia propia y comunitaria, de las actividades planificadas y cumplidas. Cuando se sistematiza de manera fragmentada, no es posible integrar los conocimientos de diferentes áreas o disciplinas, dando origen al obstáculo epistemológico.

Es posible, que se registren y organicen aprendizajes de manera que cada área de conocimiento se vea como independientes y sin relación con los demás, eso también da muestra de la presencia de dicho obstáculo. Así mismo, puede ocurrir que no se fomente la reflexión sobre cómo se construye el conocimiento, sus limitaciones y su contexto histórico y social y eso hace del docente, uno de los principales protagonistas del proceso.

REFLEXIONES FINALES

La investigación en educación relacionada con la matemática ha adquirido su dimensión propia, ya que genera conocimiento al responder a preguntas que se formulan con el propósito de entender lo que ocurre cuando el contenido matemático se instala en el sistema educativo para convertirse en objeto de enseñanza y aprendizaje. Al comienzo resultó simple pensar que con el conocimiento de la matemática y ciertas habilidades pedagógicas bastaban para ejercer la práctica docente. Actualmente se reconoce que la problemática educativa de la matemática adquiere tintes muy particulares que corresponden a aspectos cognitivos (*cómo se aprende*), didácticos (*cómo se enseña*) y epistemológicos (*cómo se concibe el saber a enseñar y aprender*). Esto situado en el entorno social que enmarca la interacción entre el contenido matemático, los estudiantes y el profesor (*dónde se enseña-aprende*).

Ahora bien, la acción de intervenir eficazmente en el sistema didáctico para mejorar el aprendizaje de la matemática excede al simple proceder de buena voluntad. Más bien, exige el compromiso de profundizar en el conocimiento de la problemática y hacer de la práctica docente cotidiana un espacio de reflexión sobre el saber adquirido.

Esta investigación intenta ofrecer elementos que estimulen al docente de matemática a dicha reflexión, al presentar el surgimiento de una estructura teórica de una didáctica para la enseñanza del Cálculo diferencial que, en su puesta en práctica permita identificar el obstáculo epistemológico denominado “conocimiento Unitario y pragmático” durante la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite de una función real de variable real.

Esta investigación a pesar de que se centra en el obstáculo definido por Bachelard como Conocimiento unitario y pragmático, no deja de lado los diferentes obstáculos denominados obstáculos didácticos y cognitivos en el sentido de Guy Brousseau.

Autores como Andrade (2011), afirman que los *obstáculos didácticos* se originan en los procesos de la instrucción, son producidos por los errores en la enseñanza (metodológicos, curriculares o conceptuales), por uso inadecuado de expresiones o por mala construcción del currículo que impide los conceptos necesarios para obtener el conocimiento, incluyendo modos de tiempo y espacio, así como guías inadecuadas. De la misma manera se presentan, cuando el docente repite lo que él aprendió y no identifica el concepto. Estos se deben evitar porque impiden superar los *obstáculos epistemológicos*, es decir, impiden ver las cosas de una nueva manera, es decir, son las clases de conocimiento que impiden la construcción de una nueva idea y no permiten su correcta apropiación (en este caso, conceptos y/u objetos matemáticos), y se *identifican* por medio de la presencia de errores frecuentes de los estudiantes en los cursos de matemática a través del tiempo.

Además, según lo plantean Palarea y Socas (1994), se encuentran *los obstáculos cognitivos* que son reconocidos como conocimientos que han sido convenientes para la solución de algunos problemas durante cierto tiempo, son ubicados en la mente y luego resultan ser inapropiados y de compleja adaptación al tenerse que enfrentar el estudiante a problemas distintos, además son *los inherentes* a la construcción del conocimiento por parte del alumno,

En este sentido, conocer los diferentes obstáculos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, permite diseñar estrategias, habilidades y destrezas, así como potencializar el pensamiento lógico frente al conocimiento matemático y en la resolución de problemas.

La experiencia de llevar a cabo esta investigación cualitativa en Educación Matemática me llenó de satisfacción en cada esfuerzo realizado para lograrla, ya que este paradigma me permitió expresar sentimientos reales en el contexto de la práctica investigativa. Así, el nivel de logro analítico dependió de la construcción cognitiva y me otorgó una responsabilidad ineludible y un fuerte compromiso con los futuros lectores. Esto se debió a que inicié una forma de interacción basada en experiencias y

conocimientos que, aunque a veces diferentes, en otras ocasiones coincidían y se entrelazaban, permitiéndome finalmente alcanzar la meta.

Este estudio me permitió darme cuenta de la necesidad de ampliar la visión, buscar nuevas formas de hacer mejorar el proceso de enseñanza que el maestro universitario desarrolla en el aula de clases y considerar los eventos, especialmente las acciones humanas, desde otras perspectivas, explorando las tradiciones cualitativas y sus procedimientos. Además, la experiencia de compartir vivencias con los facilitadores y participantes del doctorado en Educación Matemática fue gratificante. Compartir e indagar en sus conocimientos despertó en mí un gran interés por alcanzar los resultados finales, ya que su sencillez y disposición actuaron como una guía en este camino.

Hoy muy poco se conoce, de lo que puede generar desde lo didáctico la identificación de un obstáculo epistemológico como lo es el conocimiento unitario y pragmático, dado a conocer primero por Bachelard y ampliado a la Educación Matemática por Guy Brousseau, lo que implica que a pesar de que muchos docentes universitarios lo desconocen, esta investigación se convierte en un importante aporte para su trabajo didáctico en el aula.

En el Doctorado de Educación Matemática, como en toda disciplina científica se fortalece los paradigmas de investigación y se sigue manteniendo una visión más amplia del conocimiento científico, ya que aquí me ha dado la oportunidad de buscar otra manera de demostrar y observar la realidad desde otra perspectiva angular y así contrastar resultados o generar otras teorías.

mensaje final

“Cuando nos parezca que una teoría es la única posible, debemos tomar esto como un signo de que no hemos entendido ni la teoría ni el problema que pretende resolver”.

KARL POPPER

Referencias

- Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. . (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. . *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, Berlin.*, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.
- Abreu, J. (2012). Hipótesis, método & diseño de investigación (hypothesis, method & research design). . *Daena: International Journal of Good Conscience.*, 7(2), 187-197.
- Addine, F., & García, G. . (2004). Temas de Introducción a la formación pedagógica: Componentes del proceso enseñanza-aprendizaje. *Pueblo y Educación.*
- Alarcon S. y Suescun C. (2005). El obstáculo euclideo en la construcción del concepto de tangente. Tesis de maestría. *Universidad de Antioquia.*
- Alejo, M., & Osorio, B. . (2016). El informante como persona clave en la investigación cualitativa. . *Gaceta de pedagogía.*, 35, 74-85.
- Alibert, A.; Artigue, M. et al. . (1989). Différentielles et procédures différentielles au niveau du premier cycle universitaire. Research Report. Ed. IREM, Paris VII.
- Álvarez, M. (2000). Educación a distancia. ¿Para qué y cómo?. [sitio en Internet]. Disponible en:<http://www.sld.cu/libros/distacia/indice.html>. Acceso el 12 de marzo del 2000.
- Álvarez-Gayou, J. L. (2003). Cómo hacer investigación cualitativa. . *Fundamentos y metodología.*
- Alzate Quintero, G. C. (2011). Obstáculos epistemológicos en perspectiva de naturaleza de la ciencia-NOS-en el discurso oral y escrito de maestros en Caldas.
- Alzate Quintero, G. C. (2011). Obstáculos epistemológicos en perspectiva de naturaleza de la ciencia-NOS-en el discurso oral y escrito de maestros en Caldas.
- Amescua, M. & Gálvez, A. . (2002). Los modos de análisis en investigación cualitativa en salud: Perspectiva crítica y reflexiones en voz alta. . *Revista Española de Salud Pública. Vol.76. No.5.* , Recuperado el 17 de octubre del 2007 de: http://www.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S113557272002000500005 .
- Andrade, C. (2011). Obstáculos Didácticos en el aprendizaje de la Matemática y la formación de docentes. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática*

- Educativa - ALME 24 (pp. 999-1007). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Araya, D. (2022). *Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable*. Osorno, Chile.: Universidad de los Lagos.
- Arrieta, M. (2009). Los procesos cognitivos asociados al aprendizaje de la matemática. *Edit. Trillas. México* .
- Artigue, M. & Ervynck, G. (1992). Proceedings of Working Group 3 on students' difficulties in calculus. *ICME 7, Université de Sherbrooke*.
- Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. . *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, Edition IMAG*.
- Artigue, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. . Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. , 67-198.
- Artigue, M. (1992). Functions from algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.), *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy*. . MMA 25.
- Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. . En Bielher, R. et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Press., 27-39.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. . En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. , 97-140.
- Artigue, M. (2003). The teaching and learning of mathematics at university level. En D. Holton et al. (Eds.), *An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers., pp. 207-220.
- Artigue, M. (2018). Epistemología y didáctica. El cálculo y su enseñanza, *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. 11, 1-31.
- Artigue, M. y Rogalski, M. . (1989). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG première année. . En *Enseigner autrement en DEUG scientifique*, Publication Inter-IREM.
- Artigüé, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. . *Ingeniería didáctica en educación matemática*. , 1, 97-140.

- Artigue, M.; Menigaux, J. y Viennot, L. . (1990). Some aspects of student's conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics.*, Vol. 11, pp. 262-272.
- Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. . *Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona.*
- Azzerboni, D. R. (2004). Currículum abierto y propuestas didácticas en educación infantil (3 a 5 años): planificación y diseño de contextos de enseñanza-aprendizaje . (Vol. 55). *Noveduc Libros.*
- B., C. (1994). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.*, *Kluwer Academic Publishers.*, pp. 153-167.
- Bachelard, G. (1938). La formación del espíritu científico (trad. José Barbini). México: Siglo XXI.
- Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. Paris Vrin 1975.
- Bachelard, G. (1949). Le rationalisme appliqué (Vol. 43). *Paris: Presses universitaires de France.*
- Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico.* México: Editorial Siglo XXI.
- Bachelard, G. (1993). La formación del espíritu científico. Siglo xxi.
- Bachelard, G. (1999). *La noción de obstáculo epistemológico. La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento científico.* México: Siglo XXI Editores, 15-26.
- Baker, B.; Cooley, L. & Trigueros, M. . (2000). A calculus graphing schema. . *The Journal for Research in Mathematics Education* ., 31 (5), 557–578.
- Ballester, S. et al. (1992). Metodología de la Enseñanza de la Matemática Tomo I. *La Habana. Ed. Pueblo y Educación.*
- Bárcenas, M., Del Carmen, M., & Ubaldo, C. M. . (2019). Herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en estudiantes de educación superior. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo.*, 10(19), 1-31.
- Barufi, M. C. (1999). A construção/negociação de significados no curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral. . 195 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo.

- Bell, E. (1940). The development of Mathematics. *Traducción al español por Fondo de Cultura Económica, México, 2003.*
- Beuchot, M. (2010). *Hermenéutica analógica, educación y filosofía.* Bogotá: Universidad Santo Tomás.
- Bezuidenhout, J. & Olivier, A. . (2000). Student's conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education . Hiroshima, Japan., (Vol. 2, pp. 73–80).* .
- Blázquez, S. y Ortega, T. . (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal. . Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. ISBN: 970-625246-0. México.*
- Blázquez, S. y Ortega, T. . (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67–83.
- Blázquez, S., y Ortega, T. . (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. . Revista de Didáctica de las Matemáticas., 8(30), 67-82.*
- Bosch, M. & Chevallard, Y. . (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Objet d'étude et problématique, Recherches en Didactique des Mathématiques.* 19/1, 77-123.
- Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los" elementos de representación" en la actividad matemática.
- Brito Vallina, M. L. (2010). Reflexiones acerca de la enseñanza de las matemáticas en las ciencias técnicas. . *Pedagogía Universitaria Vol. 15, No. 3, 2010. Ciudad de La Habana (Cuba), Cuba: Editorial Universitaria. Recuperado de <https://elibro-net.unibarranquilla.basesdedatosezproxy.com/es/ereader/unibarranquilla/22598?page=6>.* .
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática.* Facultad de Matemática. Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
- Brousseau, G. (1994). Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques. *ICMI Study 94.*
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. . Kluwer Academic Publishers. .*
- Brousseau, G. (1999). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7).* . Libros del Zorzal.
- Brunschvicg, L. (1945). *Las Etapas de la Filosofía Matemática.* Buenos Aires, Argentina: Lautaro.
- Buñuel, P. S. (2020). *Educación Emocionando (Vol. 29).* . *Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.*
- Cabero, J. (2001). *Tecnología educativa. Diseño y utilización de medios en la enseñanza.*
- Cabrera, F. C. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *theoria*, 14(1), 61-71.
- Cajori, F. (1915). The history of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits. *American Mathematical Monthly*, Vol. XXII. Traducción al español por Elisa Zacarías. *Revista del seminario enseñanza y titulación. Año IV. Octubre 1987.*, pp.1-6, 39-47,77-82, 109-115, 143-149, 179-186,215-220, 253-258, 292-297. .
- Cajori, F. (1923). *La historia de las notaciones del cálculo.* . *Annals of Mathematics* , 1-46.
- Camacho, H., Casilla, D., & de Franco, M. F. . (2008). La indagación: una estrategia innovadora para el aprendizaje de procesos de investigación. . *Laurus.*, 14(26), 284-306.
- Camacho, H., Casilla, D., & de Franco, M. F. . (2008). La indagación: una estrategia innovadora para el aprendizaje de procesos de investigación. . *Laurus.*, 14(26), 284-306.
- Camacho, M. & Depool, R. . (2002). Using derive to understand the concept of definite integral. . *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 1–16.
- Campbell, D. T. y Fiske, D. . (1959). Convergent and Discriminant Validation by the Multitrait Multimethod Matrix. . *Psychological Bulletin*,, 56,81-105.
- Candell, A. A. D. V., & Adum, S. D. F. (2019). Importancia del uso de las bibliotecas virtuales en el desarrollo del conocimiento y actividades investigativas. . *Revista científica ECOCIENCIA.*, 6(1), 1-17.
- Caro, L. (2021). Técnicas e instrumentos para la recolección de datos. *Recuperado de <https://www.lifeder.com/tecnicas-instrumentos-recoleccion-datos>.*

- Carreño Díaz, A. J. (2020). *La naturaleza de la ciencia que se enseña desde la práctica reflexiva de los profesores de ciencias*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Cavasotto, M. (2010). Dificuldades na aprendizagem de Cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.
- Cea, M. (2001). Metodología cuantitativa: estrategias y técnicas de investigación social. . Madrid: Editorial Síntesis.
- Chevallard, Y. ((1985-1989)). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, Petit x, n° 5 (51-94), n°19 (43-72)*.
- Chevallard, Y. (1990). Didactique, anthropologie, mathématiques, Postfacio a la segunda edición de La transposition didactique. Du savoir savant au savoir.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber*.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, ICE/Horsori: Barcelona. GASCON J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona*.
- Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *theoria.*, 14(1), 61-71.
- Clark, J. M.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; DeVries, D. J.; St. John, D.; Tolias, G. & Vidakovic, D. . (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule. . *Journal of Mathematical Behavior* , 14 (4), 345–364.
- Claros, F. J.; Sánchez. M. T.; Coriat, M. . (2007). Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento. *Indivisa, boletín de estudios de investigación.*, MADRID, n.9, p.49-68.
- Closset, J. (1983). *D'où proviennent certaines erreurs rencontrées chez les élèves et les étudiants en électrocinétique ?* Bulletin de l'Union des Physiciens, N°657, pp.81–102.
- Contreras, A., V. Font, L. Luque y L. Ordóñez. (2005). “Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25, núm. 2, pp. 151-186.

- Cordero, A. D., & Albanés, V. B. . (2022). Dificultades en la comprensión del concepto límite funcional en estudiantes de Química. . *Alternativas.*, 23(3), 21-30.
- Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. *PME-V, Grenoble, France, Vol. I.*, pp. 322-326.
- Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*,. *Dordrecht: Kluwer Academic Press.*, 153-166. .
- Cornu, B. (1991). Limits, en: Tall, D. O. Ed. *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Boston. p. 159.
- Cornu, B. (1991). Limits. . *En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking.*, (pp. 153-166).
- Cornu, B. (1991). Limits. . En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking.*, (pp. 153-166).
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.153-166). *Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.* .
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *The Journal of Mathematical Behavior.*, 15(2), 167-192.
- Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols, D.; Schwingendorf, K.; Thomas, K. & Vidakovic, D. . (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. . *The Journal for Mathematical Behavior* , 15, 167–192.
- Courant, R. y Robbins, H. . (1941). *What is Mathematics?* Traducción al español por Fondo de Cultura Económica, México, 2002.
- Creswell, J. (2009). *Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- D'Amore, B. (2008). *Didáctica de la Matemática.* . *Cooperativa Editorial. Magisterio. Bogotá. Colombia.*
- De la Torre, A. (2003). Los conflictos epistemológicos relativos al concepto de límite, Resumen de la ponencia en el IX Encuentro ERM, Neiva, .
- de Pinto, E. L. P., & Méndez, F. O. (2018). *El Proyecto de Aprendizaje como Estrategia de Ruptura para Superar Obstáculos Epistemológicos.*
- Denzin, N. K. (1970). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods.* *New Yersey: Transaction Publishers.*

- Dewey, J. (1929). The quest for certainty. . *Editorial. Putma, New York.*
- Dewey, J. (1965). La Relación Teoría Práctica en Educación. *Buenos Aires. Editorial Losada.*
- Díaz B.. F; y-Hernández-R, G. (1999). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. . *McGraw Hill, México, , 232p.*
- Díaz, C. C., Reyes, M. P., & Bustamante, K. G. (2020). Planificación educativa como herramienta fundamental para una educación con calidad. *Utopía y praxis latinoamericana.*, 25(3), 87-95.
- Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M., & Varela-Ruiz, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. . *Investigación en educación médica.*, 2(7), 162-167.
- Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemáticas Educativas II* (pp. 257–272). . *México: Grupo Editorial Iberoamérica.*
- Duroux, A. (1982). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure, memoria de DEA. *Publications de l'IREM, Burdeos.*
- Echevarría, J. (1995). Filosofía de la Ciencia. *Madrid: Editorial Akal.*, pp. 60-62.
- Echevarría, J. (1995). Filosofía de la Ciencia. . *Madrid: Editorial Akal.*, pp. 60-62.
- Eco, U. (1995). Tratado de semiótica general, Barcelona, Lumen.
- Edwards, C. (1979). The Historical Developments of the Calculus. . *Springer-Verlag: New York.*
- Elliot, J. (1990). La investigación-acción en educación. . *Madrid: Morata.*
- Estrada Vizcaíno, M. D. C., Estren Macías, L. M., & Fajardo Molineros, J. D. J. . (2017)). Desarrollo de la competencia indagación mediante el aprendizaje basado en proyectos (ABPproyectos) en la enseñanza del sistema óseo (Master's thesis, Universidad del Norte.
- Estrada, T. S., Castro, A. B. J., & Durán, M. T. S. (2004). Barreras epistemológicas en enfermería. *Revista Mexicana de Enfermería Cardiológica*, 12(1), 29-33.
- Felscher, W. (2000). Bolzano, cauchy, epsilon, delta. . *The American Mathematical Monthly*, 107(9), 844-862.

- Fernández, J. (2015). Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.
- Fernández, J. (2015). Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.
- Ferraris, M. (2002). Historia de la Hermenéutica. México, México: Siglo XXI.
- Figueroa, J. G. (1976). "Estudios de Redes Semánticas Naturais e alguns processos básicos.". *Universidad Nacional Autónoma de México: UNAM.*, 56 p.
- Fisher, G. M. (1978). *Cauchy and the infinitely small. Historia Mathematica*, 5(3), 313-331.
- Font, V. (2007). Epistemología y didáctica de las matemáticas. . *En Ugarte, F. (Ed.), Reportes de investigación, No. 21, Serie C. Lima: PUCP.*
- Freire, P. (1997). Pedagogía de la autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa. siglo XXI.
- G., B. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Libraire J. Vrin.
- G., B. (1972). Processus de mathématisation. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire. 428-442, APMEP: Paris.
- Gadamer, H. (1993). Verdad y método. . *I. Salamanca: Sígueme.* .
- Gagliardi, R. (1996). Obstáculos al aprendizaje--obstáculos a la enseñanza en contextos (Barriers to Learning--Barriers to Teaching in Multicultural Contexts). *Papers on Teacher Training and Multicultural/Intercultural Education* 25.
- Galeano, M. (2004). Diseños de Proyectos en la investigación cualitativa. *Fondo editorial, Universidad EAFIT. Medellín. Colombia.*
- Galeano, M. (2004). Diseños de Proyectos en la investigación cualitativa. Fondo editorial, Universidad EAFIT. Medellín. Colombia.
- Garagalza, L. (2002). Introducción a la hermenéutica contemporánea. . *Cultura, simbolismo y sociedad. Barcelona, España: Anthropos.*
- García Carrasco, J. y García del Dujo, A. . (1996). Teoría de la Educación. Educación y acción pedagógica. . *Salamanca: Universidad de Salamanca.*
- García Hurtado, O. (2023). *Un modelo didáctico para el aprendizaje del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible en carreras de ingeniería*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

- García, G., Serrano, C., y Díaz, H. . (2002). La aproximación: una noción básica en el cálculo: un estudio en la educación básica. . *Universidad Pedagógica Nacional*.
- García, R. (2021). LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: DIDÁCTICA DEL CÁLCULO. . *DIALÓGICA*, 15(1), 21-53.
- García, V. (1995). Diagnóstico, evaluación y toma de decisiones. . *España: Ediciones Rialp S.A.*
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. . *Recherches en didactique des mathématiques*, 18, 7-34.
- Gascon, J. (2001). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Barcelona-España: Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma de Barcelona.
- Giacomone, B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico (Doctoral dissertation, Universidad de Granada)*. Granada, España.
- Gibbons, M. (1998). *Pertinencia de la educación superior en el siglo XXI. Education, Human Development Network, World Bank*.
- Gil Cantero, F. (2011). Educación con teoría. Revisión pedagógica de las relaciones entre la teoría y la práctica educativa. . *Teoría de la Educación. Revista Interuniversitaria*, , 23(1), 19-43.
- Gil Mora, C. (2014). Rúbrica: Instrumento de evaluación en EF (Bachelor's thesis).
- Gil, D. (2015). *Caracterización de las estructuras curriculares de los programas de formación de profesores de matemáticas en Colombia*. Bogotá: Proyecto de Tesis doctoral publicada, Universidad Distrital Francisco José De Caldas. Bogotá, p.152.
- Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. . *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 2 No.3.
- Glaser, B. (1998). Doing grounded theory: Issues and discussions. Mill Valey: Sociology.
- Glaser, B. y Strauss, A. . (1967). The Discovery of Grounded Theory. . *Strategies for Qualitative Research*. Hawthorne, N.Y.: Aldine.

- Godino, J y Batanero, C. (1996). *Relaciones Dialécticas entre Teoría, Desarrollo y Práctica en Educación Matemática: Un Meta-análisis de tres Investigaciones*. Madrid: Investigación realizada dentro del marco del Proyecto PS93-0196 de la DGICYT.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, núms. 2/3, pp. 237-284.
- Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática.*, (20), 13-31.
- Godino, J. D., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*, 12(01), 70-92.
- Gómez i Urgellés, J. (2000). Per un nou ensenyament de les matemàtiques. . *Barcelona: Edicions CEAC*.
- Gómez, B. R. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. . *Educación y educadores.*, (8), 9-20.
- Gómez, M. (2018). Obstáculos epistemológicos de los docentes en el desarrollo de competencias básicas de los estudiantes. 343-350.
- Gómez, P. (2000). Investigación en educación matemática y enseñanza de las matemáticas en países en desarrollo. . *Educación Matemática.*, 12(1), pp. 93-106. Obtenido desde <http://funes.uniandes.edu.co/352/>.
- González Flores, Y. (2023). *Significados atribuidos por estudiantes universitarios de la Universidad Nacional de Costa Rica al concepto de límite de una función en un punto*. Costa Rica.
- González González, A. E. (2023). *Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental*. Universidad Antonio Nariño.
- González, F. (2004). Prospectiva de la Educación Matemática en Venezuela. . *Conferencia Inaugural. I Encuentro Nacional del Seminario de Educación Matemática. Mérida 2 de Julio de 2004. Recuperado el 06 de Agosto 2006 en www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/equisangulo/num1vol1*.
- González, K. G. (2003). Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. . *Revista Educación y Pedagogía*, , (35), 27-36.

- Gordón, F. D. (2016). Implicaciones del conocimiento de la teoría de los estilos de aprendizaje en el ejercicio profesional del docente universitario. . *Revista de Estilos de Aprendizaje*, 9(18).
- Grabiner, J. (1983). ¿Quién te dio el épsilon? Cauchy y los orígenes del cálculo riguroso. . *The American Mathematical Monthly* ,, 90 (3), 185-194.
- Granera Rugama, J. A. (2019). *Proceso de enseñanza – aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería*. Nicaragua: Doctoral thesis, Farem-Estelí.
- Grattan-Guinness, I. (1991). ¿ Qué es y qué debería ser el Cálculo? *Mathesis*, 7(3), 363-387.
- Guarin Amorocho, S. A., & Parada Rico, S. E. (2023). (2023). Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial. *Educación matemática*. , 35(1), 197-228.
- Guevara, G., Verdesoto, A., y Castro, N. . (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). . *Recimundo*, 4 (3), 163-173. 10.26820/recimundo/4.(3).julio.2020., 163-173 .
- Guinness, G. (1970). The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann. The MIT press.
- Harel, G. y Trgalová, J. . (1996). Higher mathematics education. En Bishop, A.J. et al. (Eds.). . *International handbook of mathematics education*., Part Two, pp. 675-700. Netherlands: Kluwer Academic Press.
- Hernández Sampieri, R. (1998). *Metodología de la Investigación*. 233-339.
- Hernández, J. (2008). “Episteme de la inteligencia.”. *Revista de inteligencia*. <http://perspectivas.com.mx/teoria-heliocentrica.html>.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. . (2006). *Metodología de la investigación*. . México: Mc Graw Hill.
- Hernández-Suárez, C. A., Prada-Núñez, R., & Gamboa-Suárez, A. A. . (2017). Conocimiento y uso del lenguaje matemático en la formación inicial de docentes en matemáticas. *Revista de investigación, desarrollo e innovación*, 7(2), 287-299.
- Hernandez-Suarez, C. A., Prada-Núñez, R., & Ramírez-Leal, P. . (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. . *Revista Perspectivas*., 2(2), 73-83.

- Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. Research Agenda For Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. . *Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M.*
- Hitt, F. &. (2004). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. *Recuperado de: http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2005/133187_1.pdf*.
- Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Educación Matemática Vol. I. Grupo Editorial Iberoamérica, México*, (pp. 245-264).
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. . *Journal of Mathematical Behavior*. , 17 (1), 123-134.
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).
- Hitt, F. y Páez, R. (2001). The notion of limit and learning problems. *Proceedings PME-NA XXIII, Utah, USA, 2001.*, Vol. 1, pp. 169-176.
- Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. . *Revista Uno*, No. 32., pp. 97-108.
- Hitt, F. y Páez, R. (2004). On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study. *Proceedings PME-NA XXVI, Toronto, Canadá, 2004.*, Vol. 1, pp. 103-110.
- Hitt, F., & Páez, R. . (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. *Uno*. . *Revista de Didáctica de las Matemáticas.*, 32, 97-108.
- Ímaz, C., & Moreno, L. . (2009). Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza. . *El Cálculo y su Enseñanza.*, 1, 99-112.
- Jacinto, J. (2021). Estrategias didácticas para desarrollar la psicomotricidad, en niños de 4 años Institución Educativa Julcán.

- Jones, C. V. (1987). Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas. . *Mathesis.*, 3(1), 3-14.
- Jorquera, M. (2010). Modelos didácticos en la enseñanza musical: el caso de la escuela española. . *Revista musical chilena.*, 64(214), 52-74.
- Jungk, W. (1985). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática II (Segunda parte). *La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.*
- Kilpatrick, J. (1995). Investigación en Educación Matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, Gómez y Rico (1995). . *Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana S.A. de C.V.*
- Lafuente, J. (2005). La matemática: Definiciones y modelos. . *Universidad Pública de Navarra.* .
- Lakatos, I. (1978). The Methodology of Scientific Research Programmes, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge.
- Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., & Abellanas, L. . (2006). *Cálculo.* . McGraw-Hill.
- Latorre, A., del Rincón Igea, D., & Arnal, J. . (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa.
- Laugwitz, D. (1987). Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks. *Historia mathematica.* 14(3), 258-274.
- Legrand, M. (1992). Débat Scientifique en Cours de Mathématiques. . *En Artigue, M. y Eryvnyck, G. (Eds.). Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus. ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá.*, pp. 59-60.
- Leontiev, A. (1991). Artículo de introducción sobre la labor creadora de LS Vygotsky. Vygotsky LS. G. *Obras escogidas. Madrid: Visor; 1991. t.1[STANDARDIZEDENDPARA.*
- López, N., & Sandoval, I. (2016). Métodos y técnicas de investigación cuantitativa y cualitativa.
- Marciales Vivas, G. P. (2004). Pensamiento crítico: diferencias en estudiantes universitarios en el tipo de creencias, estrategias e inferencias en la lectura crítica de textos. . *Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.*
- Marí Mollá, R. (2001). Diagnóstico Pedagógico. Un modelo para la intervención.

- Martínez, M. (1997). El paradigma emergente. . México: Trillas.
- Martínez, M. (1999). La Nueva Ciencia. Su desafío, lógica y método. México. . Editorial Trilla.
- Martínez, M. (2008). La investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. 3ª ed. Editorial Trillas, México.
- Mayer, R. (1984). Aids to text comprehension. . *Educational Psychologist*. .
- Medina, A y Mata, F. . (2008). Didáctica General. Prentice hall. Madrid. España.
- Medina, A y Mata, F. . (2008). Didáctica General. Prentice hall. Madrid. España.
- Medina, A. (. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Universidad Pedagógica Nacional.
- Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Universidad Pedagógica Nacional.
- Medrano, I., & Pino-Fan, L. R. . (2015). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. . *REDIMAT*, 5(3), 287-323.
- Mendoza, L. G. (2017). Enseñanza y aprendizaje de la derivada y el limite apoyada con recursos digitales. . In *Caleidoscopio educativo: prácticas y reflexiones Iberoamericanas.*, (pp. 145-152). Global Knowledge Academics.
- Mendoza, L. G., Alemán, M. R. B., & Nieves, L. M. A. . (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica" General José María Córdova"*, 15(20), 137-153.
- Mercado-Ramírez, L. (2016). La Universidad moderna como Institución de la sociedad civil.
- Miles, M., y Huberman, A. (1994). Qualitative data analysis: An expanded sourcebook.
- Mira, M. (2016). Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje. . *Tesis doctoral*. Universidad de Alicante.
- Molina, E. (1993). La preparación del profesor para el cambio en la institución educativa. Granada: Universidad. Policopiado. Curso de Doctorado ULA-Táchira, 2002., p.18.

- Molon, J. (2013). Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software geogebra. . 198 f. *Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.*
- Morales, A. (2008). El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: El caso de la función convexa. . *Tesis inédita de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero, México.* .
- Morales, A., Sigarreta, J., & Locia, E. (2012). Estrategia metodológica para el tratamiento del concepto de límite al infinito.
- Moreno Moreno, M. D. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros.
- Moreu, A. y Prats, E. (Coords.) . (2010). La educación revisionada. Ensayos de hermenéutica pedagógica. . *Barcelona: Universidad de Barcelona.*
- Muñoz, G. (1997). Cómo Elaborar y Asesorar una Investigación de Tesis. *Prentice Hall.*
- Nacional., M. d. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. MEN. Bogotá. 46-95.
- Nakane, M. (2014). ¿Tenía el cálculo diferencial de Weierstrass un carácter de evitación de límites? Su definición de límite en estilo $\epsilon - \delta$. *Boletín BSHM: Revista de la Sociedad Británica de Historia de las Matemáticas* , 29 (1), 51-59.
- Naveira Carreño, W. J., & González Hernández, W. . (2021). Análisis conceptual del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior. . *Conrado.*, 17(78), 266-275.
- Neira Sanabria, G. I. (2018). *Dificultades, conflictos y obstáculos en las ráticas educativas universitarias de iniciación al cálculo diferencial—PEUC—en estudiantes de ingeniería.* Bogotá, Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Tesis doctoral. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/11349/14265>.
- Nemirovsky, M. (1999). Sobre la enseñanza del lenguaje escrito. Buenos Aires: Paidós.
- Newton, I. (2011). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural (E. Rada, Trad.).* Madrid.: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1726).
- Niño, V. M. (2011). Metodología de la investigación. Ediciones de la U.

- Noriega, J. Á. V., Pimentel, C. E., & de Albuquerque, F. J. B. . (2005). Redes semánticas: aspectos teóricos, técnicos, metodológicos y analíticos. *Ra Ximhai: revista científica de sociedad, cultura y desarrollo sostenible.*, 1(3), 439-451.
- O'Shea, D. y Senechal, L. . (1992). Student learning difficulties and calculus in context. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá. pp. 53-55. .
- Pacheco Vergara, E. M. (2020). *Didáctica interdisciplinar para el aprendizaje de las ciencias básicas en estudiantes universitarios: área de la salud (Doctoral dissertation, Ediciones Universidad Simón Bolívar)*. Barranquilla: Universidad Simón Bolívar.
- Padrón, G. (20024). Aspectos claves en la evaluación de teorías. *Copérnico*, Año 1, No. 1, julio-diciembre, 71-82.
- Padrón, G. (2004). Aspectos claves en la evaluación de teorías. *Copérnico*, Año 1, No. 1, julio-diciembre., 71-82.
- Padrón, G. (2004). Aspectos claves en la evaluación de teorías. *Copérnico*, Año 1, No. 1, julio-diciembre., . 71-82.
- Palarea, M y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma* 16, PP.91-98.
- Peña, R. (2017). *Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos. Tesis doctoral no publicada, Universidad Antonio Nariño.*
- Piaget, J. (1975). Traducido al castellano por Francisco J. Fernández Buey. *Psicología y Pedagogía. Ed. Ariel 7a. Ed. 1980. Barcelona-Caracas-México.*
- Planas, N. (2001). Obstáculos en el aprendizaje matemático: la diversidad de interpretaciones de la norma. . *Educación Matemática.*, 13(3), 121-128.
- Planas, N. (2001). Obstáculos en el aprendizaje matemático: la diversidad de interpretaciones de la norma. . *Educación Matemática.*, 13(3), 121-128.
- Plaza, L., González, J., & Vasyunkina, O. . (2020). Obstáculos en la enseñanza–aprendizaje de la matemática. . *Revisión sistemática.*
- Polya, G. (2001). Cómo plantear y resolver problemas. . *Trillas-Serie de Matemáticas.* .
- Polya, G. (2001). Cómo plantear y resolver problemas. . *Trillas-Serie de Matemáticas.* .

- Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. . [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante]. <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/45713#vpreview>.
- Ponte, J. P. D., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., ... & Viseu, F. . (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39-74.
- Popper, K. y Eccles, J. . (1985). El yo y su cerebro. . *Labor, Barcelona. España*.
- Pourciau, B. (2001). Newton and the notion of limit. . *Historia Mathematica*, 28(1), 18-30.
- Puig, L. (1997). Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática. Bogotá: *Una empresa docente. Obtenido desde* <http://funes.uniandes.edu.co/672/2/Puig1997Investigar.pdf>, p.52.
- Quintana Paz, M. (2005). No-interpretación. En Ortiz-Osés, A. y Lanceros, P. (eds.). Claves de hermenéutica. Para la filosofía, la cultura y la sociedad. . *Bilbao: Universidad de Deusto.*, (pp. 427-438).
- Quivy, R. y Campenhoudt, L. V. . (1998). Manual de Investigación en Ciencias Sociales. México: LIMUSA.
- Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics. Vol 1 (1) .
- Rendón Mayorga, C. G. (2017). Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de matemáticas.
- Restivo, S. (1992). Mathematics in Society and History. . *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*.
- Rezende, W. M. (2003). O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. . 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. . *Avances de Investigación en Educación Matemática*. , 1(1), pp. 39-63. Obtenido desde <http://funes.uniandes.edu.co/1986/> DOI: <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4>.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. . *Avances de investigación en educación matemática*, , (1), 39-63.

- Rico, L.; Sierra, M. y Castro, E. (1999). Didáctica de la Matemática. En Rico, L. y Madrid, D. (edts.) Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares. . *Madrid: Editorial Síntesis*.
- Rico, Sierra y Castro. (2000). "Didáctica de la matemática" en L.Rico y D.Mardir, Fundamentos didácticos de las áreas curriculares. . *Síntesis, Madrid*.
- Robayna, M. M. S., & Medina, M. M. P. . (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. . *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.*, (16), 91-98.
- Robayna, M. M. S., & Medina, M. M. P. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. . *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.*, (16), 91-98.
- Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., & Font Moll, V. . (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. . *Educación matemática.*, 24(1), 35-71.
- Rodríguez, M. (2007). Estrategias exitosas para la investigación. . *Libre Editores. Maracay-Aragua. Venezuela*.
- Rojas, M. (2021). Proyecto de innovación curricular para la enseñanza de estrategias de comprensión lectora a estudiantes de cuarto básico. (*Doctoral dissertation, Universidad del Desarrollo. Facultad de Educación*).
- Rojas, W. J. (2014). Conocimiento y matrices epistémicas. . *Horizonte de la Ciencia.*, 4(6), 87-90.
- Rolong, D. (2022). Comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.
- Rolong, D. (2022). Comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.
- Ruiz Olabuénaga, J. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. . *Bilbao:Universidad de Deusto*.
- Salinas, P y Alanís, J . (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 12, núm. 3, pp. 355-382.

- Sánchez, F. (2012). Métodos de investigación cualitativa. ©Francisco Javier Sánchez Sánchez-Cañete. SafeCreative Registro de propiedad intelectual. Código: 1209012214910. 01 de sept.
- Sánchez, L. (2020). Impacto del aula virtual en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de bachillerato general. *Revista Docentes 2.0.*, 9(1), 75-82.
- Sandelowski, M. (2000). Whatever happened to qualitative description?. . *Research in nursing & health.*, 23(4), 334-340.
- Santos, G. M. (2014). O comprometimento do estudante e a aprendizagem em Cálculo I. 217 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro Universitário La Salle. Canoas.
- Santos, L. (1994). La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de investigación. . *Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.*
- Sastre, V., Rey, G., & Boubée, C. . (2008). El concepto de función a través de la historia. . *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática.*, 16, 141-155.
- Schatzman, L. (1991). *Dimensional analysis: Notes on an alternative approach to the grounding of theory in qualitative research.* . Social organization and social process: Essays in honor of Anselm Strauss, 303, e314.
- Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. . *Petit x*, 12, 5-32.
- Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. . *Petit x*, 12, 5-32.
- Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. . *Petit x*, 12, 5-32.
- Shuell, T. (1988). "The Role of the Student in Learning from Instruction". . *Contemporary Educational Psychology*, 13, 276-295. En Díaz Barriga y Hernández Rojas. .
- Sierpiska, A. (1985). Epistemological obstacles relative to the limit concept. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématique.*, Vol. 6 No. 1, pp. 5-67.
- Sierpiska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite, en: *Recherches en Didactique des Mathematiques*, . 6(1), 1985, 5-67.

- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics.*, Vol. 18, pp. 371-397.
- Sierpinska, A. (1988). Sur la relativité des erreurs. The role errors play in the learning and teaching of mathematics. *En Compte rendu de la 39e rencontre internationale de la CIEAEM. Sherbrooke, Canada.*, pp. 70-87.
- Sierpinska, A. (1990). Algunas observaciones sobre la comprensión de las matemáticas. Para el aprendizaje de las matemáticas. 10 (3), 24-41.
- Sierra Vázquez, M.; González Astudillo, M. T. y López Esteban, C. . (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y COU: 1940–1995. . *Enseñanza de las Ciencias* , 17 (3), 463–476.
- Skovmose, O. (1994). Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Strauss, A., y Corbin, J. . (2016 [2002]). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Tall y Vinner . (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Mathematical Education for Teaching*, 24, 2–18. Centre University of Warwick.
- Tall y Vinner. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Mathematical Education for Teaching*, 24, 2–18. Centre University of Warwick.
- Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking. . *Dordrecht: Kluwer Academic Press*.
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.*, (pp. 495-511). Nueva York: Macmillan. .
- Tall, D., & Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. . *Mathematics Teaching.*, No. 82, pp. 44-49.
- Taylor, C. (1986). Philosophy and the Human Sciences. Philosophical Papers 2. Cambridge: . *Cambridge University Press*.
- Taylor, S. J., & Bogdan, R. . (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación (Vol. 1)*. . Barcelona: Paidós.

- Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30/2., 161-177.
- Trigueros, M., & Sánchez-Matamoros-García, G. . (2022). El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Universidad. . *Avances de Investigación en Educación Matemática*. , 21, 1-5.
- Trinidad, A., Carrero, V., y Soriano, R. . (2006). *Teoría fundamentada «Grounded Theory»: La construcción de la teoría a través del análisis interpretacional*. . Madrid: CIS.
- Universidad Pedagógica Experimental Libertador, V. d. (2011). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Caracas: (4ª. ed.). FEDUPEL.
- Urrea, Y. P. (2021). *Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores chilenos de enseñanza media sobre la noción de función: una experiencia en contextos de microenseñanza*. Osorno, Chile.: Universidad de los Lagos.
- Valbuena, R. (2018). *La estructura de las teorías científicas: su sistematización y fundamentos lógicos*. ROIMAN VALBUENA.
- Valladares, L. (2010). Las competencias en la educación científica Tensiones desde el pragmatismo epistemológico. *Perfiles Educativos* , 158 | vol. XXXIII, núm. 132, 2011 | IISUE-UNAM.
- Valle, A., Manrique, L., & Revilla, D. . (2022). La investigación descriptiva con enfoque cualitativo en educación.
- Valles, M. (1999). Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional. . Madrid: Síntesis Editorial.
- Vargas, J. E. (2023). Recorrido didáctico: Una aproximación teórico práctica en procesos educativos. . *Revista Dialogus.*, (11), 134-154.
- Vargas, X. (2007). ¿Cómo hacer investigación cualitativa? . Editado por ETXETA, SC. Paulina Navarro, 526, Colonia Los Maestros, Zapopan, Jalisco, México., CP.45150.
- Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. . In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9)*.
- Velandia, V. &. (2018). Propuesta didáctica de educación ambiental para desarrollo de la conciencia y el conocimiento ambiental (Doctoral dissertation, Tesis Maestría).

- Verdú, C. F., García, G. S. M., Moreno, M. M., & de la Vega, M. L. C. . (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas.*, 36(1), 143-162.
- Vitelli, R. P. (2012). Evasão Em Cursos De Graduação: Fatores Intervenientes No Fenômeno. In: *Jesús Arriaga García de Andoaín y otros. (Org.). II CLABES. Segunda conferencia latinoamericana sobre el abandono en la educación superior. 1ed. Madrid: Dpto. Telecomunicación.*
- Vitelli, R. P. (2012). Evasão Em Cursos De Graduação: Fatores Intervenientes No Fenômeno. In: *Jesús Arriaga García de Andoaín y otros. (Org.). II CLABES. Segunda conferencia latinoamericana sobre el abandono en la educación superior. 1ed. Madrid: Dpto. de Publicaciones de la E.U.I.T. de Telecomunicación.*
- Viviano, A. (1988). Hacia una participación auténtica en los procesos de enseñanza-aprendizaje: La participación constructiva. *Trabajo de ascenso. UPEL- Maracay.*
- Viviano, A. (1988). Hacia una participación auténtica en los procesos de enseñanza-aprendizaje: La participación constructiva. Trabajo de ascenso. UPEL- Maracay.
- Voigt, J. (1998). The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena, en F. Seeger y otros (eds), The culture of the mathematics classroom. . *Cambridge: Cambridge University Press.*, pp. 191-220.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. . (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de educación Matemática (SOAREM)*, 8(29), 9-19.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. . (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de educación Matemática (SOAREM)*, 8(29), 9-19.
- West, Ch. K., Farmer, J. A. y Wolff, P. M. (1991). Instructional Design. Implications from Cognitive Science. *Needham Heights, MA: Allyn and Bacon. En Díaz Barriga y Hernández Rojas.*
- Yusof, M. y Tall, D. . (1999). Changing attitudes to university mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, , Vol. 37, pp. 67-82.

ANEXOS

ANEXO A

Guion de la entrevista a profesores y estudiantes



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAL ALBERTO ESCOBAR LARA/
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
MARACAY – VENEZUELA
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA



GUION DE ENTREVISTA A LOS INFORMANTES CLAVES
Lista de tópicos de la entrevista en profundidad

- 1.- ¿Cómo se desarrolla los procesos enseñanza y aprendizaje de la definición de límite de una función real de variable real y sus propiedades?
- 2.- ¿Qué dificultades, errores u obstáculos a nivel epistemológico, ha percibido que están presentes durante el desarrollo de esos procesos?
- 3.- ¿Cómo es conceptualizado el límite de una función real de variable real durante la práctica pedagógica?
- 4.- ¿Considera usted que el concepto de límite de una función real de variable real, presenta gran dificultad en su aprendizaje?
- 5.- ¿Qué posturas didácticas se adoptan de una en cuanto a las estrategias de enseñanza y aprendizaje durante el desarrollo del concepto de límite y sus propiedades?
- 6.- ¿Cuáles serían para usted las ventajas y desventajas del conocimiento unitario pragmático en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una función?
- 7.- ¿Estaría usted dispuesto a buscar la manera de identificar el obstáculo conocimiento unitario y pragmático durante la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite y sus propiedades a fin de que sea superado?
- 8.- ¿Cuál es su opinión respecto a la posibilidad de estructurar una didáctica orientada a la identificación del obstáculo epistemológico conocimiento unitario y pragmático, durante sus prácticas pedagógicas correspondientes al límite de una función, con el fin de superarlo?

NOTA DEL INVESTIGADOR: la lectura y forma de presentar las preguntas a los estudiantes, fueron tácitamente las mismas que las efectuadas a los docentes, pero dirigidas a su comprensión con un vocabulario apropiado para ello.