REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE MARACAY

LA DEMOSTRACIÓN EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA. UN ESTUDIO CON FUTUROS DOCENTES DE MATEMÁTICA

Tesis presentada como requisito parcial para optar al Grado de Doctor en Educación

Autora: Martha Iglesias Inojosa
Tutor: Dr. José Ortiz Buitrago

Maracay, Julio de 2014

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

ACTA DE APROBACIÓN

Nosotros, miembros del Jurado designado para la evaluación de la Tesis Doctoral Titulada: "La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática"; presentada por la Profesora: Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa, titular de la Cédula de Identidad N° V- 8.733.097; para optar al título de Doctora en Educación, estimamos que reúne los requisitos para ser considerado como:

Aprobado

Por sus Aportes Teóricos y Metodológicos para el Estudio de la Demostración en Educación Matemática.

En Maracay, a los veinticinco días del mes de julio de dos mil catorce

Dr. Luis Capace
C.I. N° 4.368.158

Dr. Rolando García
C.I. N° 12.855.448

Dr. Mario Arrieche
C.I. N° 7.276.704

Dr. Fredy González
C.I. N° 643.333

Dr. José Ortiz (Tutor)
C.I. N° 4.203.049

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR

DEDICATORIA

A mis abuelos *Cristóbal* y *Mercedes María,* quienes me han seguido acompañando y bendiciendo desde su partida a la casa del Padre; siempre los recordaré.

A los *Geómetras* que nos han precedido en todo tiempo y espacio; gracias a ellos disfrutamos de ti: mi bella *Geometría*.

RECONOCIMIENTOS

A *Jesús, Dios y Señor mío,* por permitirme nacer, crecer, desarrollar y encontrar oportunamente mi vocación docente e investigativa; *Dios y Señor mío*, por esta inmerecida gracia siempre te estaré agradecida.

A *la vida*, a *la maestra vida* por ser una escuela permanente para todos.

A mi *familia* por el apoyo que siempre me han brindado para llevar a cabo mis tareas académicas y profesionales; por el afecto y aliento que me han ofrecido para seguir adelante y no darme por vencida en la procura de esta meta.

A *mi mamá,* por enseñarme, desde temprana edad, a cumplir responsablemente con mis tareas escolares y, más tarde, con mis labores profesionales, procurando que siempre lo hiciera lo mejor posible. Te agradezco que me hayas ofrecidos muchos libros, pero que nunca lo hayas leído por mí.

A *mis maestros y profesores* quienes despertaron en mí la motivación y el placer por el estudio y el respeto por la profesión docente.

A mis profesores y amigos *Antonio Viviano, Fredy González, Julián Rojas, Miriam Mireles y Walter Beyer* por iniciarme y ayudarme a seguir adelante en el campo de la Educación Matemática y ser ejemplos de excelencia y probidad.

A mis colegas y amigas *Belén Arrieche, Fabiola Czwienczek, Gabriela Gardié, Julia Sanoja y Zoraida Paredes* por alentarme a continuar con mis estudios doctorales, especialmente en aquellos momentos en los cuales se piensa en abandonar la carrera y quedarse en la orilla del camino.

A todos *mis estudiantes*, ya que, ellos son la razón de mi quehacer docente e investigativo.

A *José Ortiz*, profesor, colega y amigo, por abrirme las puertas de su casa, brindarme un buen café tinto y el afecto de su familia, pero especialmente por creer en mí y ofrecerme, sin condiciones, sus orientaciones en el desarrollo de la tesis. Este logro es nuestro.

A la *Universidad Pedagógica Experimental Libertador*, a mi *Instituto Pedagógico de Maracay*, por ser el lugar dónde me he venido formando y con el que me siento profesional y afectivamente comprometida.

ÍNDICE GENERAL

	pp.
LISTA DE CUADROS	viii
LISTA DE GRÁFICOS	xiii
RESUMEN	xvii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO	
I EL PROBLEMA	3
Planteamiento del Problema	3
Objetivos Generales	11
Objetivos Específicos	12
Justificación e Importancia de la Investigación	12
II REFERENTES TEÓRICOS	16
Formación Inicial de los Profesores de Matemática desde una perspectiva investigativa	16
Modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática	20
Competencias Profesionales	32
Modelos formativos	57
La Investigación en y sobre Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría	61
El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele	63
Papel de los Software de Geometría Dinámica (SGD) en el Proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría	69
La demostración en Geometría	73
El análisis didáctico como herramienta para diseñar unidades didácticas con contenidos geométricos	83
A modo de síntesis integradora	85
III ABORDAJE METODOLÓGICO	88
Área de Investigación	88
Diseño de la Investigación	88
Procedimientos e instrumentos	89

Síntesis y reflexión sobre el abordaje metodológico 97
IV ESCENARIO Y EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE 100
Caracterización del escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora 100
Las construcciones con Regla y Compás en un Ambiente de Geometría Dinámica 116
Equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura geométrica 125
Construir, explorar, conjeturar y validar 131
Balance general del curso de RPG_AC como escenario de aprendizaje 142
V COMPETENCIAS MATEMÁTICAS 145
Construcciones geométricas en un AGD 154
Construcciones geométricas con doblado de papel y en un AGD 201
Construcción y exploración de cuadriláteros 252
Balance general sobre las competencias matemáticas 296
VI COMPETENCIAS DIDÁCTICAS 300
Balance general sobre las competencias didácticas 335
VII CONCLUSIONES 338
REFERENCIAS 347
ANEXOS
A Ponencia sobre la demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica 361
B-1 Programa del curso de Geometría I 381
B-2 Programa del curso de Geometría II 386
C-1 Mapa conceptual con los contenidos del curso de Geometría I 390
C-2 Mapa conceptual con los contenidos del curso de Geometría II 391
D Inventario de las actividades dirigidas correspondientes al taller nº 1 392
E Inventario de las actividades libres correspondientes al taller nº 1 393

F-1 Construcción nº 2 de un cuadrado, dado uno de sus lados 394

F-2 Construcción nº 3 de un cuadrado, dado uno de sus lados 396

F-3 Construcción nº 4 de un cuadrado, dado uno de sus lados 398

G Construcción de un cuadrado realizada por el Grupo nº 3 400

H-1 Descripción del juego Encuentra mi Pareja diseñado por el grupo nº 1 como parte de los materiales y recursos didácticos 403

H-2 Descripción del juego Aceptando el Reto diseñado por el grupo nº 1 como parte de los materiales y recursos didácticos 404

I-1 Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2. Descripción de la actividad nº 1: A través del tiempo. 405

I-2 Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2. Descripción de la actividad nº 2: Recordemos 406

I-3 Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2. Descripción de la actividad nº 3: Demostrando 407

I-4 Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2. Descripción de la actividad nº 4: Pitágoras y nuestro mundo 408

J Habilidades asociados a los niveles de razonamiento geométrico para el estudio de la circunferencia y el círculo; cuadro elaborado por el grupo nº 3 409

CURRÍCULUM VITAE 410

LISTA DE CUADROS

		pp.
1	Relación de las ponencias sobre formación docente y desarrollo profesional del profesor de Matemática publicadas en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa	18
2	Dimensiones del conocimiento del contenido según Grossman, Wilson y Shulman (2005)	25
3	Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza según el modelo propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008)	27
4	Correspondencia entre las facetas del EOS y los tipos de conocimientos didáctico - matemáticos	30
5	¿Qué han de saber y saber hacer los profesores de Matemática?	31
6	Competencias genéricas acordadas para América Latina (Beneitone et al., 2007, pp. 44 y 45)	34
7	Competencias específicas acordadas para América Latina (Beneitone et al., 2007, p. 137)	35
8	Competencias clave establecidas en el proyecto DeSeCo (OCDE, 2005)	37
9	Grupos de competencias matemáticas según PISA 2003 (OCDE, 2004)	41
10	Procesos involucrados en el proceso de modelización matemática (OCDE, 2013)	44
11	Relaciones entre procesos y competencias matemáticas (OCDE, 2013, p. 32)	45
12	Descripciones por niveles de la competencia matemática (OCDE, 2013, p. 41)	48
13	Capacidades o habilidades matemáticas asociadas a la competencia de razonamiento y argumentación (OCDE, 2004)	50
14	Descripción didáctica de las competencias matemáticas de un profesor de Matemática / Grupo 1 (Niss y Højgaard, 2011)	53
15	Descripción didáctica de las competencias matemáticas de un profesor de Matemática / Grupo 2 (Niss y Højgaard, 2011)	55
16	Asuntos tratados por los grupos de trabajo participantes en el estudio ICMI 19	82
17	Estudiantes participantes en el curso de RPG_AC para el período académico 2011 – 1 y su organización en pequeños grupos.	92
18	Habilidades geométricas asociadas a las competencias matemáticas y los niveles de razonamiento geométrico	107
19	Errores más comunes en Geometría que pudieran cometer los estudiantes	110
20	Actividades didácticas propuestas en los talleres que conformaron el curso de RPG_AC	115
21	Actividades dirigidas propuestas en el Taller nº 1 del curso de	118

	RPG_AC	
22	Actividades libres propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG_AC	120
23	Construcción de un cuadrado dado uno de sus lados	121
24	Aplicación del método de la figura auxiliar	123
25	Aplicación del método de la figura semejante	124
26	Axiomas en los cuales se soporta el doblado de papel o papiroflexia	126
27	Relación de los axiomas propuestos por Beitia con propiedades de la Geometría Euclidiana	127
28	Relación de los axiomas propuestos por Huzita con propiedades de la Geometría Euclidiana	128
29	Relación de los axiomas propuestos por Alperin con propiedades de la Geometría Euclidiana	130
30	Principios para las matemáticas escolares (NCTM, 2003)	132
31	Estándares de contenidos (NCTM, 2003)	133
32	Estándares de procesos (NCTM, 2003)	135
33	Actividades propuestas en el taller nº 3 del curso de RPG_AC	140
34	Herramientas de construcción disponibles en el Cabri II Plus	147
35	Herramientas de verificación de relaciones y medida disponibles en el Cabri II Plus	149
36	Herramientas para mejorar la apariencia de la figura construida con el Cabri II Plus	150
37	Uso heurístico de un software de Geometría Dinámica	151
38	Tipos de justificación como producto de un proceso de validación matemática	152
39	Esquemas de argumentación propuestos por Flores (2007)	153
40	Esquema seguido para organizar la información recabada en el taller nº 1	154
41	Actividades seleccionadas para el análisis de la información correspondiente al taller nº 1	155
42	Correspondencia entre el procedimiento dado y las herramientas empleadas	156
43	Justificación dada por el grupo nº 1 en la actividad dirigida nº 2	157
44	Justificación dada por el grupo nº 2 en la actividad dirigida nº 2	158
45	Justificación dada por el grupo nº 3 en la actividad dirigida nº 2	160
46	Justificación dada por el grupo nº 4 en la actividad dirigida nº 2	161
47	Correspondencia entre el procedimiento dado y las herramientas empleadas	164
48	Herramientas empleadas por el grupo nº 2 para dividir un segmento en tres partes iguales	166
49	Justificación dada por el grupo nº 2 en la actividad dirigida nº 6	167
50	Justificación dada por el grupo nº 4 en la actividad dirigida nº 6	169
51	Actividad libre nº 2: Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo	171

	comprendido entre ellos	
52	Descripción del procedimiento empleado en la actividad libre nº 2	171
53	Descripción de la construcción realizada con el Cabri II	173
54	Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 1	176
55	Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 2	178
56	Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 4	179
57	Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 5	180
58	Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 3	182
59	Actividades extras realizadas por los grupos de trabajo en el taller nº 1	183
60	Actividad extra realizada por el grupo nº 1: Construcción de un trapecio isósceles	184
61	Actividad extra realizada por el grupo nº 2: Construcción de un trapecio isósceles	185
62	Actividad extra realizada por el grupo nº 3: Construcción de un rectángulo áureo partiendo de un lado de un cuadrado	188
63	Actividad extra realizada por el grupo nº 4: Construcción de la circunferencia circunscrita a un triángulo dado	191
64	Actividad extra realizada por el grupo nº 5: Construcción de un cuadrado dada una de sus diagonales	195
65	Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller nº 1	198
66	Clasificación de las justificaciones dadas por los profesores en formación	200
67	Construcciones seleccionadas por los grupos de trabajo en el Taller nº 2	201
68	Construcción de un cuadrado, a partir de otro cuadrado, con doblado de papel	201
69	Construcción de un cuadrado, a partir de otro cuadrado, en un AGD	205
70	Procedimiento empleado para construir un triángulo equilátero con doblado de papel, partiendo de una hoja DIN A4	209
71	Construcción de un triángulo equilátero, a partir de un rectángulo, en un AGD	213
72	Construcción de un pentágono regular, usando una hoja DIN A4	216
73	División de un segmento en dos segmentos cuyas longitudes están en razón áurea	219
74	Construcción de un pentágono regular en un AGD	221
75	Construcción de un hexágono por parte del grupo nº 4	235

76	Construcción de un triángulo isorrectángulo en un AGD	247
77	Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller nº 2	249
78	Clasificación de las justificaciones dadas por los profesores en formación en las actividades libres del Taller nº 2	252
79	Construcción de un cuadrilátero concíclico	253
80	Construcción realizada por el grupo nº 1 de un cuadrilátero concíclico, a partir de otro cuadrilátero	263
81	Construcción realizada por el grupo nº 2 de un cuadrilátero concíclico, a partir de otro cuadrilátero	266
82	Algunas conjeturas formuladas por los participantes del curso de RPG_AC durante el desarrollo de la actividad nº 3 del taller nº 3	267
83	Construcción realizada por el grupo nº 1 en la actividad nº 4 del taller nº 3	269
84	Procedimiento de construcción de un cuadrilátero inscribible utilizado por el grupo nº 1	278
85	Procedimiento de construcción de un cuadrilátero inscribible utilizado por el grupo nº 2	281
86	Procedimiento de construcción de un cuadrilátero concíclico, a partir de un cuadrilátero inscribible, utilizado por el grupo nº 1	286
87	Procedimiento de construcción de un cuadrilátero concíclico, a partir de un cuadrilátero inscribible, utilizado por el grupo nº 2	290
88	Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller nº 3	292
89	Competencias matemáticas puestas en práctica por los participantes del curso de RPG_AC (Parte I)	293
90	Competencias matemáticas puestas en práctica por los participantes del curso de RPG_AC (Parte II)	295
91	Conocimientos y competencias didáctico - matemáticas	301
92	Materiales que orientaron el diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico	306
93	Unidades didácticas con contenidos geométricos	307
94	Asuntos tratados en la introducción y objetivos de la investigación	308
95	Resumen de los aspectos tratados en el mapa de enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales	311
96	Habilidades geométricas que se pretende sean alcanzadas por los estudiantes de 3er año de educación media cuando estudian el teorema de Thales	311
97	Estrategias didácticas diseñadas por el grupo nº 1	312
98	Aspectos que conforman la unidad didáctica diseñada por el grupo nº 2	315
99	Subunidades didácticas que conforman la unidad didáctica sobre el teorema de Pitágoras	316
100	Objetivo de cada una de las cuatro actividades incorporadas al	318

blog
101 Correspondencia entre interrogantes, objetivos y componentes del análisis didáctico 320
102 Alcance del contenido sobre la circunferencia y el círculo 322
103 Resumen de las habilidades geométricas identificadas por el grupo nº 3 323
104 Descripción de las actividades diseñadas para el estudio de la circunferencia y el círculo 324
105 Valoración del análisis didáctico como herramienta para diseñar unidades didácticas con contenidos geométricos 325
106 Aspectos considerados por cada uno de los grupos en su correspondiente MEA 326
107 Materiales y recursos empleados en las unidades didácticas diseñadas por los grupos nº 1, 2 y 3 329
108 Competencias didáctico – matemáticas exhibidas por los profesores en formación cuando diseñaron una unidad didáctica con contenidos geométricos 330

LISTA DE GRÁFICOS

		pp.
1	Dimensiones y fuentes del conocimiento profesional (Azcárate Goded, 2004, p. 3)	19
2	Visión aditiva de la elaboración del conocimiento profesional docente	21
3	Categorías del conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 2005)	23
4	Modelo de Razonamiento y Acción Pedagógica propuesto por Lee S. Shulman	24
5	Modelo sobre los dominios de conocimientos matemáticos para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008)	27
6	Elementos considerados para evaluar la competencia matemática en PISA 2003 (OCDE, 2004, p. 33)	40
7	Un modelo de competencia matemática en la práctica (OCDE, 2013, p. 26, traducción libre)	43
8	Componentes del currículo de Matemática y su relación con la noción de análisis didáctico	84
9	Imagen en pantalla de un archivo de extensión .fig (parte superior), mostrando la descripción, paso por paso, de la construcción de la mediatriz de un segmento; en la parte inferior, aparece desplegado el menú macroconstrucciones con la macro Mediatriz II generada a partir de la construcción realizada	94
10	Triangulación de datos aplicada en esta investigación	97
11	Abordaje metodológico empleado en esta investigación, siguiendo las fases propuestas por Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), para una investigación interpretativa	99
12	Pasos seguidos en el diseño de las actividades didácticas desarrolladas en el curso de RPG_AC	100
13	Diferentes aspectos que fueron considerados para la realización del diagnóstico de partida	103
14	Mapa de enseñanza y aprendizaje para el curso de RPG_AC	104
15	Aspectos considerados en el análisis de contenido de los temas geométricos abordados en el curso de RPG_AC	105
16	Aspectos considerados en el análisis cognitivo y las relaciones existentes entre ellos	106
17	Aspectos considerados en el análisis de la instrucción y las relaciones existentes entre ellos	114
18	Barra de Herramientas del Cabri II Plus con el menú de construcciones desplegado	146
19	Construcción de la mediatriz de un segmento realizada con Cabri II	163
20	División de un segmento en n partes iguales (en este caso, n = 6)	163
21	División de un segmento en tres partes iguales (grupo nº 2)	165

22	Construcción inconsistente realizada por el grupo nº 5	175
23	¿Cómo determinar la longitud del segmento AH?	191
24	Figura empleada por el grupo nº 1 para probar que el cuadrilátero EFGH es un cuadrado	203
25	Figura auxiliar elaborada por la facilitadora para ilustrar la justificación dada por el grupo nº 1	203
26	Cuadrado elaborado por el grupo nº 1, a partir de otro cuadrado, en un AGD	208
27	Figura ilustrativa de las medianas de un triángulo equilátero	211
28	Construcción de las mediatrices de los lados de un pentágono, para verificar, con doblado de papel, que los lados son congruentes entre sí.	218
29	Construcción de un pentágono áureo, a partir de un rectángulo en el cual la razón de las longitudes de dos lados consecutivos es raíz cuadrada de 2	225
30	Construcción del rectángulo y simetría del Δ AEF con respecto a la recta AF	226
31	Doblez a través de la diagonal AF, donde G es el punto de intersección de los segmentos AE’ y DF, siendo E’ la imagen simétrica del punto E	227
32	Aplicación de la simetría axial a los triángulos E’FG y DGA con respecto a las rectas DF y AG respectivamente	227
33	Obtención de un pentágono regular con doblado de papel y trazado de la mediatriz del segmento GF	228
34	Construcción parcial del pentágono regular	229
35	División del segmento GF en razón áurea	230
36	División del segmento AG en razón áurea	231
37	Obtención de los vértices O y P del pentágono regular GK’OPK	232
38	Construcción del pentágono regular con doblado de papel	233
39	Construcción de un hexágono realizada en un AGD por el grupo nº 4	239
40	Primer doblez, haciendo coincidir el vértice A con el B, para obtener la mediana CE	242
41	Interpretación de la expresión “unimos cada uno de los vértices del triángulo con el punto G (baricentro del Δ ABC) y lo que realmente se hizo	244
42	El segmento KN es un eje de simetría del hexágono regular KLMNXO y lo descompone en dos trapecios	245
43	Construcción de un triángulo isorrectángulo con doblado de papel	246
44	Construcción de un triángulo isorrectángulo en un AGD	246
45	Descomposición de un triángulo equilátero en seis triángulos congruentes	250
46	Congruencia por superposición	250
47	Construcción del cuadrilátero concíclico ACBD realizada por el	255

grupo nº 3
48 En un cuadrilátero concíclico o circunscribible, los ángulos opuestos son suplementarios 256
49 Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 1, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios 258
50 Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 2, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios 259
51 Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 3, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios 261
52 Cuadrilátero concíclico SPQR elaborado por el grupo nº 1, a partir del cuadrilátero ABCD 264
53 Cuadrilátero concíclico SPQR elaborado por el grupo nº 2, a partir del cuadrilátero ABCD 265
54 El producto de las diagonales de un cuadrilátero concíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos 268
55 Construcción de un cuadrilátero concíclico realizada por el grupo nº 1 para demostrar la propiedad enunciada en la actividad nº 4 del taller nº 3 270
56 Construcción de un cuadrilátero concíclico realizada por el grupo nº 2 para demostrar la propiedad enunciada en la actividad nº 4 del taller nº 3 271
57 Construcción de un cuadrilátero concíclico realizada por el grupo nº 3 para demostrar la propiedad enunciada en la actividad nº 4 del taller nº 3 274
58 Construcción de un cuadrilátero concíclico dadas las longitudes de sus lados (actividad nº 5 del taller nº 3) 276
59 Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD 277
60 Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD realizada por el grupo nº 1 279
61 Construcción inconsistente de un cuadrilátero inscribible ABCD realizada por el grupo nº 1 280
62 Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD realizada por el grupo nº 2 282
63 PA y PB son segmentos tangentes a la circunferencia C (O, r) trazados desde el punto P 283
64 Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD y de los triángulos ABC y ADC 284
65 Construcción de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC y ADC 284
66 Construcción de un cuadrilátero concíclico PQRS, a partir del cuadrilátero inscribible ABCD 285
67 Construcción inconsistente de un cuadrilátero inscribible realizada por el grupo nº 1 en la actividad nº 7 del taller nº 3 287
68 Imagen donde se observa como hicieron coincidir el punto P’ 288

	con el punto P	
69	Imagen de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC y ADC	288
70	Construcción de un cuadrilátero concíclico PQRS, a partir de un cuadrilátero ABCD, realizada por el grupo nº 2	289
71	Componentes de las competencias matemáticas	296
72	Mapa de enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales elaborado por el grupo nº 1	310
73	Mapa de enseñanza y aprendizaje del teorema de Pitágoras elaborado por el grupo nº 2	314
74	Mapa de enseñanza y aprendizaje para la Circunferencia y el Círculo elaborado por el grupo nº 3	321
75	Componentes de las competencias profesionales de un profesor de Matemática.	339
76	Integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática (parte 1).	340
77	Integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática (parte 2).	341
78	Integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática (parte 3).	342

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE MARACAY
Doctorado en educación

Línea de Investigación: Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría

LA DEMOSTRACIÓN EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA. UN ESTUDIO CON FUTUROS DOCENTES DE MATEMÁTICA

Autora: Martha Iglesias Inojosa
Tutor: Dr. José Ortiz Buitrago
Fecha: Julio 2014

RESUMEN

El curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora (RPG_AC) ha sido asumido como un escenario propicio para la formación inicial de los profesores de Matemática en el área de Geometría y su Didáctica, así como para la investigación en torno al estudio de las competencias matemáticas y didácticas que los profesores en formación lograron poner en práctica cuando resolvieron problemas geométricos en un ambiente de Geometría Dinámica (AGD) y diseñaron unidades didácticas con contenidos geométricos para la educación media. Por ello se llevó a cabo un estudio bajo la modalidad de Investigación de Campo, la misma fue de tipo de estudio de casos y estuvo focalizada en el análisis de las producciones de un grupo de futuros profesores de Matemática, quienes participaron en el curso de RPG_AC. Para analizar la información recabada, se siguió un enfoque predominantemente cualitativo, tomando como referencia las producciones orales y escritas de los participantes en los informes de trabajo, los archivos .fig y las grabaciones de audio-video de determinados episodios de enseñanza y aprendizaje. Observándose que lograron exhibir competencias matemáticas asociadas a los niveles 3 y 4 de razonamiento geométrico, cuando construyeron y exploraron figuras geométricas en un AGD, así como ofrecer justificaciones (explicaciones y pruebas) basadas en el razonamiento lógico-deductivo y la aplicación de definiciones y propiedades conocidas; asimismo, manifestaron un esquema de argumentación analítico, apoyado en esquemas de argumentación fácticos y empíricos. En cuanto a las competencias didácticas, los profesores en formación lograron desarrollar conocimientos y competencias asociados a los componentes del análisis didáctico como herramienta que facilita el diseño de unidades didácticas con contenidos geométricos.

Descriptores: Formación inicial del profesor de Matemática, Geometría y su Didáctica, Demostración Matemática, Software de Geometría Dinámica, Competencias matemáticas y didácticas.

INTRODUCCIÓN

La participación activa en procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en una institución de formación docente y la reflexión en y sobre la práctica le ha permitido a la autora darse cuenta que hay deficiencias cognitivas y formativas en esta área del conocimiento matemático, las cuales tienen incidencia negativa sobre el desempeño académico de los futuros profesores de Matemática. Ellos necesitan tener una robusta formación académica en Geometría, para que, cuando estén trabajando en educación media, sean capaces de enseñar adecuadamente los contenidos geométricos a sus alumnos.

Por ello, durante casi tres lustros, la autora ha centrado su atención en la investigación sobre Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría: ¿Cómo evoluciona el razonamiento geométrico? ¿Cómo se pudiera propiciar el desarrollo del conocimiento y de las habilidades geométricas? ¿Cuáles serían las estrategias, materiales y recursos didácticos más apropiados para una enseñanza efectiva de la Geometría? En este orden de ideas, se ha diseñado y desarrollado un curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora (RPG_AC), el cual forma parte del componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay). Este curso - entendido como una propuesta formativa en el área de Geometría y su Didáctica – ha sido asumido como un escenario para la investigación en el área de la formación inicial de los profesores de Matemática y es, por esto que, esta tesis ha estado dirigida a estudiar las competencias matemáticas y didácticas que ponen en práctica los participantes en el curso de RPG_AC cuando realizan determinadas tareas didáctico – matemáticas, a partir del análisis de sus producciones (informes de trabajo, archivos .fig y grabaciones de audio-video de ciertos episodios de enseñanza y aprendizaje).

Esto exigió la integración de diversos referentes teóricos como el mapa de enseñanza y aprendizaje (Orellana Chacín, 2002), la noción de organizadores curriculares (Segovia y Rico, 2001), el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1957, 1959, las competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2011) y didácticas (Azcárate, 1998; Godino, 2009; Niss y Højgaard, 2011) y la noción de análisis didáctico (Góméz y Rico, 2002 y Gómez, 2007), para así emplearlos en forma consistente en el análisis de la problemática abordada, en función de los objetivos de investigación establecidos y la información recabada.

Por ello, esta tesis ha sido organizada en función a los siguientes capítulos:

I. *El Problema*, se plantea y delimita el problema investigado, se formulan las interrogantes que guiaron esta investigación, así como sus objetivos.

II. *Referentes Teóricos*, sustentados en la revisión de fuentes documentales de diversa índole (artículos en publicaciones periódicas, capítulos en libros arbitrados, libros, trabajos de grado y tesis doctorales) con el propósito de integrar – en forma coherente – las teorías que sustentan esta tesis.

III. *Abordaje Metodológico*, donde se brinda una visión del proceso investigativo llevado a cabo.

IV. *Escenario y Experiencias de Aprendizaje*, se presenta una caracterización de las actividades de enseñanza y aprendizaje del curso de RPG_AC, desde la perspectiva de la autora en su condición de diseñadora y facilitadora de este curso.

V. Competencias Matemáticas, se analizan las competencias matemáticas exhibidas por los participantes en el curso de RPG_AC, cuando resolvieron problemas en un ambiente de Geometría Dinámica; teniendo en cuenta, además, el uso tanto técnico como heurístico que le dieron al Cabri II y el tipo de justificaciones presentadas.

VI. Competencias didácticas, a partir del diseño de unidades didácticas con contenidos geométricos, se analizan las competencias didácticas exhibidas por los profesores en formación en el rol de planificador.

VII. Consideraciones Finales, formuladas en función a las interrogantes y objetivos que han orientado la labor investigativa.

Además, se incluyen las referencias consultadas y determinados documentos anexos que complementan el desarrollo propiamente dicho de la tesis.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

La formación inicial de los docentes de Matemática se ha convertido en objeto de estudio para la comunidad iberoamericana de educadores matemáticos a partir de la década de los años ochenta (Kilpatrick, 1995; Camacho, Socas y Hernández, 1998; Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001; González López y Lupiañez Gómez, 2001; Contreras y Blanco, 2002; García y Sánchez, 2002; Gómez y Rico, 2002; Ortiz, 2002; Rico Romero, 2004; Gómez–Chacón, 2005; Gómez, 2007; Serres, 2007; Llinares, 2007 y Lupiañez, 2009), como lo deja en evidencia la existencia de diversos grupos o líneas de investigación orientadas a: (a) caracterizar el conocimiento profesional del docente; (b) diseñar, desarrollar y evaluar propuestas didácticas que permitan a los futuros docentes apropiarse de tal conocimiento profesional; y (c) clarificar los fines que se persiguen (el para qué), los contenidos a tratar (el qué) y la metodología a seguir (el cómo) en los institutos de formación docente; así como su inclusión como área temática en diversos eventos relacionados con la Educación Matemática como el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME por su siglas en inglés), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) y el Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM).

Cabe destacar que, en Latinoamérica, González (2000a) presentó una agenda investigativa en el campo de la Educación Matemática, conocida con el nombre de Programa ALIEM XXI, en la cual incorporó cinco áreas temáticas, entre las cuales destaca el área temática nº 4 sobre la Formación Inicial y Permanente del Profesor de Matemática, señalando que:

> La complejidad implicada por los procesos de formación de profesores de Matemática es tal que este asunto ha de ser concebido como un área de investigación por derecho propio y no como una línea dentro de un área que la contenga, como se concibió en el documento base elaborado inicialmente (p. 25).

Y, seguidamente, González (2000a) añade algunas cuestiones que pudieran ser investigadas dentro de esta área temática; a saber:

> (a) especificidad de los procesos de formación de profesores de Matemática; (b) el papel de las universidades y de los centros de formación de profesores en el desarrollo de un perfil cónsono con los nuevos roles que ha de desempeñar el profesor de Matemática; (c) indicadores de competencia matemática en relación con la formación del profesor; (d) comparación de prácticas institucionales diferenciadas de formación profesional; (e) impacto de la formación adquirida sobre las prácticas docentes consolidadas, rutinarias, establecidas, cristalizadas (p. 26)

Cabe señalar que, además, González (2000b) identificó algunas debilidades en los programas de formación docente en Venezuela, las cuales, aún son apreciables puesto que:

> (a) Plantean una transformación lineal del contenido disciplinario; (b) Ofrecen una visión de la Matemática como una disciplina neutral, objetiva, abstracta e independiente del entorno cultural; (c) Consideran al profesor como un transmisor oral, claro y ordenado de los contenidos matemáticos; (d) Enfatizan el aprendizaje memorístico por recepción; (e) Consideran al alumno como un agente pasivo e individual en el proceso de aprendizaje; (f) Sostienen que las ideas previas de los alumnos constituyen errores que deben ser eliminadas mediante la instrucción; (g) Afirman que la enseñanza de la Matemática consiste en la transmisión al alumno de una verdad sustentada en las propias leyes internas de la Matemática; (h) Adoptan una concepción mecanicista de la evaluación; (i) Presentan una organización curricular aditiva; (j) Enfatizan, en la enseñanza de la Matemática, los aspectos instrumentales de ésta; y, (k) No utilizan los problemas, sino meros ejercicios (González. 2010, p. 49).

Para superar este enfoque tradicional en la formación inicial de los futuros docentes de Matemática, González (1993) propuso configurar una estrategia metodológica dirigida a integrar los componentes especializado y docente, de modo tal que

> conjuntamente con la adquisición de conocimientos o contenidos matemáticos, el futuro docente también pueda apropiarse de un amplio repertorio de opciones para atender las necesidades de aprendizaje de los estudiantes que tendrá después; así que el enfoque que se proponga para abordar el contenido matemático, debería tener en cuenta, como un par indisoluble, los aspectos técnico – metodológicos que habilitarán al futuro docente para su desempeño profesional (p. 12).

Puede inferirse entonces que los responsables del proceso de formación inicial de los docentes de Matemática deben propiciar la participación de éstos en situaciones de enseñanza y aprendizaje orientadas a la construcción y comprensión del conocimiento didáctico debidamente asociado al conocimiento matemático. Entendiéndose – en esta investigación – por conocimiento didáctico "aquel que proporciona al profesor unas herramientas conceptuales y funcionales que le permiten reflexionar con criterios fundados sobre la planificación y el desempeño de su trabajo profesional" (Ortiz, 2002; p. 38). Por consiguiente, la formación inicial de los docentes de Matemática debe ser un escenario propicio para la reflexión didáctica en torno a las situaciones problemáticas fundamentales del campo de la Educación Matemática y la búsqueda de soluciones efectivas a las mismas.

En este sentido, la autora de la presente tesis doctoral ha venido vinculando la investigación sobre la formación inicial de los docentes en Matemática con dos de los asuntos considerados clave de la Educación Matemática: La enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, y el uso de los software de Geometría Dinámica en las clases de Matemática. La relevancia de estos dos asuntos lo demuestran algunas de las actividades realizadas a finales del siglo XX y la primera década del siglo XXI: (a) Encuentro de profesores de Matemática llevado a cabo en 1999, en Portugal, cuyo propósito fue analizar la situación para ese momento y perspectivas futuras de la enseñanza de la Geometría en su país (Veloso y Ponte, 1999); (b) Estudio ICMI dirigido a estudiar las perspectivas sobre la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI, a partir de las contribuciones de destacados educadores matemáticos, relacionadas con temas como los siguientes: Razonamiento en Geometría, Tecnología Computarizada y Enseñanza de la Geometría y Calidad del Personal Docente y de la Educación de los Profesores (Mammana y Villani, 1998); (c) organización y realización de eventos sobre el uso de los software de Geometría Dinámica en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, como el Iberocabri (evento que se ha venido celebrando, cada dos años, a partir de 2002); y (d) la incorporación de estos temas como asuntos a ser discutidos en las últimas ediciones del ICME, el cual es el evento internacional de mayor importancia para la comunidad mundial de educadores matemáticos.

Así, en el ICME 12 celebrado en el año 2012, en Corea del Sur, el Grupo de Discusión nº 10 sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, estableció que su objetivo era en temas teóricos, empíricos, o de desarrollo relativos, entre otros, a los siguientes aspectos: (a) Estudios curriculares sobre la implementación de nuevos planes de estudios; (b) Una aplicación de la Geometría en el mundo real y otros temas; (c) El uso de instrumentos tales como los computadores en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría; (d) Explicación, argumentación y demostración en la enseñanza de la Geometría; (e) Las habilidades espaciales y razonamiento acerca de las formas geométricas bidimensionales y tridimensionales; (f) Preparación de maestros en la enseñanza de la Geometría.

Como puede inferirse, en el ámbito global de la Educación Matemática, hay un persistente interés por los asuntos asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría y por la formación que en estos aspectos han de poseer los docentes de Matemática. Así que la preparación para enseñar Geometría es un asunto que compete a los formadores de los futuros profesores de Matemática; y en este sentido, la autora del presente estudio, quien es formadora de profesores en una Universidad Pública Venezolana dedicada a la formación docente, ha puesto en juego ciertas acciones dirigidas al desarrollo de competencias para la enseñanza de la Geometría en sus estudiantes; por ejemplo, como puede apreciarse en Iglesias (2000), el diseño e implementación de una propuesta didáctica que integrara elementos innovadores y de comprobado potencial didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, tales como: (a) uso de algún software de Geometría Dinámica (como el Cabri – Géomètre II Plus); (b) aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y (c) el enfoque de resolución de problemas. Esta propuesta se materializó a través de un curso sobre *Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora* (en adelante, RPG_AC), el cual estuvo dirigido a los estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay) durante el período académico 1999 – 2; posteriormente, fue incorporado como curso optativo de integración, al Diseño Curricular vigente de la especialidad de Matemática en esta institución.

La reflexión didáctica sobre ciertas situaciones observadas durante la ejecución del curso de RPG_AC ha sido tomada en cuenta para la concepción de la presente investigación.

Para comenzar es importante resaltar que los *software de Geometría Dinámica* (en adelante, SGD) han alcanzado un lugar privilegiado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en diversos países, como así lo reseñan autores tales como Pérez Jiménez (1993), Ponte (1995), Huertos Rodríguez (1995), Schumann (1996), Gravina (1996), Loureiro (1999), Iglesias (2000), Laborde (2000), Marrades y Gutiérrez (2000), González López y Lupiañez Gómez (2001), Campistrous Pérez y López Fernández (2001), Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002), Kadunz (2002), Jahn (2002), Gawlick (2002), Sinclair (2003), Assude (2005), Hoyles y Lagrange (2006) y Lavicza (2010), entre otros.

Los SGD son un conjunto de programas computarizados con cuya aplicación pueden ser creados ambientes que hacen posible que los estudiantes exploren figuras geométricas, descubran algunas de sus propiedades y formulen conjeturas en torno a las mismas. Con la utilización de este tipo de software, las construcciones geométricas se hacen dinámicas, superando así la condición estática propia de una construcción realizada con lápiz y papel, esto permite elaborar múltiples representaciones gráficas de una misma construcción geométrica y visualizar, en forma continua y en tiempo real, cómo se produce el cambio de un estado a otro en dicha construcción. Esta cualidad de los SGD permite introducir la experimentación en las clases de Geometría y mediante la cual los estudiantes podrían aprender a conceptuar y a conjeturar y, además, podrían tomar conciencia de la necesidad de validar o rechazar tales conjeturas (King y Schattschneider, 1997; De Villiers, 1999a; Loureiro, 1999; Iglesias, 2000; Campistrous Pérez y López Fernández, 2001; González López, 2001; Kadunz, 2002; Sträßer, 2002).

Cabe señalar que, en el caso particular de la *resolución de problemas geométricos utilizando el Cabri – Géomètre II* (en adelante, Cabri II), se puede lograr que el estudiante se enfrente a situaciones problémicas en el ámbito de la Geometría, que les permitan comprender la necesidad de justificar las relaciones observadas entre los objetos geométricos que configuran una construcción realizada y manipulada con el Cabri II.

El proceso de resolución de problemas geométricos es ampliamente favorecido por el uso del Cabri II, debido a que los estudiantes disponen de una herramienta que facilita la *visualización matemática*, la cual trasciende a la simple percepción visual debido a que este proceso consiste en centrar la atención en representaciones concretas de objetos geométricos, con el propósito de descubrir o develar las relaciones abstractas existentes entre tales objetos (Iglesias, 2000; Barroso Campos y Gavilán Izquierdo, 2003; Hitt, 2003 y Gal y Linchevski, 2010).

A partir de la observación y evaluación sistemática de los participantes en el curso de RPG_AC y de su propia experiencia como resolutora de problemas geométricos, la autora ha establecido que la *resolución de problemas geométricos asistido por computadora* es un proceso que exige, entre otras, las siguientes acciones:

1. Realizar con regla y compás una construcción geométrica consistente usando el Cabri II (u otro SGD).
2. Comprender el significado de las definiciones de cada uno de los objetos que conforman una construcción geométrica.
3. Visualizar las relaciones existentes entre los objetos que intervienen en una construcción geométrica.
4. Reconocer las llamadas características geométricas invariantes.

5. Formular conjeturas.
6. Introducir construcciones geométricas auxiliares (si fuese necesario).
7. Deducir consecuencias pertinentes a partir de la información disponible.

Asimismo, la autora ha identificado ciertas dificultades confrontadas por algunos de los participantes en el curso de RPG_AC:

1. *Realización de construcciones geométricas inconsistentes:* La inconsistencia de una construcción geométrica se evidencia cuando, al dinamizarla, no se preservan las propiedades deseadas, debido al manejo inadecuado del software (en el cual hay que declarar explícitamente las relaciones de dependencia de un objeto con otro) o a la realización de construcciones sin tomar en consideración las propiedades que caracterizan un objeto geométrico (lo cual pareciera dejar en evidencia cierta deficiencia en la comprensión y manipulación de los conceptos geométricos).

2. *Limitaciones para describir las propiedades geométricas que se visualizan en una construcción:* Los estudiantes centran sus esfuerzos en la identificación de propiedades invariantes en cada una de las construcciones geométricas y, por consiguiente, en la formulación de conjeturas; sin embargo, se evidenciaron ciertas dificultades en cuanto al uso del lenguaje geométrico y al momento de establecer las definiciones de ciertos objetos geométricos, a partir de la visualización de algunas de sus propiedades básicas.

3. *Dificultades para transitar de la conjetura a la demostración:* A pesar de que los participantes previamente han cursado las asignaturas obligatorias de Geometría I y II, ellos manifiestan ciertas dificultades para abordar demostraciones geométricas que involucren tópicos no abordados en estos cursos y de los cuales no tenían una referencia clara sobre las definiciones y propiedades que podían ser utilizadas durante el proceso de demostración. Esto permite conjeturar o inferir que los estudiantes, cuando abordan una demostración en los cursos de Geometría I y II, lo hacen siguiendo en forma sistemática, la teoría axiomática y, por supuesto, no correrían el riesgo de utilizar definiciones no establecidas o propiedades aún no demostradas formalmente en clase. En cambio, en los talleres realizados en el curso de RPG_AC, se ha pretendido que los estudiantes experimentaran y comprendieran que los

teoremas son producto de un proceso propio del quehacer matemático, el cual contempla las siguientes etapas:

Explorar → Conjeturar → Validar o Rechazar Conjeturas

4. *Dificultades para entender la necesidad de demostrar lo evidente:* Dado que la realización y exploración de construcciones geométricas en un ambiente de manipulación dinámica permite la recolección de suficientes evidencias experimentales sobre las características geométricas invariantes, los estudiantes no ven la necesidad de demostrar lo que es evidente, lo que todos "pueden ver". Por lo tanto, el docente debe propiciar a través del diálogo la necesidad de argumentar y demostrar las conjeturas establecidas, aunque su validez se evidencie claramente en la pantalla de una computadora.

Cabe señalar que la situación relacionada con las dificultades que presentan los estudiantes para entender la necesidad de demostrar lo evidente o para abordar el proceso de demostración matemática ha sido reportada por diferentes investigadores, entre los cuales destacan Fetisov (1973), De Villiers (1999b), Gutiérrez (2000), González López (2001) y Larios-Osorio (2009) y, que, además, las mismas también se presentan en los ambientes de aprendizajes con papel y lápiz.

Por ende, en la última década, la influencia del uso de un SGD sobre el proceso de la demostración matemática en Geometría es cuestión abierta a nivel investigativo (Jones, Lagrange y Lemut, 2002). Por ello, en el año 2004, se convocó el estudio ICMI 17 con el propósito de revisar la incidencia del uso de las tecnologías digitales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, llegándose a recibir aproximadamente noventa contribuciones provenientes de diversos lugares, los cuales fueron discutidos en una conferencia celebrada en el Instituto Tecnológico de Hanoi a finales del año 2006. Recientemente, la revista ZDM dedicó un número especial al estudio de la demostración matemática desde las perspectivas epistemológica y didáctica (Mariotti y Balacheff, 2008).

Al respeto, parece existir cierto consenso en cuanto a que la simple inserción de un SGD no garantiza el aprendizaje significativo de la Geometría, ni el paso de la conjetura a la demostración (González López, 2001; Arzarello, Olivero, Paola y

Robuti, 2002) y, por ende, es fundamental el papel que juega el docente en la aproximación de los estudiantes a los aspectos formales del quehacer matemático: las definiciones y la demostración formal. De modo que los docentes – investigadores deben buscar los medios a través de los cuales los estudiantes entiendan que la demostración es una actividad propia del quehacer matemático y no simplemente un requerimiento formal establecido por ellos.

De modo que, ante la necesidad de comprender los aspectos cognitivos y didácticos relacionados con los futuros docentes de Matemática cuando abordan la resolución de problemas geométricos usando un SGD, y, en particular, los que están vinculados con el proceso de demostración matemática en ambientes de aprendizaje tecnologizados, se considera pertinente establecer las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles son los rasgos característicos del curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora?
2. ¿Qué uso le dan los futuros docentes de Matemática a los SGD cuando abordan, a partir de la resolución de problemas, las demostraciones en Geometría?
3. ¿Qué tipo de justificaciones dan los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas y abordan la demostración en un ambiente de Geometría Dinámica?
4. ¿Cuáles son las competencias matemáticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas geométricos usando un software de Geometría Dinámica?
5. ¿Cuáles son las competencias didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando diseñan actividades de enseñanza y aprendizaje de la Geometría dirigidas a estudiantes de Educación Media?

Objetivos Generales

Estudiar las competencias matemáticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática, cuando resuelven problemas geométricos usando un software de Geometría Dinámica y abordan la demostración en Geometría.

Estudiar las competencias didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática, cuando diseñan actividades didácticas con contenidos geométricos susceptibles de ser desarrolladas en Educación Media.

Objetivos Específicos

1. Caracterizar el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora.
2. Describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática a los software de Geometría Dinámica cuando abordan, a partir de la resolución de problemas, las demostraciones en Geometría.
3. Clasificar las justificaciones que dan los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas y abordan la demostración en un ambiente de Geometría Dinámica.
4. Analizar las competencias matemáticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas y abordan la demostración en un ambiente de Geometría Dinámica.
5. Analizar las competencias didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando diseñan actividades de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, dirigidas a estudiantes de Educación Media.

Justificación e Importancia de la Investigación

Los programas de formación inicial de los docentes de Matemática son considerados como los escenarios idóneos para la investigación e innovación curricular, debido a la influencia que ejercen los profesores en los institutos de formación docente sobre el análisis y la concreción del currículo a nivel escolar. Por ello, los formadores de los futuros docentes de Matemática tienen la responsabilidad de brindarles a éstos la oportunidad de participar en programas que incorporen, de manera sistemática e integrada, elementos que son considerados innovadores en el ámbito de la Educación Matemática, tales como ciertas tendencias emergentes en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría y la inserción de las llamadas nuevas tecnologías en las aulas de Matemática.

Cabe señalar que esta visión de los programas de formación inicial de los docentes de Matemática está enmarcada dentro del modelo procesual de cambio curricular propuesto por Stenhouse (1984). En relación con este modelo, Rico, Castro y Coriat (1997) distinguen cuatro ideas relevantes:

- Es considerado un marco flexible para la experimentación e innovación curricular.

- La noción de proyecto curricular está asociada a las características de un currículo abierto a la revisión y crítica permanente y, por ende, susceptible de ser modificado (flexibilidad).

- La concepción del currículo como proceso se fundamenta, según lo expresado por Kemmis (1998), en el hecho que,

> ... el conocimiento y la comprensión se desarrollan a través de procedimientos que no predeterminan los resultados de aprendizaje, sino más bien invitan a la investigación creativa y crítica que lleva a los estudiantes más allá de la esfera que pudiesen especificar los profesores o planificadores del curriculum; resumiendo, invita a los estudiantes a pensar por sí mismos y a no repetir los pensamientos de sus profesores. (p. 75)

- El currículo como instrumento de transformación de profesores y alumnos, ligado a un proceso de investigación, conlleva a la consideración de un currículo por investigación en el aula, el cual según Posner (2000)

> ... se construye bajo la premisa de que la investigación mejora la enseñanza al relacionar el mundo de la vida, al construir proyectos donde interactúan estudiantes, comunidades, profesores, proyectos que se edifican sobre problemas específicos, problemas sociales que se experimentan en el aula de clase, que se sistematizan, se comprueban, se discuten con sentido crítico (p. xxx).

Para Gimeno Sacristán (1998), el modelo propuesto por Stenhouse permite concebir al currículo

> ... como campo de estudio y de práctica que se interesa por la interrelación de dos grandes campos de significado que se han dado por separado como conceptos diferenciados de *curriculum:* las intenciones para la escuela y la realidad de la escuela; teoría e ideas para la práctica, y condiciones de la realidad de esa práctica (p.60).

En consecuencia, la noción de un currículo por investigación en el aula redimensiona el papel del docente, obligándolo a reflexionar, criticar y modificar su práctica educativa. En otras palabras, se hace énfasis en el rol del docente como investigador de su propia praxis. En la actualidad, lo antes expuesto está estrechamente vinculado con las tareas asignadas al educador matemático, quien debe reflexionar sobre su praxis y abordar con un enfoque investigativo los problemas propios del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Por lo antes expuesto, en la presente investigación, se asumió el estudio de las competencias matemáticas y didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática en el área de Geometría y su Didáctica, cuando realizan ciertas tareas asociadas al quehacer geométrico en un contexto didáctico, tales como: (a) resolver problemas geométricos usando un software de Geometría Dinámica, (b) diseñar actividades didácticas con contenidos geométricos susceptibles de ser desarrolladas en Educación Media y (c) abordar la demostración en Geometría. Todo ello en el contexto de un curso basado en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, que integra la resolución de problemas y la demostración en Geometría mediante el uso de un software de Geometría Dinámica.

La integración de los componentes antes mencionados en un programa de formación de futuros docentes de Matemática se justifica porque:

- El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele ha brindado a los docentes de Matemática una teoría coherente para entender y orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Jaime y Gutiérrez, 1990; Corberán, 1994; Gutiérrez, 2000; De Villiers, 2010); cuya aplicación es significativa en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje asistidos por los SGD (Iglesias, 2000).

- Los SGD son herramientas tecnológicas que permiten propiciar la construcción del conocimiento geométrico a través de diferentes etapas: (1) exploración de construcciones geométricas, (2) el reconocimiento de patrones o regularidades (propiedades invariantes en una construcción sometida a una transformación), (3) la formulación de conjeturas y (4) la validación de tales conjeturas. Así, pues, en correspondencia con la evolución histórica de la Geometría, los participantes evidenciarían que la intuición precede a los aspectos formales del conocimiento geométrico, sustituyéndose así la aproximación excesivamente rigurosa y axiomática a la Geometría en el ámbito escolar (Luengo González, Blanco Nieto, Mendoza García, Sánchez Pesquero, Márquez Zurita y Casas García, 1997), que ha ocasionado rechazo a esta área de la Matemática.
- La resolución de problemas geométricos está estrechamente vinculada con el desarrollo de las habilidades asociadas con cada uno de los niveles de razonamiento geométrico propuestos en el Modelo de Van Hiele y con el uso de un SGD, asumido como una poderosa herramienta para elaborar y explorar construcciones geométricas.
- Los conocimientos matemáticos son algo más que la simple sucesión lógica de definiciones y deducciones que constituyen el marco formal del asunto. Según Mills y Tall (1988), en la investigación matemática, en primer lugar, es necesario desarrollar una estructura en la cual se vinculan ciertas ideas antes que ellas se ordenen en una sucesión lógico-deductiva precisa; por consiguiente, es fundamental proporcionar a los estudiantes las bases cognitivas sobre las cuales los teoremas puedan ser construidos y demostrados.

Lo antes mencionado exige la descripción y análisis de las competencias didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática, cuando diseñan (o planifican) actividades de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en el contexto de tal curso de formación.

CAPÍTULO II

REFERENTES TEÓRICOS

Formación Inicial de los Profesores de Matemática desde una perspectiva investigativa

La comunidad de educadores matemáticos se reúne periódicamente en diversos escenarios internacionales para dar a conocer sus avances en materia investigativa y en cada uno de ellos destaca, como un asunto a tratar en los grupos de discusión o como una área temática, la formación inicial y permanente de los profesores de Matemática; así, por ejemplo, en la última edición del Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Seúl - Corea del Sur en el año 2012, se contó con 37 grupos de discusión y, en cuatro de ellos, se abordaron, de manera explícita, los siguientes temas: (a) conocimiento matemático para la enseñanza en educación primaria, (b) conocimiento matemático para la enseñanza en educación secundaria, (c) formación y desarrollo profesional de los profesores de Matemática en servicio y (d) Educación Matemática para los profesores en formación. Llegándose a presentar, según información publicada en ICME 12 Pre-proceedings - http://www.icme12.org/ -, un total de 118 ponencias referidas a tales temas.

Asimismo, al revisar las memorias arbitradas de las dos últimas ediciones del Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (CERME, por sus siglas en inglés), celebradas en Polonia (2011) y Turquía (2013), el grupo de trabajo 17, denominado *De un estudio de las prácticas de enseñanza a las cuestiones en la formación docente*, discutió temas relacionados con: (a) el estudio de la enseñanza de las matemáticas, (b) recursos para la enseñanza: conocimientos y creencias de los profesores de matemáticas; (c) formación docente y desarrollo profesional y (d) trabajo colaborativo entre profesores y reflexión en y sobre su práctica. Además, la formación docente es un tema transversal en investigaciones sobre argumentación y prueba, pensamiento geométrico, y tecnologías y recursos en la Educación Matemática.

En entornos más cercanos al venezolano, en eventos como la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) y la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), en sus convocatorias y actas arbitradas, se ha incorporado la formación de profesores como una cuestión primordial. Para ello, bastaría con revisar las últimas ediciones de las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (ALME) disponibles en http://www.clame.org.mx/acta.htm y percatarse que los extensos de las ponencias publicadas se han venido organizando en cinco categorías: (a) Análisis del discurso matemático, (b) Propuestas para la enseñanza de las matemáticas, (c) Aspectos epistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, (d) El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional, y (e) Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En el Cuadro 1, se muestra la relación de ponencias publicadas en la categoría (d), en las cuales, al leer sus resúmenes, predominan como palabras clave las siguientes: actitudes, competencia matemática, competencia profesional, comunidad de práctica, concepciones, conocimiento matemático, desarrollo profesional docente, desenvolvimiento profesional, discurso didáctico, formación continua, formación de profesores, formación en investigación, historia oral, identidad profesional docente, modelos formativos, profesionalización docente, reflexión sobre la práctica, rol docente, trabajo colaborativo y vocación. Esto pareciera corresponderse con tendencias investigativas presentadas tanto en el ICME 12 como los dos últimos CERME.

Por lo antes mencionado, los investigadores han considerado diversos marcos teóricos y metodológicos que les permitan estudiar las relaciones entre la formación matemática y didáctica del profesor, su desarrollo profesional y los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en educación primaria y secundaria.

Cuadro 1
Relación de las ponencias sobre formación y desarrollo profesional del profesor de Matemática publicadas en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa

Edición nº	País y año	Categoría	Nº de ponencias publicadas
26	Brasil, 2012	El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional	51
25	Cuba, 2011		24
24	Guatemala, 2010		20
23	República Dominicana, 2009		09
22	México, 2008		22
21	Venezuela, 2007		19
20	Cuba, 2006		15
19	Uruguay, 2005		19
18	México, 2004		27

Para facilitar el entendimiento de tales cuestiones y en particular de aquellas vinculadas con esta investigación, se han revisado algunos aportes del grupo de trabajo en *Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor*, adscrito a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y conformado por investigadores de diferentes universidades españolas. Como lo señala Azcárate Goded (2004), desde el año 1984, los integrantes del grupo – procurando mejorar su práctica como formadores de profesores – se han dedicado al estudio del desarrollo profesional del profesor, teniendo en cuenta los siguientes asuntos:

- *Caracterización del conocimiento profesional y su dinámica de elaboración*. Para lograrlo, según Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001) han considerado dos grandes bloques de problemas que se abordan desde y en esta línea de investigación: (a) *Problemas sobre el conocimiento del profesor* (dimensiones, relaciones y estructura), y (b) *problemas sobre la elaboración del conocimiento profesional* (socialización del profesorado, estrategias formativas, de relación con la práctica docente, etc.). Al respecto, Azcárate Goded (2004), menciona cuatro rasgos característicos del conocimiento docente: (a) *práctico* (dirigido a la actuación en el ámbito educativo), (b) *complejo e integrador* (exige la interacción e integración de distintos tipos de conocimientos), (c) *crítico* (la actuación es intencionada y en procura de ciertos objetivos) y (d) *profesionalizado sobre la enseñanza de los* *contenidos* (debe atender situaciones de enseñanza y aprendizaje propios de una disciplina como la Matemática).

- *Evolución del conocimiento profesional*. Se asume que éste "no es un conjunto de técnicas didácticas estandarizadas ni un conjunto de rutinas y principios elaborados a partir de la experiencia, sino que requiere de la interacción e integración rigurosa de saberes de distinto tipo" (Azcárate Goded, 2004, p. 2) y que, además, el proceso de formación docente requiere tanto del estudio como la reflexión y la acción en un justo equilibrio. En el Gráfico 1, se muestran las dimensiones y fuentes del conocimiento profesional propuestas por el mencionado grupo de trabajo, en el cual se observa la red de saberes que se conforma en torno a los problemas y las tareas profesionales, entre las que se encuentran el diseño, gestión y valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.
- *Ámbitos de investigación profesional (AIP).* Teniendo como referencia el análisis de la actividad profesional docente, así como las tareas que la integran y los problemas que se presentan, se introduce la noción de AIP; entendida ésta como "el conjunto de problemas e ideas relacionadas con algún aspecto de la función docente y de la práctica educativa, susceptible de ser objeto de estudio en procesos formativos" (Azcárate Goded, 2004, p. 4).

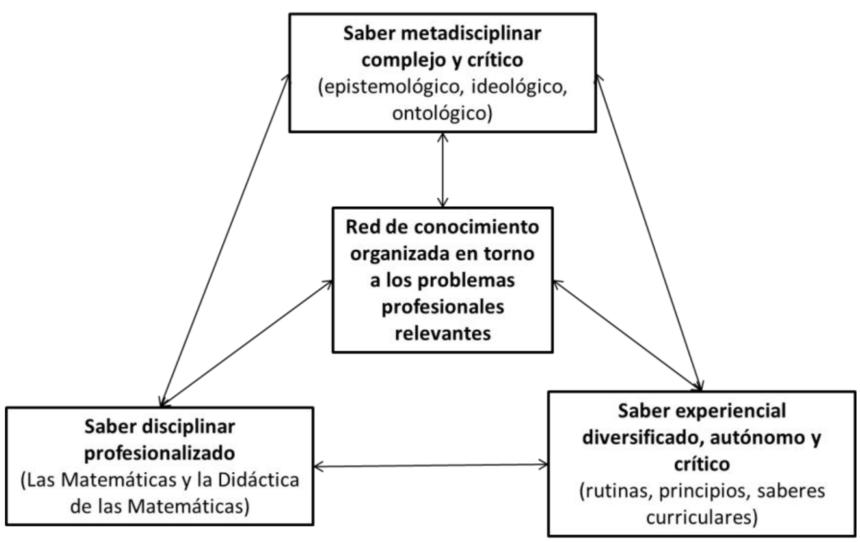


***Gráfico 1*. Dimensiones y fuentes del conocimiento profesional (Azcárate Goded, 2004, p. 3).**

Por ello, en este apartado, se abordará la formación inicial del profesor de Matemática, atendiendo a los aportes de la investigación en esta área y enfatizando en los siguientes aspectos: (a) Modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática, (b) Competencias profesionales y (c) Modelos formativos.

Modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática

Para desarrollar este apartado, se tendrán como referencia los aportes de Lee S. Shulman y colaboradores en cuanto a la noción de conocimiento base para la docencia, así como los planteamientos desarrollados por Deborah L. Ball y su equipo en torno a los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza; sin olvidar las contribuciones del grupo de trabajo en *Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor* y de J.D. Godino sobre las categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemática.

En los Estados Unidos, durante la década de los años 80, se llevó a cabo un proceso de reforma educativa, lo cual motivó a Lee S. Shulman – investigador de la Universidad de Stanford – a dirigir estudios sobre la formación y desempeño docente, los cuales les permitieron desarrollar tres ideas fundamentales: (a) categorías y fuentes del conocimiento base para la enseñanza, (b) razonamiento y acción pedagógica, y (c) políticas de formación del profesorado. Cabe señalar que los estudios de Shulman y colaboradores abarcaron la formación y desempeño de profesores de educación secundaria en distintas disciplinas y sus aportes han sido asumidos por la comunidad de educadores matemáticos.

En el Gráfico 2, se muestra lo que se consideraba era necesario y suficiente poseer para ejercer la docencia: conocer lo que se va a enseñar y poseer ciertas habilidades para organizar y gestionar las clases. Esta visión aditiva y simplista de la elaboración del conocimiento profesional docente ha sido cuestionada por quienes abogan por la profesionalización de la docencia (González, 1993).

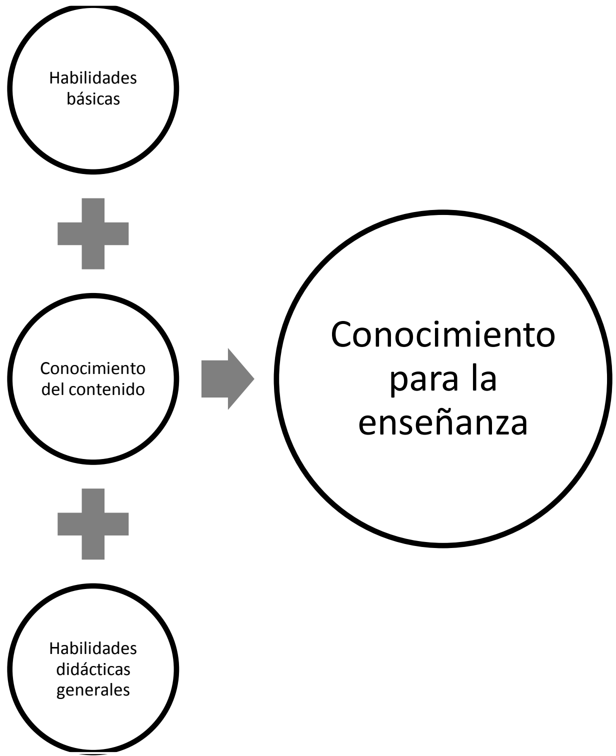


***Gráfico 2*. Visión aditiva de la elaboración del conocimiento profesional docente**

Shulman (2005), partiendo de algunas interrogantes iniciales, desarrolla la noción de conocimiento base para la enseñanza: "conocimiento que subyace en la comprensión que debe tener el profesor para que los alumnos puedan a su vez entender" (p. 10) y que es entendido como "un conjunto codificado o codificable de conocimientos, destrezas, comprensión y tecnología, de ética y disposición, de responsabilidad colectiva, al igual que un medio para representarlo y comunicarlo" (p. 5). Por ello, en respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cuáles serían los conocimientos que debería tener un profesor de Matemática? ¿Cómo se clasificarían? Shulman menciona siete (7) categorías del conocimiento base para la enseñanza: (a) Conocimiento del contenido, (b) Conocimiento didáctico general, (c) Conocimiento del Currículo, (d) Conocimiento didáctico del contenido, (e) Conocimiento de los alumnos y sus características, (f) Conocimiento de los contextos educativos, y (g) Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y entre las cuales destaca el conocimiento didáctico del contenido, ya que, "identifica los cuerpos de conocimientos distintivos para la enseñanza" (p. 11). Seguidamente, se describen las que se consideran categorías fundamentales:

1) *Conocimiento del contenido*: Comprensión de temas específicos (conceptos, propiedades, procedimientos, aplicaciones, problemas asociados y las relaciones existentes entre ellos), así como de la naturaleza del conocimiento y quehacer disciplinario.

2) *Conocimiento del currículo*: Conocimiento sobre los programas de estudio de una disciplina en determinado nivel educativo: los fines que se persiguen, los contenidos a tratar, la metodología a seguir y las relaciones con otras partes del currículo. Se considera que las categorías (e), (f) y (g) pueden ser incluidas en ésta, si se asume una concepción amplía de currículo y no la restringida sólo a los planes de estudios.

3) *Conocimiento didáctico del contenido*: "Comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza" (Shulman, 2005, p. 11). Se considera que el conocimiento didáctico general contribuye con un conjunto de principios y estrategias de organización y gestión de la clase que trascienden el ámbito disciplinario y, por lo tanto, susceptibles de ser asumidos como parte del conocimiento didáctico del contenido.

En el Gráfico 3, se trata de mostrar una visión integradora de las categorías del conocimiento base para la enseñanza, en contraste con la visión aditiva, ya que se considera que en la toma de decisiones y acciones que lleva a cabo un profesor, antes, durante y después de su práctica docente, pone en juega diversos tipos de conocimiento en relación a la materia que enseña, la organización y gestión de las clases en función de un currículo escolar, la selección y uso de materiales y recursos didácticos, la valoración de los aprendizajes, etc. Por lo antes mencionado, pudiera decirse que la noción de conocimiento didáctico del contenido es un aporte relevante de Lee A. Shulman a la investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor.

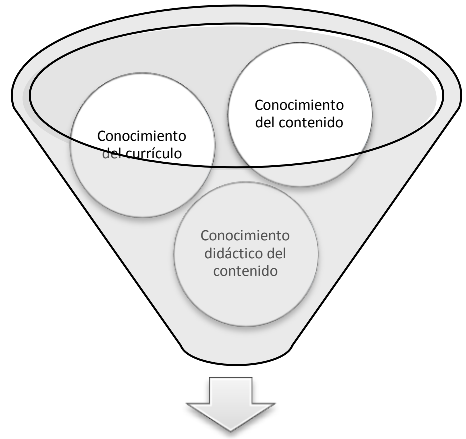


***Gráfico 3*. Categorías del conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 2005).**

Además, Shulman (2005) menciona cuatro fuentes del conocimiento base para la enseñanza: (a) Formación académica en la disciplina a enseñar, (b) los materiales y el contexto educativo institucionalizado, (c) la investigación educativa, y (d) la sabiduría que otorga la práctica docente.

Cabe destacar que Shulman (2005) entiende a la docencia como "un acto de comprensión y razonamiento, de transformación y reflexión" (p. 17) y, por ello, el objetivo de la formación docente es educar a los profesores para que "razonen bien sobre lo que enseñan y desempeñen su labor con idoneidad" (p. 17); añadiendo que "para razonar bien se requiere tanto un proceso de reflexión sobre lo que se está haciendo como una adecuada base de datos, principios y experiencias a partir de las cuales se pueda razonar" (p. 17). En otras palabras, los profesores tienen que poner en juego su conocimiento base para pensar, tomar decisiones y ejecutar acciones, con una clara intencionalidad didáctica, durante su desempeño profesional. Por ello, Shulman se dedicó a estudiar la racionalidad que subyace en las decisiones que toman y las acciones que realizan los docentes, llegando a proponer un modelo de acción y razonamiento pedagógico que supone la existencia de un proceso cíclico conformado por las siguientes actividades: (a) *comprensión*: el profesor necesita comprender lo que enseña; (b) *transformación*: las ideas comprendidas requieren ser transformadas para que otros las comprendan; (c) *enseñanza:* actividad constituida por una diversidad de actos observables ejecutados por el profesor; (d) *evaluación*: actividad compleja que implica entender qué es lo que comprende un estudiante y valorar la propia labor docente, así como las estrategias, materiales y recursos didácticos empleados; y (e) *reflexión*: se pone en juego cuando se analiza retrospectivamente el proceso de enseñanza y aprendizaje planificado, implementado y evaluado; es la capacidad de reflexionar en y sobre la práctica, con el propósito de generar *nuevas comprensiones* que pasen a formar parte del conocimiento profesional docente (ver Gráfico 4).

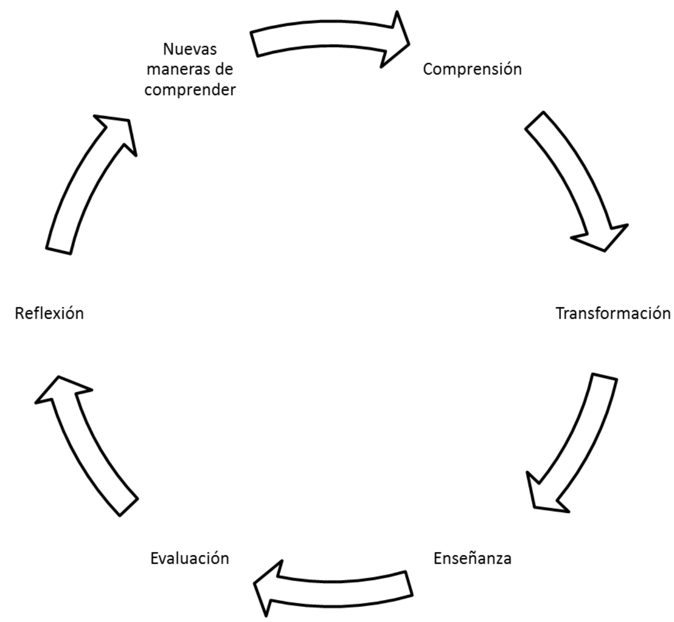


Gráfico 4. **Modelo de Razonamiento y Acción Pedagógica propuesto por Lee S. Shulman**.

Grossman, Wilson y Shulman (2005), en el marco del proyecto denominado *Desarrollo del conocimiento en una profesión*, investigaron sobre el papel que el conocimiento del contenido jugaba en la planificación y gestión de las clases por parte de profesores de secundaria (en distintas disciplinas); encontrando que “el conocimiento de la materia por los profesores afectaba a la vez el contenido y al proceso de la instrucción, influyendo a la vez en lo que los profesores enseñan y en cómo lo enseñan” (p. 8). En función a ello, Grossman et. al. (2005) identifican cuatro dimensiones del conocimiento del contenido: (a) el conocimiento del contenido para la enseñanza, (b) el conocimiento sustantivo, (c) el conocimiento sintáctico y (d) las creencias acerca de la disciplina a ser enseñada; en el Cuadro 2, se describen cada una de estas dimensiones. Además, observaron que los profesores - cuando les correspondió enseñar un contenido no familiar o desconocido para ellos – evitaron enseñarlo o emplearon al libro de texto como principal fuente de información, pero sin contar con las herramientas para valorar la precisión, adecuación y alcance del texto. Al respecto, estos autores expresan que "el conocimiento o la falta de conocimiento, del contenido puede afectar a cómo los profesores critican los libros de texto, a cómo seleccionan el material para enseñar, a cómo estructuran sus cursos y a cómo conducen la instrucción" (p. 13); por ello, los profesores deben entender el papel relevante que juega el conocimiento del contenido (conceptos, propiedades, estructuras sustantivas y estructuras sintácticas de una disciplina) para una enseñanza efectiva. Es necesario que los profesores desarrollen habilidades para construir nuevos conocimientos y reflexionar sobre y aprender desde la práctica docente.

Cuadro 2
Dimensiones del conocimiento del contenido según Grossman, Wilson y Shulman (2005)

Conocimiento del contenido para la enseñanza	Se refiere al contenido de una disciplina, lo cual incluye: información objetiva, organización de principios y conceptos centrales, lo cual ayudaría a identificar relaciones entre temas de una misma disciplina y con temas de otras áreas de conocimiento.
Conocimiento sustantivo para la enseñanza	Incluyen los marcos exploratorios o paradigmas que son usados tanto para guiar la investigación en el campo disciplinario como para dar sentido de los datos
Conocimiento sintáctico para la enseñanza	Conocimiento de las formas en las que el nuevo conocimiento es introducido en el seno de una disciplina.
Creencias acerca de la disciplina a ser enseñada	Depende de la evidencia que es considerablemente afectiva o subjetiva; las mismas se justifican o mantienen por razones que son discutibles.

Deborah L. Ball y colaboradores teniendo en cuenta los aportes de Lee S. Shulman sobre el conocimiento base para la enseñanza han desarrollado un modelo sobre los dominios de conocimientos matemáticos para la enseñanza. Cabe destacar que, a diferencia de Shulman, los trabajos de Ball y su equipo han estado centrados en el ámbito de la Educación Matemática.

Ball, Hill y Bass (2005) expresan que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática necesita mejorar, lo cual es poco probable sino se presta atención a la práctica docente. Por ello, se plantean ciertas preguntas: ¿Existe un conocimiento profesional de la Matemática para la enseñanza? ¿Cuál es el alcance y la naturaleza de los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza? ¿Qué significa conocer Matemática para la enseñanza? En sus esfuerzos por responderlas, establecen que el conocimiento matemático para la enseñanza es una forma de conocimiento profesional de la Matemática distinto al que poseen otros profesionales que también la utilizan intensamente, tal como sucede en el caso de matemáticos, ingenieros, físicos, administradores, etc., ya que, el cumplimiento de las tareas docentes involucran, entre otras cosas, el conocimiento de diversas ideas matemáticas, la puesta en práctica de habilidades de razonamiento y comunicación, selección y uso efectivo de ejemplificaciones, fluidez en el manejo del lenguaje matemático y capacidad reflexiva sobre el proceso de enseñanza y la valoración del aprendizaje alcanzado por sus estudiantes.

En este orden de ideas, Hill, Ball y Schilling (2008) han buscado entender y medir el conocimiento matemático para enseñanza; entendiéndolo como el conocimiento matemático que los profesores utilizan en las aulas para producir instrucción y propiciar el aprendizaje en los estudiantes. Para estos autores, además del conocimiento del contenido matemático, los docentes podrían necesitar otras formas de conocimientos útiles para su trabajo en las aulas; por lo cual, han desarrollado un modelo sobre los dominios de conocimientos matemáticos para la enseñanza. Dicho modelo se muestra en el Gráfico 5.

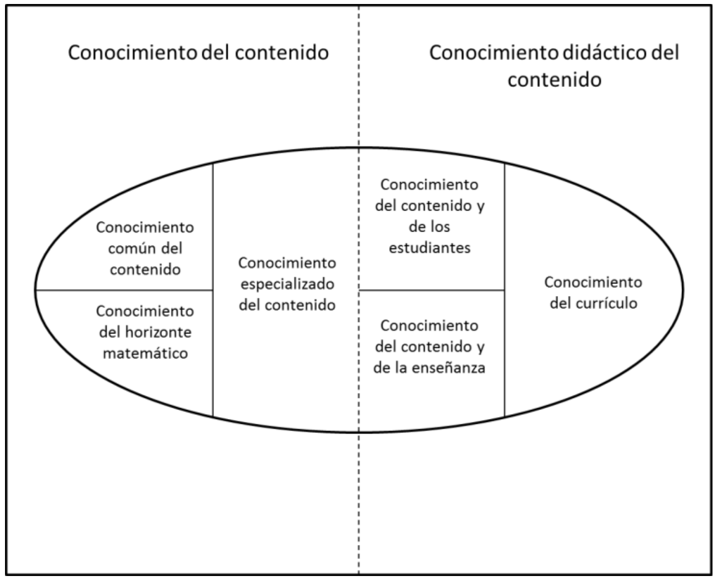


***Gráfico 5*. Modelo sobre los dominios de conocimientos matemáticos para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008).**

Como se observa en el gráfico anterior, el conocimiento matemático para la enseñanza abarca dos dominios de conocimiento: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido; cada uno de ellos divididos en tres subdominios, que se describen el Cuadro 3 y que conforman el cuerpo de conocimientos que debería alcanzar y poner en práctica un profesor de Matemática.

Cuadro 3
Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza según el modelo propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008)

Conocimiento del contenido matemático (CCM)	
Conocimiento común del contenido (CCC)	Conocimiento del contenido que se utiliza en el trabajo de la enseñanza de la misma forma como se emplea en muchas otras profesiones u ocupaciones que también se aprovechan de la Matemática.
Conocimiento especializado del contenido (CEC)	Conocimiento matemático que permite a los profesores participar en determinadas tareas de enseñanza, incluida la forma de representar con precisión las ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas para reglas y procedimientos comunes, y examinar y comprender los métodos inusuales de solución a los problemas planteados.
Conocimiento del horizonte matemático (CHM)	Conocimiento de cómo están relacionados los temas matemáticos presentes en los programas de estudio y las relaciones que guardan con temas de otras disciplinas.

Cuadro 3 (cont.)

Conocimiento didáctico del contenido matemático (CDCM)	
Conocimiento del contenido y de los estudiantes (CCEs)	Conocimiento sobre la mejor manera de construir el pensamiento matemático en los estudiantes o cómo remediar errores cometidos por ellos; es decir, se centra en la comprensión de cómo los estudiantes aprenden cierto contenido matemático.
Conocimiento del contenido y de la enseñanza (CCEn)	Conocimiento sobre las estrategias, materiales y recursos didácticos idóneos para desarrollar el proceso de enseñanza de determinados temas matemáticos.
Conocimiento del currículo (CC)	Conocimiento de los materiales curriculares.

Nótese que el conocimiento del contenido matemático (CCM) comprende, además del conocimiento especializado del contenido (CEC), otros dos subdominios: el conocimiento común del contenido (CCC) y el conocimiento del horizonte matemático (CHM), con lo cual pareciera ampliarse la noción de conocimiento del contenido desarrollada por Shulman (2005). Asimismo, la noción de conocimiento didáctico del contenido matemático (CDCM) comprende tres subdominios que se centran en: (a) *aspectos cognitivos*: ¿Cómo evoluciona el pensamiento lógico – matemático? ¿Cuáles conocimientos y competencias matemáticas requieren poner en juego los estudiantes cuando realizan ciertas tareas propuestas por el docente? ¿Cuáles errores podrían cometer cuando realizan una tarea matemática? ¿Cómo remediar los errores cometidos por los estudiantes? ¿Cuáles serían las estrategias evaluativas idóneas para valorar el aprendizaje matemático?; (b) *aspectos didácticos*: ¿Cuáles serán las estrategias didácticas idóneas para abordar el estudio de cierto tema matemático? ¿En cuáles principios y criterios se basará la selección de materiales y recursos didácticos? ¿Qué tipo de tareas habría que proponer a los estudiantes para alcanzar ciertos objetivos de aprendizaje? ¿Cómo organizar las distintas tareas diseñadas para propiciar el aprendizaje de un tema matemático?; y (c) *aspectos curriculares*: ¿Cuáles son los fines que se persiguen con la enseñanza de la Matemática? ¿Cuáles razones justifican la enseñanza de la Matemática en distintos niveles educativos y, en particular, de algunos temas? ¿Cómo un tema matemático es presentado en los programas de estudio y en los libros de texto?

Obviamente las preguntas formuladas son sólo una muestra de aquellas que un profesor de Matemática necesitará responder cuando se disponga a diseñar y desarrollar una unidad didáctica con contenido matemático, pero ayudan a comprender qué se entiende por conocimiento didáctico del contenido matemático y cuáles son sus subdominios.

Ball, Thames y Phelps (2008) han señalado que, a medida que la noción de conocimiento didáctico del contenido - propuesta por Shulman (2005) - fue siendo aceptada por la comunidad de educadores matemáticos, surgió la necesidad de desarrollo teórico, clarificación analítica y estudios empíricos, con el propósito de discernir entre los subdominios que conforman el CDC según el modelo propuesto por Hill et. al. (2008). Quizá, por ello, en el grupo de trabajo 17 reunido en el CERME 8, se presentaron diez (10) ponencias sobre la forma en que se utilizan los modelos de conocimiento profesional docente.

Al respecto, Potari (2013), coordinadora de este grupo, indica que se trataron los siguientes asuntos: (a) los modelos permiten la realización de un análisis más preciso de cada componente del conocimiento relacionado con la enseñanza eficaz de las matemáticas; (b) el desarrollo de los subdominios del conocimiento del contenido matemático permitirían identificar los conocimientos que debería poseer un profesor de Matemática; y (c) por ello, se solicitó una formulación más precisa de los conceptos y su análisis más profundo. Ciertas preguntas quedaron abiertas para futuras discusiones: ¿Cómo podrían diferentes tipos de conocimiento (especialmente CHM) ser promovidos en la formación inicial y continua del profesorado? ¿Qué método de investigación debería / podría ser empleado para analizarlos? ¿Cuál es la evidencia empírica? ¿Los profesores los tendrían en cuenta?

En este orden de ideas, Godino (2009) analiza los modelos de conocimiento profesional docente propuestos por Shulman (2005) y Hill et. al (2008), estableciendo que “sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva”, ya que esto “permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas” (p.

19). En este sentido, Godino (2009) propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor, asumiendo como bases teóricas el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS):

> Se trata de un modelo poliédrico cuya representación indica las diversas facetas a tener en cuenta en un proceso de estudio (epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica) y el alzado indica cuatro niveles de análisis sobre los cuales se puede fijar la atención (prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos matemáticos y didácticos, normas y metanormas e idoneidad) (p. 21).

En su artículo, Godino incluye ciertas pautas para la formulación de cuestiones de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos basadas en el modelo propuesto; para ello, presenta cuatro tablas en las cuales se observa una correspondencia entre las facetas del modelo (propias del EOS) y los tipos de conocimiento didáctico - matemáticos, según las categorías propuestas por Hill et. al (2008), como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 4
Correspondencia entre las facetas del EOS y los tipos de conocimiento didáctico - matemáticos

Facetas	Tipos de conocimientos didáctico - matemáticos
Faceta epistémica	Conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)
Facetas cognitiva y afectiva	Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes
Faceta instruccional (interaccional y mediacional)	Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza
Faceta ecológica	Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinarios

Nota: Godino (2009) emplea el término conocimiento ampliado del contenido para referirse al conocimiento del horizonte matemático.

Cabe señalar que estas pautas se tendrán en cuenta más adelante (ver Capítulo VI), cuando se analicen los conocimientos didáctico – matemáticos que se requieren para diseñar, desarrollar y evaluar una unidad didáctica con contenido matemático o para resolver un problema haciendo uso de un software de Geometría Dinámica.

Azcárate (1998), aunque no hace referencia a los trabajos de Shulman y Ball, al responder la pregunta qué han de saber y saber hacer los profesores de Matemática, identifica conocimientos y destrezas con respecto a la materia a enseñar, al aprendizaje de los estudiantes y al diseño y desarrollo de la enseñanza, lo cual conduce a establecer vínculos con las categorías del conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 2005) y los dominios del conocimiento matemático de la enseñanza (Hill et al., 2008), como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 5
¿Qué han de saber y saber hacer los profesores de Matemática?

Categorías del conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 2005)	**Conocimientos y destrezas del Profesor de Matemática (Azcárate, 1998, p. 134)**
Conocimiento del contenido matemático (CCM)	• Conocer la materia, su estructura y sus relaciones. • Analizar la problemática socioambiental desde la perspectiva matemática.
Conocimiento didáctico del contenido matemático (CDCM)	• Conocer las peculiaridades del aprendizaje matemático, los posibles errores y dificultades del proceso. • Seleccionar y secuenciar los contenidos. • Seleccionar, organizar y dirigir la actividad del alumno. • Evaluar y regular el proceso. • Gestionar la dinámica de aula.
Conocimiento del Currículo (CC)	• Analizar críticamente la realidad de la educación matemática.

En este sentido, Azcárate (1998) expresa que, teniendo en cuenta tales conocimientos y destrezas,

> el profesor debe ser capaz de realizar un análisis didáctico de los contenidos matemáticos a trabajar y diseñar procesos de enseñanza/aprendizaje en función de unas finalidades determinadas, que reflejen el conocimiento a elaborar por los alumnos, los procesos de actividades a realizar por los alumnos, los recursos y los procedimientos metodológicos a desarrollar que favorezcan el aprendizaje de los alumnos y la evolución de sus concepciones (p. 133).

De esta manera, resulta pertinente establecer relaciones entre los dominios del conocimiento profesional del Profesor de Matemática y las competencias que tendría que poner en práctica para cumplir con sus tareas docentes; en particular los conocimientos y competencias requeridas para llevar a cabo el análisis didáctico de un contenido matemático en sus fases de diseño y actuación. Esta idea será desarrollada más adelante, porque favorecerá el análisis de las competencias matemáticas y didácticas que un grupo de profesores en formación pusieron en práctica cuando realizaron ciertas tareas en el marco del curso de RPG_AC.

Competencias Profesionales

Desde una perspectiva curricular, en el período 2004 – 2007, se llevó a cabo el proyecto Tuning – América Latina, el cual tuvo como meta "impulsar consensos a escala regional sobre la forma de entender los títulos, desde el punto de vista de las competencias que los poseedores de dichos títulos serían capaces de alcanzar" (Beneitone, Esquetini, González, Marty Maletá, Siufi y Wagenaar, 2007, p. 15); en consecuencia, el inicio del proyecto estuvo dado por la búsqueda de puntos de referencia centrados en las *competencias profesionales* y, por ello, la primera línea de trabajo estuvo dirigida a identificar las *competencias genéricas (*comunes para diferentes profesiones*)* y las *competencias específicas* (relacionadas con un área de conocimiento o profesión en particular).

En el informe final del mencionado proyecto, se establece que, en el ámbito educativo, el concepto de competencia

> se presenta como una red conceptual amplia, que hace referencia a una formación integral del ciudadano, por medio de nuevos enfoques, como el aprendizaje significativo, en diversas áreas: cognoscitiva (saber), psicomotora (saber hacer, aptitudes), afectiva (saber ser, actitudes y valores). En este sentido, la competencia no se puede reducir al simple desempeño laboral, tampoco a la sola apropiación de conocimientos para saber hacer, sino que abarca todo un conjunto de capacidades, que se desarrollan a través de procesos que conducen a la persona responsable a ser competente para realizar múltiples acciones (sociales, cognitivas, culturales, afectivas, laborales, productivas), por las cuales proyecta y evidencia su capacidad de resolver un problema dado dentro de un contexto específico y cambiante (Beneitone et al., 2007, p. 36).

En esta definición amplia del término competencia, se observan algunos elementos importantes: (a) La competencia es susceptible de ser desarrollada y construida en función a la formación integral de una persona; (b) ésta involucra aspectos conceptuales, procedimentales y afectivos vinculados con un área de conocimiento; (c) trasciende al ámbito laboral, ya que, también se pone de manifiesto en el entorno familiar y sociocultural; (d) exige la realización de diversas acciones con una intencionalidad bien definida; y (e) se asocia a la capacidad de resolver problemas en diversos contextos.

Asimismo, en dicho informe se presentó un listado de 27 *competencias genéricas* (ver Cuadro 6), las cuales

> identifican los elementos compartidos, comunes a cualquier titulación, tales como la capacidad de aprender, de tomar decisiones, de diseñar proyectos, las habilidades interpersonales, etc., las mismas se complementan con las competencias relacionadas con cada área de estudio, cruciales para cualquier título, y referidas a la especificidad propia de un campo de estudio (Beneitone et al., 2007, p. 37).

En el informe se señala que 22 de estas 27 competencias genéricas coinciden con las establecidas en el marco del proyecto Tuning para Europa; en relación con las cinco restantes, cabe decir que se incorporaron tres nuevas competencias (responsabilidad social y compromiso ciudadano, compromiso con la preservación del medio ambiente y compromiso con su medio sociocultural) y cinco competencias del listado europeo fueron reagrupadas y redefinidas en dos.

Además, en el área de Educación, las competencias genéricas más valoradas por los cuatro grupos de encuestados en el marco del proyecto Tuning para América Latina (grupos conformados por académicos, egresados, estudiantes y empleadores de catorce países latinoamericanos, entre ellos Venezuela) fueron las siguientes: (a) conocimientos sobre el área de estudio y la profesión; (b) capacidad de comunicación oral y escrita; (c) capacidad de aplicar conocimientos en la práctica; (d) capacidad de aprender y actualizarse permanentemente y (e) compromiso ético; en otras palabras, estas cinco competencias reflejan los logros de aprendizaje deseables por los diferentes grupos de encuestados.

Cuadro 6
Competencias genéricas acordadas para América Latina (Beneitone et al., 2007, pp. 44 y 45)

1. Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.	15. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
2. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.	16. Capacidad para tomar decisiones.
3. Capacidad para organizar y planificar el tiempo.	17. Capacidad de trabajo en equipo.
4. Conocimientos sobre el área de estudio y la profesión.	18. Habilidades interpersonales.
5. Responsabilidad Social y compromiso ciudadano.	19. Capacidad de motivar y conducir hacia metas comunes.
6. Capacidad de comunicación oral y escrita.	20. Compromiso con la preservación del medio ambiente.
7. Capacidad de comunicación en un segundo idioma.	21. Compromiso con su medio sociocultural.
8. Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación.	22. Valoración y respeto por la diversidad y multiculturalidad.
9. Capacidad de investigación.	23. Habilidad para trabajar en contextos internacionales.
10. Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.	24. Habilidad para trabajar de forma autónoma.
11. Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas.	25. Capacidad para formular y gestionar proyectos.
12. Capacidad crítica y autocrítica.	26. Compromiso ético.
13. Capacidad para actuar en nuevas situaciones.	27. Compromiso con la calidad.
14. Capacidad creativa.	

En relación con las competencias específicas, a partir de la consulta a 1540 personas (876 académicos y 664 graduados) provenientes de los países participantes, se logró establecer un listado de 27 competencias específicas para el área de Educación (ver Cuadro 7), resultando entre las más valoradas aquellas requeridas para el ejercicio profesional y disciplinar, y de aplicación en el aula o institución educativa: Domina los saberes de las disciplinas del área de conocimiento de su especialidad y diseña y operacionaliza estrategias de enseñanza – aprendizaje según contextos. Con ello, se observa la valoración positiva que se realiza tanto de las competencias propias de la disciplina objeto de enseñanza como de las competencias didácticas; es decir, es necesario conocer lo que se enseña, pero también lo es conocer cómo gestionar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Cuadro 7
Competencias específicas para el área de Educación (ob. cit., p. 137)

1. Domina la teoría y metodología curricular para orientar acciones educativas (diseño, ejecución y evaluación).	15. Educa en valores, formación ciudadana y democracia.
2. Domina los saberes de las disciplinas del área de conocimiento de su especialidad.	16. Investiga en educación y aplica los resultados en la transformación sistemática de las prácticas educativas.
3. Diseña y operacionaliza estrategias de enseñanza y aprendizaje según contextos.	17. Genera innovaciones en distintos ámbitos del sistema educativo.
4. Proyecta y desarrolla acciones educativas de carácter interdisciplinario.	18. Conoce la teoría educativa y hace uso crítico de ella en diferentes contextos.
5. Conoce y aplica en el accionar educativo las teorías que fundamentan la didáctica general y las didácticas específicas.	19. Reflexiona sobre su práctica para mejorar su quehacer educativo.
6. Identifica y gestiona apoyos para atender necesidades educativas específicas en diferentes contextos.	20. Orienta y facilita con acciones educativas los procesos de cambio en la comunidad.
7. Diseña e implementa diversas estrategias y procesos de evaluación de aprendizajes con base en criterios determinados.	21. Analiza críticamente las políticas educativas.
8. Diseña, gestiona, implementa y evalúa programas y proyectos educativos.	22. Genera e implementa estrategias educativas que respondan a la diversidad sociocultural.
9. Selecciona, elabora y utiliza materiales didácticos pertinentes al contexto	23. Asume y gestiona con responsabilidad su desarrollo personal y profesional en forma permanente.
10. Crea y evalúa ambientes favorables y desafiantes para el aprendizaje.	24. Conoce los procesos históricos de la educación de su país y Latinoamérica.
11. Desarrolla el pensamiento lógico, crítico y creativo de los educandos.	25. Conoce y utiliza las diferentes teorías de otras ciencias que fundamentan la educación: lingüística, filosofía, sociología, psicología, antropología, política e historia.
12. Logra resultados de aprendizaje en diferentes saberes y niveles.	26. Interactúa social y educativamente con diferentes actores de la comunidad para favorecer los procesos de desarrollo.
13. Diseña e implementa acciones educativas que integran a personas con necesidades especiales.	27. Produce materiales educativos acordes con diferentes contextos para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.
14. Selecciona, utiliza y evalúa las tecnologías de la comunicación e información como recursos de enseñanza y aprendizaje.	

Cabe señalar que, desde una perspectiva curricular y a nivel internacional, no sólo se ha desarrollado el proyecto Tuning, teniendo como idea central la noción de competencia; también la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) lanzó, en 1997, el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), con el objetivo de monitorear cómo los estudiantes que se encuentran al final de la educación preuniversitaria obligatoria han adquirido los conocimientos y las destrezas necesarios para el cabal ejercicio de la ciudadanía. Uno de los rasgos relevantes de las evaluaciones PISA es el empleo de la noción de competencia en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias.

Por ello, en paralelo, la OCDE impulsó el Proyecto de Definición y Selección de Competencias (Proyecto DeSeCo), con el propósito de proporcionar "un marco que puede guiar una extensión, a más largo plazo, de evaluaciones de nuevos dominios de competencias" (OCDE, 2005). En el resumen ejecutivo del Proyecto DeSeCo, se identifica un conjunto pequeño de competencias clave, agrupadas en tres amplias categorías: (a) usar las herramientas de forma interactiva; (b) interactuar en grupos heterogéneos, y (c) actuar de manera autónoma. En el Cuadro 8, se dan a conocer las competencias clave asociadas a las categorías antes mencionadas. Asimismo, se mencionan algunas características subyacentes y transversales a estas categorías: (a) "las competencias clave involucran la movilización de destrezas prácticas y cognitivas, habilidades creativas y otros recursos psicosociales como actitudes, motivación y valores" (OCDE, 2005, p. 7); (b) el pensamiento y la acción reflexiva es un componente esencial del marco teórico sobre las competencias clave: "Pensar reflexivamente requiere procesos mentales relativamente complejos y que el asunto se convierta en el objeto de un proceso de pensamiento" (OCDE, 2005, p. 7); (c) la resolución de un problema en diversos contextos exige la puesta en juego de distintas competencias clave.

Tales competencias clave parecieran relacionarse con las llamadas competencias genéricas establecidas en el proyecto Tuning, las cuales se clasifican en instrumentales, interpersonales y sistémicas (Rico Romero y Lupiánez Gómez, 2008).

Cuadro 8
Competencias clave establecidas en el proyecto DeSeCo (OCDE, 2005)

Categorías	Competencias asociadas
1. Usar las herramientas de forma interactiva	1-A. Habilidad para usar el lenguaje, los símbolos y el texto de forma interactiva. 1-B. Capacidad de usar este conocimiento e información de manera interactiva. 1-C. Habilidad de usar la tecnología de forma interactiva.
2. Interactuar en grupos heterogéneos	2-A. Habilidad de relacionarse bien con otros. 2-B. Habilidad de cooperar. 2-C. Habilidad de manejar y resolver conflictos.
3. Actuar de manera autónoma	3-A. Habilidad de actuar dentro del gran esquema (o contexto). 3-B. Habilidad de formar y conducir planes de vida y proyectos personales. 3-C. Habilidad de afirmar derechos, intereses, límites y necesidades.

En el proyecto DeSeCo, al referirse a la habilidad para usar el lenguaje, los símbolos y el texto en forma interactiva, se expresa que "esta competencia clave se relaciona con el uso efectivo de las destrezas lingüísticas orales y escritas, las destrezas de computación y otras destrezas matemáticas, en múltiples situaciones" (Beneitone et. al., 2007, p. 10) y debido a esto la competencia en lectura y la competencia en matemática en PISA son ejemplos ilustrativos de esta competencia clave. Por ello, es necesario revisar en el marco teórico de PISA, la noción de competencia en matemática o competencia matemática.

Es preciso señalar que las evaluaciones PISA, en las cuales han participado los países miembros de la OCDE, así como otros países invitados, se han llevado a cabo en los años 2000, 2003, 2006, 2009 y 2012, con énfasis en el área de Matemática durante las ediciones correspondientes a los años 2003 y 2012. Al revisar los documentos oficiales, se consiguió que, para PISA 2000, se utilizó el término *aptitud para matemáticas*, mientras que, a partir de PISA 2003, se ha empleado el término *competencia matemática*.

Inicialmente, en PISA se define la *aptitud para matemáticas* como

> la capacidad de identificar, comprender y practicar las matemáticas, así como de hacer juicios bien fundamentados acerca del papel que las matemáticas desempeñan en la vida privada actual y futura de un individuo, su vida laboral, su vida social con parientes y colegas o iguales y su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2002, p. 23).

Más adelante, señala que este concepto se emplea para “indicar la capacidad de aplicar los conocimientos y las aptitudes de manera funcional más que su simple dominio en el contexto de un plan de estudio” (OCDE, 2002, p. 23). Además, se agrega que ésta “también implica la capacidad para plantear y resolver problemas matemáticos en distintas situaciones, al igual que la inclinación a hacerlo, lo que a menudo depende de características personales como la confianza en sí mismo y la curiosidad” (OCDE, 2002, p. 23). Se nota que, en este documento, no se habla de manera explícita de *competencia matemática*, sino de *aptitud para matemáticas*, con énfasis en lo cognitivo, aunque ya se deja ver cierta valoración de los aspectos afectivos en su evaluación; además, para evaluar la aptitud para matemáticas, en PISA 2000, se consideraron tres aspectos: (a) el contenido matemático, (b) el proceso matemático, y (c) las situaciones en las que se emplean las matemáticas. Más adelante, se comentarán sus acepciones en el marco de este programa.

Dentro del marco teórico para PISA 2003, se introdujo la siguiente definición de *competencia matemática*:

> es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2004, p. 28).

Esta definición no difiere significativamente de la dada, para PISA 2000, al referirse a la aptitud para matemáticas; no obstante, se añaden algunos comentarios que ayudan a comprender esta definición:

1. Este término se ha elegido para expresar con énfasis “el uso funcional del conocimiento matemático en numerosas y diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda” (OCDE, 2004, p. 28).

2. La competencia matemática trasciende al dominio de contenidos conceptuales y procedimentales previstos en los planes de estudio del área de Matemática; la misma exige la combinación creativa de conocimientos y destrezas en la búsqueda de la solución a un problema planteado.

3. Se emplea el término *mundo* para referirse al entorno natural, sociopolítico, económico y cultural en que vive la persona.

4. La expresión *utilizar y participar* "se aplica para abarcar el uso de las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos" (OCDE, 2004, p. 29), lo cual supone la realización de acciones asociadas al quehacer matemático y la apreciación de los valores utilitarios y estéticos de la Matemática.

5. La expresión *su vida* lleva implícita "su vida privada, laboral y social con sus compañeros y familiares, así como su vida como ciudadano dentro de una comunidad" (OCDE. 2004, p. 29).

Para describir la evaluación de la competencia matemática en PISA 2003 se consideraron tres elementos:

> las *situaciones o contextos* en que se sitúan los problemas; el *contenido matemático* del que hay que valerse para resolver los problemas, organizado según ciertas *ideas* principales; y, sobre todo, las *competencias* que deben activarse para vincular el mundo real en el que se generan los problemas con las matemáticas, y, por tanto, para resolver los problemas (OCDE, 2004, p. 33).

Nótese que, en PISA 2003, se mantienen dos de los tres aspectos mencionados en PISA 2000, para llevar a cabo la evaluación de la aptitud para matemáticas: las situaciones o contextos y el contenido matemático; y se sustituye el proceso matemático por las competencias (en plural), con lo cual pudiera inferirse la vinculación de los procesos matemáticos con las competencias. Esto se confirma cuando se expresa que "los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas se conocen como competencias matemáticas" (OCDE, 2004, p. 34).

La relación entre estos elementos se muestra en el Gráfico 6: (a) la resolución de problemas próximos a situaciones de la vida cotidiana del estudiante representa una oportunidad para desarrollar y poner en juego sus competencias matemáticas; (b) tales situaciones son la parte del mundo del estudiante vinculada con el problema planteado; en PISA 2003 se definieron y emplearon cuatro tipos de situaciones: personal, educacional/profesional, pública y científica; (c) se optó por la organización fenomenológica de los contenidos matemáticos, en torno a cuatro ideas principales: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre; es decir, se describen los contenidos en función de los fenómenos y problemas para los que se han desarrollado; (d) las situaciones y los contenidos ayudan a plantear un problema, pero también a resolverlo mediante el proceso de matematización; (e) para resolver el problema, el estudiante pone en juego sus competencias matemáticas, las cuales están dadas por diversos procesos cognitivos.

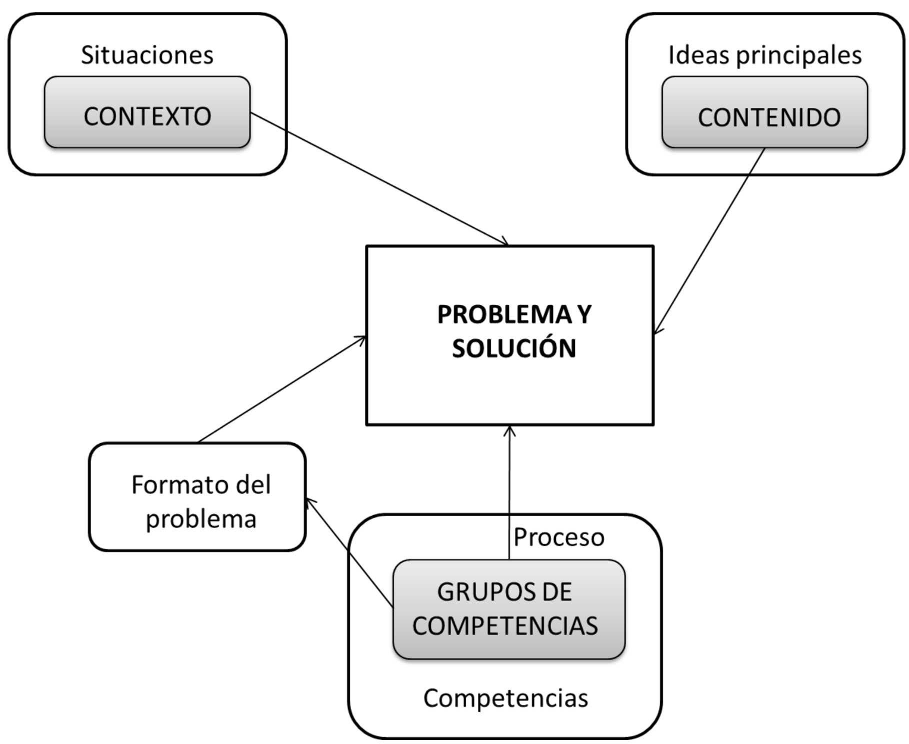


***Gráfico 6*. Elementos considerados para evaluar la competencia matemática en PISA 2003 (OCDE, 2004, p. 33).**

En PISA 2003, teniendo en cuenta los aportes del danés Mogen Niss, se identificaron y examinaron ocho competencias matemáticas: (a) pensar y razonar, (b) argumentación, (c) comunicación, (d) construcción de modelos, (e) formulación y resolución de problemas, (f) representación, (g) empleo de operaciones y de lenguaje simbólico, formal y técnico, y (h) empleo de soportes y herramientas. Además, se expresa que

> Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que al intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea difícil y una compartimentación innecesaria del área (OCDE, 2004, p. 42).

Además, teniendo en cuenta las exigencias cognitivas para resolver diferentes problemas matemáticos, en PISA 2003, se consideran tres grupos de competencia: el grupo de reproducción, el grupo de conexión y el grupo de reflexión. En el Cuadro 9, se presenta un resumen con algunos rasgos relevantes de cada uno de estos grupos de competencias matemáticas.

Cuadro 9
Grupos de competencias matemáticas según PISA 2003 (OCDE, 2004)

Grupo de reproducción	Grupo de conexión	Grupo de reflexión
"Las competencias de este grupo implican esencialmente a la reproducción del conocimiento estudiado" (p. 42).	"Las competencias del grupo de conexión se apoyan sobre las del grupo de reproducción, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares" (p. 44)	"Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema" (p. 46).
Dominio de definiciones y representaciones comunes	Empleo de conceptos matemáticos en contextos ligeramente distintos a los usuales	Empleo de conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos
Ejecución de procedimientos rutinarios	Combinación de distintos procedimientos conocidos en la resolución de problemas	Utilización de procedimientos que implican establecer conexiones entre distintas áreas de la Matemática y formas de representación
Aplicación de destrezas y algoritmos habituales	Capacidad para construir modelos matemáticos	Ejecución del proceso de matematización en todas sus etapas

Cuadro 9 (cont.)

Grupo de reproducción	Grupo de conexión	Grupo de reflexión
Manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas	Uso del lenguaje formal y simbólico en situaciones menos conocidas	Decodificación e interpretación del lenguaje simbólico y formal en situaciones y contextos desconocidos
Realización de cálculos aritméticos rutinarios	Realización de operaciones con expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones e inecuaciones.	Manejo de expresiones y afirmaciones complejas y su traducción entre el lenguaje simbólico y el lenguaje natural
Seguimiento y justificación de los cálculos aritméticos	Seguimiento del encadenamiento de argumentos matemáticos	Seguimiento, evaluación y elaboración de argumentos matemáticos

Cabe señalar que, al revisar los marcos teóricos empleados para la evaluación de la competencia matemática en PISA 2006 y 2009 (OCDE, 2006, 2009), se observó que se asumió el mismo marco empleado en la evaluación PISA 2003; es preciso señalar que en el 2006, se hizo hincapié en la evaluación de la competencia científica y, en el año 2009, en la competencia lectora. De manera que, en la edición del año 2012, se volvió a enfatizar en la evaluación de la competencia matemática y se introducen ciertas modificaciones en la fundamentación teórica, teniendo en cuenta los aportes de la investigación en Educación Matemática durante el período 2003 – 2012. Así, a los efectos de PISA 2012, la competencia matemática se define como sigue:

> es la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos matemáticos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Se ayuda a las personas a reconocer el papel que las matemáticas juegan en el mundo y para hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (OCDE, 2013, p. 25, traducción libre).

Seguidamente, en este documento, se realizan algunas observaciones explicativas para destacar y aclarar aspectos de la definición, tal como se hizo en PISA 2003. Para facilitar el seguimiento de las mismas, se introduce un modelo de competencia matemática en la práctica (ver Gráfico 7).

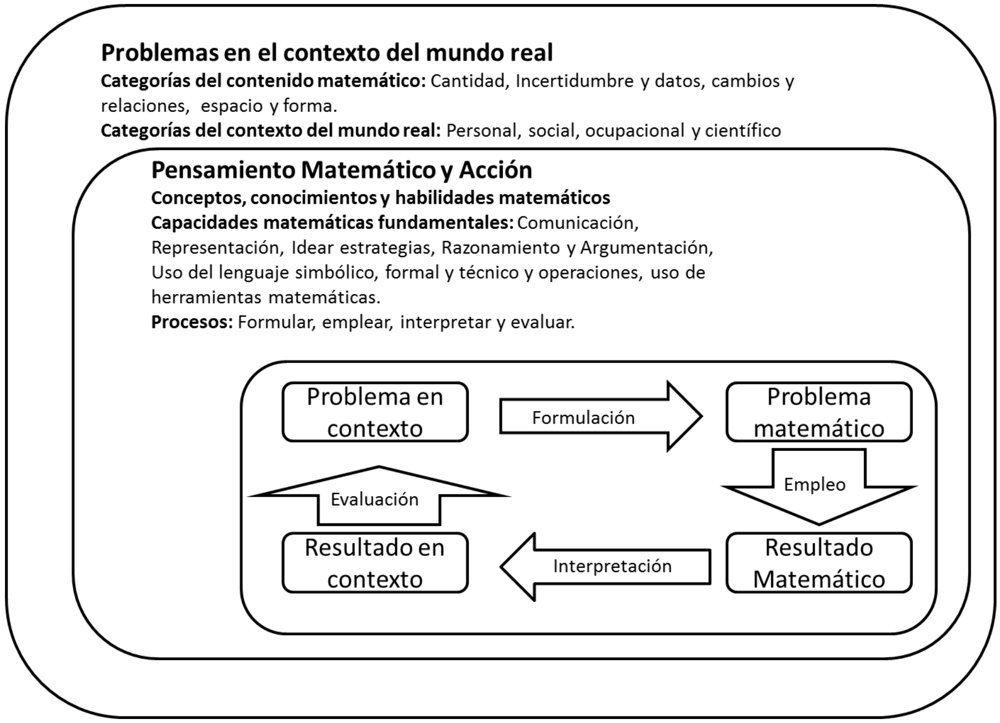


***Gráfico 7*. Un modelo de competencia matemática en la práctica (OCDE, 2013, p. 26, traducción libre)**

Esta definición se enfoca en la participación activa en tareas matemáticas, pretendiendo con ello abarcar el razonamiento y el uso de conceptos y procedimientos matemáticos, así como de datos y herramientas en la descripción, explicación y predicción de fenómenos. En ese sentido, la expresión "formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos" hace referencia a los tres procesos que un estudiante como resolutor de problemas tendrá que activar. En el Cuadro 10, se describen brevemente estos tres procesos cognitivos vinculados con el quehacer matemático.

De esta manera, en la definición de competencia matemática, se ha integrado la noción de modelización matemática, la cual ha estado presente en los marcos teóricos para su evaluación desde el año 2003, cuando se hacía referencia al proceso de matematización; es decir, cuando una persona usa los conceptos y las propiedades matemáticas para resolver problemas en contextos, su accionar avanza a través de una serie de etapas: formular, emplear, interpretar y evaluar las matemáticas en una variedad de contextos.

Cuadro 10
Procesos involucrados en el proceso de modelización matemática (OCDE, 2013)

Formulación Matemática	Implica la identificación de oportunidades para aplicar y utilizar los contenidos matemáticos en la resolución de problemas, lo cual exige transformar una situación del mundo real en un problema matemático; para lograrlo es preciso identificar la estructura matemática (en término de las llamadas ideas principales) y el sistema de representación conveniente para traducir el problema dado en un contexto extramatemático a un problema en un contexto intramatemático.
Empleo de las matemáticas	Implica aplicar el razonamiento matemático y el uso de conceptos matemáticos, procedimientos, datos y herramientas para derivar una solución matemática.
Interpretación matemática	Implica reflexionar sobre soluciones matemáticas o resultados y su interpretación en el contexto de un problema. Esto incluye la evaluación de las soluciones matemáticas o razonamientos en relación con el contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en la situación dada.

Como se muestra en el Gráfico 7, en el rectángulo más externo, la competencia matemática se lleva a cabo en el contexto de un problema que se plantea en el mundo real; el contexto puede ser de naturaleza personal, social, ocupacional y científica. Además, un problema se caracteriza por la naturaleza del fenómeno matemático subyacente: cantidad, incertidumbre y datos, cambio y relaciones, espacio y de forma.

Para resolver este tipo de problemas contextualizados, el resolutor debe aplicar sus conocimientos y destrezas, en función a las competencias matemáticas establecidas y en cada una de las etapas del proceso de modelización (ver el rectángulo intermedio del Gráfico 7). El proceso de modelización matemática se describe en el rectángulo más interno del gráfico 7 y representa una visión idealizada y simplificada de las etapas por las que el resolutor de problemas se moviliza, mientras exhibe sus competencias matemáticas.

Cabe señalar que en PISA 2012, se identifican siete competencias matemáticas, en vez de las ocho consideradas en las evaluaciones previas, ya que, se agruparon las competencias de pensar y razonar y argumentación en una sola; ahora denominada razonamiento y argumentación.

En el Cuadro 11, se establecen las relaciones existentes entre los procesos matemáticos asociados a la modelización matemática y las competencias matemáticas, según lo establecido por OCDE (2013).

En relación a la competencia de empleo de soportes y herramientas, cabe indicar que en las evaluaciones PISA se permite el uso de calculadoras aritméticas básicas, para efectuar los cálculos, tal como se hace en las clases de Matemática. Sin embargo, a partir de PISA 2012, se contemplaron dos componentes: uno obligatorio basado en pruebas de lápiz y papel y otro opcional basado en computadoras. En el primero, era suficiente con disponer de una calculadora básica, mientras que, en el segundo componente, además de la calculadora, los estudiantes tenían a su disposición otras herramientas tales como dispositivos virtuales de medición, parte de la funcionalidad básica de una hoja de cálculo, y diversas herramientas de representación y visualización gráfica.

Cuadro 11
Relaciones entre procesos y competencias matemáticas (OCDE, 2013, p. 32)

Competencias matemáticas	**Formulación Matemática**	**Empleo de las Matemáticas**	**Interpretación Matemática**
Comunicación	Leer, decodificar, y dar sentido a las declaraciones, preguntas, tareas, objetos, imágenes o animaciones (en la evaluación basada en computadora) con el fin de formar un modelo mental de la situación.	Articular una solución, mostrar el trabajo que implica llegar a una solución y / o resumir y presentar los resultados matemáticos intermedios.	Construir y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema.
Construcción de modelos o modelización	Identificar las variables matemáticas subyacentes y estructuras en el problema del mundo real, y hacer suposiciones para que puedan ser utilizados.	Utilizar una comprensión del contexto para guiar o acelerar el proceso de resolución matemática.	Comprender el alcance y los límites de una solución matemática que son consecuencia del modelo matemático empleado.

Cuadro 11 (cont.)

Representación	Crear una representación matemática de la información del mundo real.	Dar sentido a, relacionar y utilizar una variedad de representaciones en la interacción con un problema.	Interpretar los resultados de matemáticas en una variedad de formatos en relación con una situación o el uso; comparar o evaluar dos o más representaciones en relación con una situación.
Razonamiento y argumentación	Explicar, defender o justificar la representación identificada o inventada de una situación del mundo real.	Explicar, defender o justificar los procesos y procedimientos que se utilizan para determinar un resultado matemático o solución. Conectar piezas de información para llegar a una solución matemática, hacer generalizaciones o crear una cadena argumentativa.	Reflexionar sobre las soluciones matemáticas y crear explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o califiquen una solución matemática a un problema contextualizado.
Formulación y resolución de problemas	Seleccionar o diseñar un plan o estrategia para replantear matemáticamente problemas contextualizados.	Activar mecanismos eficaces y sostenidos de control a través de un procedimiento de múltiples pasos que conduce a una solución matemática, conclusión o generalización.	Diseñar e implementar una estrategia con el fin de interpretar, evaluar y validar una solución matemática a un problema contextualizado.

Cuadro 11 (cont.)

Empleo de operaciones y de lenguaje simbólico, formal y técnico	Utilizar variables adecuadas, símbolos, diagramas y modelos estándar con el fin de representar a un problema del mundo real utilizando un lenguaje simbólico / formal.	Comprender y utilizar las construcciones formales basadas en las definiciones, las normas y los sistemas formales, así como algoritmos que emplean.	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Utilizar este conocimiento para ayudar a interpretar la solución en su contexto y evaluar la viabilidad y las posibles limitaciones de la solución.
Empleo de soportes y herramientas	Utilizar herramientas matemáticas para reconocer estructuras matemáticas o para retratar las relaciones matemáticas.	Conocer y ser capaz de hacer un uso adecuado de las diversas herramientas que pueden ayudar en la implementación de procesos y procedimientos para la determinación de soluciones matemáticas.	Utilizar herramientas matemáticas para determinar la razonabilidad de una solución matemática y los límites y las limitaciones de esa solución, teniendo en cuenta el contexto del problema.

Asimismo, es necesario puntualizar que, desde PISA 2003, se han definido seis niveles empíricos en el desarrollo de las competencias matemáticas; en el Cuadro 12, se presentan las descripciones por niveles según PISA 2012. Está de más indicar que estos descriptores no ilustran por completo el nivel de desarrollo alcanzado por una persona en cuanto a sus competencias matemáticas, pero facilitan su evaluación cuando realiza ciertas tareas matemáticas; además, las descripciones han sido sustentadas en los resultados de las evaluaciones PISA hasta ahora realizadas.

Cuadro 12
Descripciones por niveles de la competencia matemática (OCDE, 2013, p. 41).

Nivel	Descripción
6	Los estudiantes pueden conceptualizar, generalizar y utilizar la información sobre la base de sus investigaciones y modelos de situaciones - problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y realizar traducciones flexiblemente entre ellas. Son capaces del pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar su discernimiento y comprensión junto con un dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias para atacar a situaciones nuevas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones en cuanto a sus resultados, interpretaciones, argumentos y la adecuación de éstos a las situaciones originales.
5	Los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos de situaciones complejas, identificar las limitaciones, especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar las estrategias de resolución de problemas apropiadas para hacer frente a problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden trabajar estratégicamente utilizando ampliamente, el pensamiento bien desarrollado y las habilidades de razonamiento, las representaciones apropiadas, caracterizaciones simbólicas y formales y conocimientos relacionados con estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	Los estudiantes pueden trabajar eficazmente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas que pudieran implicar restricciones o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, vinculándolas directamente a los aspectos de situaciones del mundo real. Pueden utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar flexiblemente, con una idea, en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

Cuadro 12 (cont.)

Nivel	Descripción
3	Los estudiantes pueden ejecutar procedimientos claramente descritos, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias para resolver problemas sencillos. Los estudiantes de este nivel pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente sobre ellos. Pueden desarrollar comunicaciones cortas al informar sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	Los estudiantes puedan interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un único modo de representación. Pueden emplear algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones. Son capaces de un razonamiento directo y de hacer interpretaciones literales de los resultados.
1	Los estudiantes pueden responder a preguntas que implican contextos familiares donde toda la información relevante está presente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo los procedimientos de rutina de acuerdo a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deduce directamente de los estímulos dados.

En este sentido, Rico Romero y Lupiánez Gómez (2008, pp. 269 y 270) expresan que

> Cada nivel de competencia se caracteriza por los procesos empleados y por el grado de complejidad con que los alumnos los ejecutan al abordar tareas de dificultad creciente. De este modo es posible entender cada nivel de competencia matemática en relación con la maestría con que el alumno lleva a cabo las tareas matemáticas propuestas, es decir, muestra su competencia matemática.

Además de estos seis niveles empíricos empleados para evaluar y describir las competencias matemáticas puestas en práctica por los estudiantes participantes en la evaluación PISA, se toman en cuenta los tres procesos matemáticos antes mencionados, el empleo de conceptos, propiedades, procedimientos y razonamientos matemáticos asociados a las categorías del contenido matemático (ideas principales) y la interpretación, aplicación y evaluación de los resultados matemáticos (OCDE, 2013).

Las capacidades o habilidades asociadas a cada una de las competencias matemáticas ayudan a rastrear cómo ha ido evolucionando, por ejemplo, la capacidad de razonamiento y argumentación de un estudiante, a partir del abordaje de una tarea matemática como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 13
Capacidades o habilidades matemáticas asociadas a la competencia de razonamiento y argumentación (OCDE, 2004)

Nivel	Capacidades o habilidades matemáticas
1	Seguir instrucciones directas y realizar acciones evidentes.
2	Utilizar razonamientos directos e interpretaciones literales.
3	Tomar decisiones secuenciales, interpretar y razonar partiendo de distintas fuentes de información.
4	Utilizar razonamientos flexibles y algo de perspicacia.
5	Utilizar destrezas de pensamiento y de razonamiento muy desarrollados.
6	Utilizar pensamientos y razonamientos matemáticos muy avanzados.

Cabe señalar que Niss y Højgaard (2011), directores del Proyecto sobre Competencias y Aprendizaje Matemático (conocido como Proyecto KOM) en Dinamarca e investigadores participantes en la evaluación PISA, consideran que las ocho competencias matemáticas están conectadas o relacionadas entre sí, pero cada una tiene su propia identidad y, por ello, las organizan en dos grupos de competencias (que pudieran constituir dos “super” competencias):

1. *La capacidad de formular y responder preguntas sobre y por medio de las matemáticas* es la capacidad de (a) plantear tales preguntas y estar al tanto de los tipos de respuestas disponibles (competencia para el pensamiento matemático), (b) responder a estas preguntas en y por medio de los matemáticas (competencias para resolver problemas y modelación), así como (c) la capacidad de comprender, valorar y producir argumentos para resolver cuestiones matemáticas (competencias de razonamiento).

2. *El ser capaz de hacer frente con el lenguaje y las herramientas matemáticas* implica (a) ser capaz de tratar con diferentes representaciones de entidades, fenómenos y situaciones matemáticas (competencia de representación), (b) ser capaz

de hacer frente a las representaciones simbólicas y fórmulas especiales matemáticas (competencia de simbolización y formalismo), (c) ser capaz de comunicarse en, con y sobre las matemáticas (competencias comunicativas), así como (d) ser capaz de hacer uso y referirse a la diversidad de ayudas técnicas para la actividad matemática (competencia de ayudas y herramientas).

Por lo antes mencionado, las competencias profesionales específicas del profesor de Matemática estarían asociadas a los dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Hilll et. al., 2008): el conocimiento del contenido matemático (CCM) y el conocimiento didáctico del contenido matemático (CDCM).

Al respecto, Niss y Højgaard (2011) señalan que un buen profesor de Matemática debe poseer una gama de competencias matemáticas y didácticas específicas; así, en cuanto a las competencias didácticas, estos autores mencionan las siguientes:

1. *Competencia curricular:* Está dada por la capacidad de analizar y evaluar diversos documentos curriculares (incluyendo los programas de estudio y los libros de texto) relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y, a partir de ello, elaborar planes de clases que contribuyan al logro de los fines formativos propios del nivel o modalidad educativa.

2. *Competencia de enseñanza*: Teniendo en cuenta las razones que justifican la enseñanza de la Matemática en los distintos niveles educativos, los fines que se persiguen y el alcance de los programas de estudio, así como los rasgos relevantes de sus estudiantes, se aspira que el profesor sea capaz de planificar y llevar a cabo secuencias didácticas concretas con diferentes objetivos; esto implica, por un lado, el diseño o la selección de tareas que motiven a los estudiantes a involucrarse en actividades propias del quehacer matemático y, por otro, la elaboración o la escogencia de materiales y recursos didácticos que favorezcan el aprendizaje de un tema matemático.

3. *Competencias de revelar e interpretar el aprendizaje*: Dado que el aprendizaje, la comprensión y el dominio individual de las matemáticas se expresa en situaciones concretas, se requiere que el profesor sea capaz de revelar e interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes y el dominio de competencias

matemáticas, así como sus concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas y, además, sea capaz de identificar el desarrollo de las mismas en el tiempo.

4. *Competencias de evaluación*: Esta competencia abarca la capacidad para seleccionar o diseñar instrumentos que permitan revelar y evaluar – en forma continua - el rendimiento y las competencias matemáticas de un grupo de estudiantes; así como la capacidad para analizar críticamente los resultados alcanzados a través de la utilización de tales instrumentos y, además, el ser capaz de comunicarse con los estudiantes sobre las observaciones e interpretaciones hechas, y luego ayudarles a corregir, mejorar o desarrollar sus competencias matemáticas.

5. *Competencias de cooperación*: Esta competencia comprende, en primer lugar, el ser capaz de cooperar con colegas y otras personas respecto a la enseñanza de la Matemática y sus relaciones con otras disciplinas; y, en segundo lugar, la competencia incluye la posibilidad de cooperar con los padres y representantes de los estudiantes y las autoridades educativas acerca de las condiciones de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

6. *Competencia de desarrollo profesional:* Esta competencia incluye la posibilidad de desarrollar otras competencias como profesor de Matemática, ya que, se trata de ser capaz de organizar o participar en actividades que pudieran contribuir al desarrollo de las competencias matemáticas y didácticas, teniendo en cuenta las condiciones reinantes. Para ello se requiere el desarrollo del pensamiento reflexivo en y sobre la práctica docente, con el propósito de identificar necesidades formativas e intereses profesionales en torno a las cuales seleccionar u organizar las actividades como la participación en grupos de estudio y proyectos de investigación, teniendo en cuenta los aportes de la investigación en Educación Matemática.

Asimismo, en relación con las competencias matemáticas de un profesor de Matemática, Niss y Højgaard (2011) parten del supuesto que éstas tienen que incluir las competencias que se aspira desarrollen y pongan en práctica los estudiantes, pero adicionando ciertas capacidades propias del quehacer docente; es decir, es necesario realizar una descripción didáctica de las competencias matemáticas que debe alcanzar un profesor de Matemática. En el Cuadro 14, se presenta una descripción didáctica no exhaustiva de las competencias matemáticas que conforman el grupo 1 (ser capaz de formular y responder preguntas sobre y por medio de las matemáticas); está de más señalar que se asume que el profesor de Matemática debe poseer las capacidades matemáticas asociadas a cada una de estas competencias, las cuales han sido mencionadas en los Cuadros 11 y 12.

Cuadro 14
Descripción didáctica de las competencias matemáticas de un profesor de Matemática / Grupo 1 (Niss y Højgaard, 2011)

Competencia matemática	Capacidades o habilidades asociadas
Pensamiento Matemático	• Tener una comprensión básica sobre los tipos de preguntas y respuestas que pertenecen específicamente a la Matemática como asignatura para una determinada etapa educativa. • Tener una idea de los tipos de respuestas que se pueden esperar de los estudiantes según la etapa educativa, en función a las preguntas realizadas. • Ser capaz de ayudar a los estudiantes a realizar abstracciones conceptuales, a partir del estudio de casos particulares. • Ser capaz de reconocer, entender y hacer frente a los alcances y limitaciones de los conceptos matemáticos dados, así como su abstracción. • Ser capaz de determinar cuando las condiciones existentes son necesarias y / o suficientes para que un objeto tenga una cierta propiedad y, además, ser capaz de reconocer si un estudiante comprende tales condiciones cuando nombra a un objeto matemático o habla de sus propiedades.
Planteamiento y resolución de problemas	• Ser capaz de plantear y formular problemas y preguntas que pueden conducir a las actividades de resolución de problemas entre los estudiantes. • Ser capaz de señalar, seleccionar, formular y definir una variedad de problemas que matemáticamente puedan, en relación con los diferentes grupos de alumnos, dar lugar a tal actividad. • Ser capaz de establecer diferentes estrategias para hacer frente al problema planteado y para ayudar a los estudiantes a acercarse a éste mediante una gama de puntos de vista diferentes, en función de sus antecedentes intelectuales, socio- económicos y culturales. • Ser capaz de plantear y tratar un problema de diversas maneras, teniendo en cuenta el alcance del contenido y contexto matemático involucrado.

Cuadro 14 (cont.)

Competencia matemática	Capacidades o habilidades asociadas
Modelización Matemática	• Iniciar y guiar el trabajo de los estudiantes tanto con los modelos establecidos, así como con el modelado activo de situaciones simples. • Ser capaz de analizar y evaluar las aplicaciones de las matemáticas en relación a los problemas y situaciones en el mundo circundante. • Propiciar entre los estudiantes la creación y el reconocimiento de las relaciones existentes entre el modelo existente y sus elementos y de éstos con las situaciones y contextos considerados. • Dominar las fases propias del proceso de modelización matemática, teniendo en cuenta el propósito de cada uno de ellas y la manera de alcanzarlo.
Razonamiento Matemático	• Ser capaz de trascender sus propios argumentos, con la intención de seguir, caracterizar, comentar y evaluar el razonamiento de los estudiantes y, además, ayudarles a desarrollar su propia capacidad de razonamiento matemático. • Ser capaz de distinguir entre el momento en que una afirmación tiene la naturaleza de una prueba, y cuando es "simplemente" una buena explicación o ilustración, siendo además capaz de ayudar a los estudiantes a realizar esta distinción. • Enfocar y explicar las ideas básicas de las pruebas sin tener necesariamente todos los detalles en cuenta; es decir, ser capaz de revelar las ideas básicas y controlar el grado en el que la parte más técnica de la prueba deba ser incluida en un contexto de enseñanza concreta. • Ayudar a los estudiantes a comprender y adoptar una postura acerca de cuándo una demostración sugerida es correcta y completarla de acuerdo a los criterios dados. • Manejar el uso de contraejemplos, para rebatir ciertas conjeturas. • Señalar errores en el razonamiento efectuado por los estudiantes cuando tratan de justificar sus afirmaciones. • Ayudar a los estudiantes a distinguir entre los atributos relevantes de un objeto matemático y de aquellos que pudieran establecerse a partir de una forma particular de representarlos.

No es suficiente que un profesor sea matemáticamente competente, es necesario que ponga en juego el conocimiento didáctico del contenido matemático al momento de diseñar, gestionar y evaluar situaciones de enseñanza y aprendizaje, teniendo en mente la necesidad que sus estudiantes progresivamente desarrollen y practiquen competencias matemáticas según las exigencias propias del nivel o modalidad educativa; es decir, es necesario que el profesor también sea didácticamente competente.

En el Cuadro 15, se presenta una descripción didáctica de las competencias matemáticas que conforman el grupo 2 (ser capaz de hacer frente con el lenguaje y las herramientas matemáticas).

Cuadro 15
Descripción didáctica de las competencias matemáticas de un profesor de Matemática / Grupo 2 (Niss y Højgaard, 2011)

Competencia matemática	Capacidades que la caracterizan
Representación	• Conocer y poder hacer uso de un amplio espectro de representaciones matemáticas, y que puedan relacionarse y contribuir al desarrollo de los estudiantes en el uso de tales representaciones. • Ser capaz de juzgar las fortalezas y debilidades de la representación. • Ser capaz de establecer prioridades entre diversas formas de representación de un objeto matemático, en un contexto de enseñanza específico. • Ayudar a los estudiantes a establecer vínculos entre las diversas formas de representación de un objeto matemático.
Simbolización y Formalismo	• Ser capaz de, a través de sus propias descripciones, explicaciones, ejemplos y ejemplos concretos, así como mediante la creación de situaciones para que los estudiantes trabajen con las declaraciones simbólicas más o menos abstractas. • Ser competente en la decodificación del símbolo y lenguaje formal. • Ser capaz de traducir ida y vuelta entre el lenguaje matemático simbólico y el lenguaje natural, y ser capaz de estimular la traducción correspondiente entre los estudiantes. • Dominar la naturaleza de las reglas de los sistemas matemáticos formales. • Hacerle entender a sus estudiantes que, a excepción de unos pocos símbolos fijos, el nombramiento simbólico de las entidades matemáticas es completamente arbitrario con tal de que diferentes entidades no se llamen de la misma manera. • Propiciar la aceptación de una serie de convenciones matemáticas. • Ser capaz de ayudar a los estudiantes a lograr un correcto y apropiado uso de tales símbolos. • Ayudar a los estudiantes a lidiar con matemática formal.

Cuadro 15 (cont.)

Competencia matemática	Capacidades que la caracterizan
Comunicación	• Ser capaz de establecer un diálogo sobre temas matemáticos con los estudiantes. • Ser capaz de comprender e interpretar las expresiones escritas y orales de los estudiantes. • Ser capaz de relacionarse con las diferentes formas de comunicación que tienen los estudiantes entre sí. • Ser capaz de expresarse sobre asuntos matemáticos en variadas maneras, teniendo en cuenta el nivel educativo y las circunstancias propias de una situación de enseñanza. • Ayudar a los estudiantes a desarrollar y ampliar su competencia comunicativa mediante la elaboración de diferentes formas de expresión en torno a un objeto matemático. • Ser capaz de evaluar la presentación y calidad comunicativa de los temas matemáticos en una variedad de materiales de enseñanza, sobre todo en los libros de texto. • Pueda comunicarse de manera flexible con sus colegas, así como con los padres y representantes sobre perspectivas, formulaciones de problemas, contenidos y métodos de enseñanza de la Matemática.
Ayudas y Herramientas	• Fomentar en los estudiantes la competencia en el tratamiento de ayudas y herramientas matemáticas apropiadas. • Conocer y utilizar diversas ayudas y herramientas que sean accesibles para las actividades matemáticas en el nivel que enseñan; actividades tales como desarrollo de conceptos, estudio de relaciones y patrones, examen de conjeturas, etc. • Conocer las implicaciones del uso de las calculadoras en el aprendizaje de la matemática. • Utilizar programas computarizados para crear nuevas formas de trabajar con conceptos y propiedades matemáticas. • Reconocer las ventajas y las limitaciones de los diversos programas computarizados como hojas de cálculo, software de cálculo simbólico, de geometría dinámica, simuladores, paquetes estadísticos, etc. • Juzgar la utilidad de estas herramientas matemáticas en función a los objetivos de aprendizaje previstos. • Ser capaz de visualizar matemáticamente objetos, fenómenos y situaciones tanto estática como dinámicamente con la ayuda de sistemas informáticos.

Cabe señalar que, en cuanto al uso de ayudas y herramientas matemáticas, esto incluye materiales y recursos de diversa índole como regla, escuadras, transportador y compás; plantillas geométricas, papel para plegar, papel cuadriculado o milimetrado, calculadoras con diferentes utilidades (básicas, científicas y graficadoras), software de cálculo simbólico, software de geometría dinámica, paquetes para el tratamiento de datos y la investigación estadística, etc.; es decir, en la actualidad, la existencia de útiles recursos informáticos, no implica que materiales y recursos manipulables sean desechados por los profesores al momento de planificar y gestionar las clases de Matemática.

Asimismo, los profesores deben ser usuarios idóneos de estos recursos y, de ser posible, haber experimentado su utilidad durante su proceso de formación matemática y didáctica; en otras palabras, la capacidad para juzgar la utilidad de un SGD en la elaboración y exploración de construcciones geométricas se desarrollaría a partir de la realización de tareas matemáticas que exijan a los profesores – durante su formación inicial - el desarrollo y la puesta en práctica de sus conocimientos y competencias matemáticas y didácticas.

Más adelante, se retomará el tema de las competencias profesionales de un profesor de Matemática, relacionándolas con la noción de análisis didáctico y las tareas propuestas a los participantes en el curso de RPG_AC.

Modelos formativos

El proceso de formación inicial de profesores de Matemática abarca dos dimensiones: *el conocimiento necesario para enseñarla* (Azcárate, 1998; Cardeñoso et. al., 2001; Shulman, 2005; Grossman et. al., 2005; Ball et. al., 2008; Hill et. al., 2008) y *el proceso de aprender a enseñarla* (Contreras y Blanco, 2002; García y Sánchez, 2002; Gómez y Rico, 2002 y Flores Martínez, 1998).

Dado que anteriormente se desarrolló lo relacionado con los modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática, en este apartado se enfatizará en su proceso formativo, el cual se asume desde la perspectiva del *aprendizaje situado*, ya que, se considera que los estudiantes para profesores aprenden a enseñar Matemática a través de la observación y de la práctica, mediante procesos de reflexión en y sobre la acción.

En este sentido, Contreras y Blanco (2002) precisan que “el proceso de aprender a enseñar tiene lugar a partir de procesos activos que se desarrollan en un contexto específico caracterizado por tiempo, lugar y los protagonistas" (p. 14); además, ellos asumen que

> los profesores en formación dotan de significado a toda su acción tomando como referencia su experiencia escolar previa, que les ha llevado a unos conocimientos y concepciones fuertemente asentadas sobre las Matemáticas, sobre su enseñanza / aprendizaje y sobre el ejercicio de la profesión de profesores de Matemáticas (p. 14).

Y, dado que los profesores en formación, por lo general, no poseen suficientes conocimientos y habilidades para aprender efectivamente de sus experiencias y observaciones de clase, Contreras y Blanco consideran que "es necesario la intervención diferenciada de la Didáctica de la Matemática durante las prácticas de enseñanza en el proceso de aprender a enseñar" (p. 15). Por ello, estos autores destacan que es necesario que los programas de formación docente se basen en las nuevas orientaciones curriculares y en los resultados de las investigaciones sobre formación de profesores en el ámbito de la Educación Matemática.

Por lo tanto, desde la perspectiva del aprendizaje situado, los formadores de profesores de Matemática han de tener en cuenta que "todo proceso cognitivo ocurre a través de prácticas sociales ubicadas en un determinado contexto social y simbólico, en donde diferentes personas intervienen de manera directa o indirecta" (Sagástegui, 2004, p. 32); en otras palabras, el aprender a enseñar sería favorecido mediante, por una parte, la participación de los profesores en formación en actividades que tiendan a estar próximas al quehacer cotidiano de los profesores de Matemática y, por otra, por la reflexión en y sobre su acción; reflexión guiada por los aportes teóricos y metodológicos provenientes de la investigación en Educación Matemática. Al respecto, Sagástegui plantea que

> El aprendizaje situado exige en la escuela una actividad creativa de interpretación del mundo; requiere que los estudiantes operen en situaciones "reales" y "auténticas" semejando las formas de aprendizaje que se producen en la vida cotidiana, en donde los sujetos se encuentran inmersos en el marco de sentido de una cultura, interactuando con otros agentes humanos y con agentes no humanos – incluidos los frutos del conocimiento socialmente producidos, tales como lenguajes, teorías, esquemas, mapas, artefactos técnicos, etcétera (p. 33).

Destacándose así la necesidad de diseñar situaciones de aprendizaje que propicien la participación de los profesores en formación en prácticas sociales propias de la comunidad docente; al respecto Brown, Collins y Duguid (1989) establecen que

> La actividad, en la que se desarrolla y despliega el conocimiento, no puede separarse del aprendizaje ni la cognición, ni reviste un carácter auxiliar. Tampoco es neutral, sino que forma parte de lo aprendido. Podemos decir que las situaciones coproducen el conocimiento a través de la actividad (p. 32)

Por ende, para Brown et al. "los métodos de aprendizaje encuadrados en situaciones auténticas no sólo son útiles, sino esenciales" (p. 37). En este orden de ideas, Niss y Højgaard (2011, p. 91) expresan que:

> En relación con la profesión de profesor de matemáticas, independientemente de la etapa educativa, las competencias tienen que, primero y ante todo, expresarse en contextos y situaciones que en realidad tienen, o podría llegar a tener, aplicabilidad en relación con la enseñanza de las matemáticas.

Por ello, en el ámbito de la formación de profesores de Matemática y desde la perspectiva del aprendizaje situado, se han planteado ciertas propuestas como las presentadas por el grupo de la SEIEM sobre Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor y entre las cuales destacan las siguientes:

Desde una perspectiva sociológica y teniendo en cuentas cuestiones afectivas, Gómez-Chacón (2002), asume *la clase de Matemática como un escenario*, donde los actores (profesor y estudiantes) actúan en torno al quehacer matemático; por esto, al referirse a un escenario, Gómez-Chacón dice que "es hablar más bien de lo que hace que una escena se organiza, y muy especialmente, hablar de lo que se está poniendo en juego en un ámbito y en un tiempo concreto, con unos recursos determinados" (p. 25). En otras palabras, en un escenario de enseñanza y aprendizaje de la Matemática es preciso tener en consideración las razones que lo justifican y los fines que se persiguen con las situaciones que se diseñen, incluyendo los conocimientos y competencias que se pretenden los estudiantes pongan en práctica, haciendo uso eficiente de los materiales y recursos disponibles en el aula.

García y Sánchez (2002), desde la perspectiva del aprendizaje situado, señalan que los programas de formación inicial de los profesores de Matemática deben crear los medios para capacitar al estudiante para profesor para integrarse en sus comunidades de prácticas; en este sentido proponen que los estudiantes participen en comunidades de aprendizaje, "caracterizadas a través de *entornos de aprendizaje* definidos por los siguientes elementos: tareas relevantes, participación activa en el contexto, trabajo en grupo, consideración del conocimiento y creencias previos y explicitación de los procesos de razonamiento" (p. 74).

En relación con el papel que juegan *las tareas didáctico – matemáticas* en la formación inicial de los profesores, Blanco y Contreras (2002) plantean que estas tareas deberían permitir

> analizar y cuestionar los conocimientos y concepciones de los maestros en formación sobre Matemáticas y sobre su aprendizaje y enseñanza y en las que tengan la oportunidad de analizar y mejorar su actuación como maestros, construyendo así su conocimiento didáctico del contenido matemático (p. 103)

En este sentido, Blanco y Contreras identifican tres tipos de tareas: (a) *Actividades matemáticas* (centradas en la generación y desarrollo de los conceptos, propiedades y procesos matemáticos), (b) *Actividades sobre el currículo escolar y/o relacionadas con teorías sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas* (procurando situarlas en algunos de los momentos que caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática escolar), y (c) *Tareas didácticas contextualizadas y personalizadas* (análisis de sucesos específicos que tienen lugar en las clases de Matemática). Nótese que estas tareas están vinculadas con los dominios del conocimiento profesional del profesor de Matemática y las competencias matemáticas y didácticas que él tendría que poner en práctica al realizarlas.

Por su parte, Cardeñoso y Azcárate (2002) proponen una estrategia de formación de profesores de Matemática basada en los ya mencionados *ámbitos de investigación profesional* (AIP), asumiendo al docente como un resolutor de problemas reales del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Por lo antes mencionado, la autora – en su rol de diseñadora y facilitadora del curso de RPG_AC – lo ha visualizado como un *escenario* para la investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, en el contexto de la formación inicial de profesores de Matemática, dónde se procura mediante el planteamiento de *tareas didáctico – matemáticas,* orientadas a la resolución de problemas geométricos (haciendo uso de un SGD) y al diseño de una unidad didáctica con contenidos geométricos (basándose en referentes teóricos propios del campo de la Educación Matemática), abordar la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría escolar (entendida ésta como un *AIP*).

La Investigación en y sobre Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría

En 1992, por iniciativa de Miguel de Guzmán, en la sesión de cierre del 7mo ICME celebrado en Quebec (Canadá), el comité ejecutivo del ICMI convocó un estudio sobre la enseñanza de la Geometría; así, en 1994, se publicó el documento de discusión para un estudio ICMI denominado *Perspectivas sobre la Enseñanza de la Geometría para el siglo XXI* (Mammana y Villani, 1994); en dicho documento se plantearon ciertas preguntas clave, relacionadas con:

1. *Razones que justifican su enseñanza*: ¿Por qué es aconsejable y/o necesaria la enseñanza de la Geometría?
2. *Fines que se persiguen*: ¿Cuáles pueden ser considerados como los propósitos más relevantes de la enseñanza de la Geometría?
3. *Contenidos a ser estudiados*: ¿Qué se debería enseñar?
4. *Estrategias, materiales y recursos didácticos*: ¿Cómo debiéramos enseñar Geometría? ¿Son los libros de texto tradicionales tan apropiados como quisiéramos que fueran para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría?
5. *Evaluación*: ¿Cómo deberíamos establecer los objetivos y propósitos y cómo debiéramos construir nuestras técnicas de evaluación de manera consistente con estos objetivos y propósitos? ¿Existen aspectos de la evaluación peculiares de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría?

6. *Formación docente*: ¿Qué preparación específica (y realmente alcanzable) se requiere para los profesores de Matemática en el área de Geometría?

7. *Innovación educativa*: ¿Cómo es entonces posible motivar la necesidad de cambios en la perspectiva de enseñanza de la Geometría (tanto del punto de vista de los contenidos como el metodológico)? ¿Cuáles recursos para la enseñanza (libros, videos, software, etc.) debieran estar disponibles para la capacitación de profesores en servicio, con el fin de favorecer una aproximación flexible y de amplio criterio para la enseñanza de la Geometría?

Seguidamente, en respuesta a dicha convocatoria, del 27 de septiembre al 2 de octubre de 1995, se reunieron en Catania (Italia) 72 participantes provenientes de 33 países, con el propósito de dar a conocer y discutir sus contribuciones al desarrollo del mencionado estudio. Una vez finalizada la Conferencia de Catania, se procedió a trabajar en la edición de la correspondiente publicación (Mammana y Villani, 1998), en la cual se trataron los siguientes asuntos: (a) Geometría: Pasado y Futuro; (b) Razonamiento en Geometría; (c) Geometría en nuestro mundo; (d) Tecnología computacional y enseñanza de la Geometría; (e) Geometría en el aula; (f) Evolución de la enseñanza de la Geometría a partir de 1900; (g) Cambios y tendencias en los programas de estudio de Geometría; (h) Evaluación en Geometría, (i) Cualificación docente y la educación de los profesores; (j) El camino por delante. Sin lugar a dudas, este estudio ICMI ha guiado la investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría durante la primera década del Siglo XXI, tal como se mencionó en el Capítulo I (El Problema).

En este orden de ideas, Iglesias (2007) abordó la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, con énfasis en asuntos cognitivos y didácticos, tales como: (a) la acepción del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría; (b) el uso de los llamados software de Geometría Dinámica en las clases de Matemática, (c) la demostración en Geometría, y (d) el diseño y desarrollo de unidades didácticas con contenidos geométricos sustentadas en un proceso de investigación en Educación Matemática. Cada uno de estos asuntos será ampliado en los siguientes apartados.

El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele

En el ámbito de las investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, el *Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele* ha sido aceptado como soporte conceptual de estas investigaciones (Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Hershkowitz, 1990; Jaime y Gutiérrez, 1990; Clements y Battista, 1992; Corberán, 1994; Alsina Catalá, Fortuny Aymemí y Pérez Gómez, 1997; Jaime, 1998; Gutiérrez, 2000; De Villiers, 2010; Sarasua, Ruiz de Gauna y Arrieta, 2013; Aravena Díaz y Caamaño Espinoza, 2013). Al respecto, Gutiérrez y Jaime (2012), al reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, expresan que "el modelo de razonamiento de Van Hiele es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes" (p. 56).

Cabe señalar que estas investigaciones han estado básicamente dirigidas a: (a) Diagnosticar el nivel de razonamiento geométrico alcanzado por los estudiantes antes o después del estudio de un cierto tema geométrico (Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Jaime, 1993, Sarasua, Ruiz de Gauna y Arrieta, 2013; Aravena Díaz y Caamaño Espinoza, 2013); (b) Diseñar y desarrollar una unidad didáctica con contenidos geométricos (Jaime y Gutiérrez, 1990; Corberán, 1994); y (c) Analizar los conocimientos y las habilidades geométricas que los estudiantes ponen en práctica cuando realizan tareas que involucran contenidos geométricos (Jaime, 1993; Corberán, 1994).

Por ello, en el marco de la línea de investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría coordinada por la autora de esta tesis, se han venido realizando trabajos de grado de maestría que asumen entre sus referentes teóricos al modelo de Van Hiele y que han permitido identificar los conocimientos y habilidades geométricas puestas en práctica por estudiantes de educación media antes o después del estudio de ciertos temas como triángulos (Sánchez, 2008), círculo y circunferencia (Pérez, 2008), transformaciones en el plano (Moreno, 2006) y teorema de Pitágoras (Linares, 2008), así como diseñar y ejecutar unidades didácticas organizadas en torno a las fases de aprendizaje propuestas en este modelo. También se han realizado trabajos en el ámbito de la formación docente en Geometría y su Didáctica, como los desarrollados por García (2009), Pérez (2010), Galvis (2010), Báez (2010) y Sánchez e Iglesias (2012). Asimismo, el modelo ha permitido analizar las actividades propuestas en los libros de texto más usados por los maestros de 4º, 5º y 6º grado de educación primaria en relación con la Geometría de los Cuadriláteros (Aguilar e Iglesias, 2013).

Dicho modelo fue presentado, a finales de la década de los 50, en los Países Bajos, por dos profesores de Matemática, Pierre Van Hiele y Dieke Van Hiele – Geldof (Van Hiele, 1957; Van Hiele, 1959). Ellos - a partir de sus propias experiencias - establecieron que, en el aprendizaje de la Geometría, los estudiantes avanzan a través de una sucesión de cinco niveles de razonamiento, los cuales se describen a continuación, atendiendo a lo señalado por Jaime y Gutiérrez (1990), Jaime (1993), Corberán (1994), Alsina Catalá, Fortuny Aymemí y Pérez Gómez (1997):

Nivel 1 (Reconocimiento): El estudiante reconoce las figuras geométricas por su apariencia y de forma global; es decir, sin llegar a identificar sus partes componentes. En este nivel, el estudiante ignora ciertas características pertinentes de la figura, mientras enfatiza algunas características no pertinentes como lo puede ser la posición ocupada por una figura en un plano. Así, un cuadrado mostrado con los lados paralelos a los bordes del pizarrón deja de ser reconocido como tal si es cambiado de posición.

Nivel 2 (Análisis): El estudiante analiza las partes componentes de una figura geométrica tales como lados y ángulos internos. Así, pues, descubre, en forma experimental, relaciones entre las partes componentes de una figura o entre objetos geométricos; reconoce las características relevantes de una figura y las diferencia de las características irrelevantes; sabe que cambiar una figura de posición a otra no afecta a sus atributos relevantes; no acepta que una figura puede pertenecer a varias clases generales y tenga varios nombres, así una proposición como la siguiente no es comprendida: "Todo cuadrado es un rombo"; no puede establecer relaciones mediante deducciones lógicas, ni hacer demostraciones formales.

Nivel 3 (Relaciones, Clasificación u Ordenamiento): El estudiante establece relaciones lógicas y sigue razonamientos deductivos sencillos, a partir de las propiedades descubiertas en el nivel 2. Sin embargo, en este nivel, el estudiante aún no comprende el funcionamiento de los sistemas axiomáticos en la validación del conocimiento geométrico.

Nivel 4 (Deducción): El estudiante que razone a este nivel entiende el significado de los axiomas o postulados y es capaz de seguir y realizar razonamientos deductivos y demostraciones formales de los teoremas.

Nivel 5 (Comparación de Sistemas Axiomáticos o Rigor Lógico): En este nivel, el estudio de la Geometría es elevadamente abstracto y no incluye necesariamente el estudio de modelos concretos o pictóricos. Aquí, el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza rigurosamente tales sistemas.

Cabe indicar que en las investigaciones revisadas suele trabajarse sólo con los primeros cuatro niveles de razonamiento geométrico, posiblemente porque en el ámbito educativo sea difícil que un estudiante requiera manejar distintos sistemas axiomáticos y quizá, por ello, en la literatura la descripción del nivel 5 esté escasamente apoyada en investigaciones empíricas; al respecto, Sarasua et. al. (2013) expresan que en la práctica se consideran cuatro niveles de razonamiento, ya que, el quinto sólo se ha formulado teóricamente, lo cual es un planteamiento expresado por Usiskin (1982) y Jaime (1993).

Además, para la comprensión de este modelo, se han establecido las siguientes premisas:

1. Los estudiantes no pueden llegar a un nivel si no alcanzan primero a los niveles anteriores.

2. El paso de un nivel a otro no se da automáticamente con el cambio de edad, sino que el mismo está asociado al tipo de enseñanza recibida por el estudiante. Además, el paso de un nivel a otro no se da en forma brusca (como inicialmente se

pensaba), sino de forma progresiva y continua; de manera tal que las habilidades geométricas implícitas en un nivel n, se hacen explícitas en el nivel n + 1.

3. Cada nivel tiene sus propios signos lingüísticos y su propia red de relaciones para conectar estos símbolos.

4. Dos personas que razonan a diferentes niveles no pueden entenderse entre sí. En otras palabras, si los estudiantes están en un nivel y la instrucción está en un nivel diferente, entonces el aprendizaje deseado y el progreso a través de estos niveles de razonamiento geométrico por parte de los estudiantes no pueden ocurrir.

5. Un estudiante puede razonar según lo descrito en los diferentes niveles en función de los temas tratados o las tareas propuestas.

Además, en el modelo de Van Hiele se propone que cualquier estrategia didáctica orientada a propiciar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, según los niveles mencionados, debe contemplar las siguientes fases de aprendizaje:

Fase 1: Información: El docente procura familiarizar a los estudiantes con el tópico geométrico a considerar en la sesión de trabajo. También sirve para que el profesor conozca cuáles conocimientos previos poseen sus estudiantes y qué tipo de tareas son capaces de realizar según su capacidad de razonamiento geométrico.

Fase 2: Orientación guiada o dirigida: El docente, en forma oral o mediante hojas de trabajo, orienta a los estudiantes para que realicen las exploraciones geométricas iniciales y los induce a observar algunos elementos relacionados con las propiedades geométricas relevantes. En este sentido, Gutiérrez y Jaime (2012) señalan que "el objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etcétera, principales en el área de la geometría que están estudiando" (p. 57).

Fase 3: Explicitación: El docente incentiva a los alumnos para que comuniquen y expliquen, en forma oral o por escrito, los resultados obtenidos a través de sus exploraciones geométricas. Gutiérrez y Jaime (2012) hacen un llamado de atención:

> La tercera fase no hay que entenderla como un período de actividad entre las fases 2 y 4, sino que se trata de una fase transversal, que se superpone a las demás fases, pues hay que aprovechar cualquier momento propicio

> para promover el diálogo entre los estudiantes (con participación o no del profesor, según interese) (p. 58).

Fase 4: Orientación Libre: El docente propone a los estudiantes que realicen ciertas actividades tales como la resolución de problemas geométricos, con el propósito de facilitar el proceso de transferencia y consolidación de los aprendizajes; es decir, se busca con ello que los estudiantes utilicen y combinen los nuevos conocimientos y habilidades geométricas para resolver problemas que pudieran abordarse de diferentes maneras.

Fases 5: Integración: El docente pudiera pedir a los estudiantes que, por ejemplo, hagan un resumen de los aspectos relevantes del tópico tratado, con la finalidad de organizar lógicamente y como un todo (visión global) los nuevos aprendizajes geométricos (conceptos, propiedades, procedimientos, formas de razonar, etc.).

Según Gutiérrez y Jaime (2012), las fases de aprendizaje, componente prescriptivo del modelo de Van Hiele, "constituyen una propuesta metodológica para los profesores que les indican cómo organizar los diferentes tipos de contenidos de un tema específico, secuenciándolos para que faciliten el progreso de los estudiantes y gradúen su aprendizaje" (p. 56).

Por otra parte, Hoffer (1981) propone que la enseñanza de la Geometría debe fomentar el desarrollo de cinco tipos de habilidades prácticas y que tienen una naturaleza claramente geométrica; habilidades que, además, asocia a cada uno de los niveles de razonamiento geométrico y que, por tanto, se van desarrollando progresivamente:

1. *Habilidad visual*: Capacidad de observación.
2. *Habilidad verbal*: Uso apropiado del lenguaje de la Geometría.
3. *Habilidad para dibujar*: Expresar ideas geométricas en forma gráfica.
4. *Habilidad lógica*: Capacidad de estructurar argumentaciones lógicas.

6. *Habilidad para modelar*: Capacidad de construir modelos geométricos asociados al medio circundante.

En cambio, Gutiérrez y Jaime (1998) han identificado diferentes procesos de razonamiento (reconocimiento, definición, clasificación y demostración) como característicos de varios de los niveles propuestos por Van Hiele:

1. Reconocimiento de tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.
2. Definición de un concepto geométrico, la cual puede ser considerada de dos maneras distintas: cómo un estudiante formula la definición de un concepto que está aprendiendo o cómo un estudiante emplea una definición dada.
3. Clasificación de figuras geométricas en atención a distintos criterios o su clasificación como parte de diferentes familias o clases.
4. Demostración de propiedades o proposiciones matemáticas.

En atención a la clasificación de las habilidades geométricas por Hoffer (1981) y Gutiérrez y Jaime (1998), se establece que entre las habilidades vinculadas con el proceso de resolución de problemas geométricos usando un programa de Geometría Dinámica y el proceso de demostración en Geometría destacan las siguientes:

Nivel 2 (Análisis):

1. Expresar en un dibujo la información verbal dada.
2. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla.
3. Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos.

Nivel 3 (Relaciones, Clasificación u Ordenamiento):

1. Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras.
2. Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos de figura.
3. Definir con palabras adecuadas y consistentes.
4. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.

Nivel 4 (Deducción):

1. Utilizar información de otra figura para deducir más información.
2. Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas.
3. Reconocer cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura.
4. Deducir a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica.
5. Utilizar las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones.

6. Poder deducir consecuencias a partir de la información dada.
7. Poder deducir propiedades de los objetos geométricos a partir de la información dada.
8. Poder resolver problemas que establezcan relaciones entre objetos físicos y objetos geométricos.

De modo que, a pesar que las habilidades para demostrar proposiciones matemáticas se consolidan en el nivel 4 (deducción), se observa que en los niveles previos se desarrollan ciertas habilidades geométricas que permiten abordar la demostración; esta situación ha sido tomada en consideración a la hora de diseñar y poner en práctica una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas geométricos que incorporó el uso de un SGD y la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, así como al momento de describir y analizar las competencias matemáticas que estén relacionadas con la demostración en ambientes de Geometría Dinámica.

Papel de los software de Geometría Dinámica (SGD) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría

A mediados de la década de los años ochenta, Judah L. Schwartz y Michal Yerushalmy diseñaron un software conocido como *Geometric Supposer*, el cual permitía la construcción y exploración de figuras geométricas, así como la formulación y evaluación de conjeturas; contándose con versiones en inglés y hebreo (Gary, 1997). Para Yerushalmy (1991), uno de los principales objetivos de la enseñanza de la Geometría en la educación media es que los estudiantes conozcan y comprendan los conceptos geométricos básicos:

> El énfasis en esta edad se pone en el conocimiento básico e intuitivo de los conceptos geométricos, su definición, los atributos y las relaciones simples de la geometría plana, antes y con el fin de prepararse para la forma formal - deductiva de aprendizaje de esta asignatura en la escuela secundaria (p. 407, traducción libre).

Por ello, el mencionado software permitía a los estudiantes ver muchos ejemplos diferentes de un mismo objeto o concepto, a diferencia de los libros de texto convencionales que por lo general ofrecen un solo ejemplo, propiciando la adquisición de la definición formal de un concepto (Yerushalmy, 1991).

De esta manera, surgen en el escenario del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática los llamados *software de Geometría Dinámica (SGD)*, aunque fueron conocidos por este nombre más adelante.

Casi, en paralelo con la aparición en escena del *Geometric Supposer*, surgen otros SGD, entre los cuales han destacado, por sus cualidades técnicas y potencial didáctico, el *Cabri - Géomètre* (Francia) y el *Geometer`s Sketchpad* (Estados Unidos). Actualmente, el *Geogebra*, software libre que facilita la interacción dinámica de diferentes sistemas de representación empleados en Matemática y desarrollado por Markus Hohenwarter, se ha posicionado entre los más usados por profesores y estudiantes de los distintos niveles educativos (de Primaria a la Universidad), bastaría con revisar los materiales didácticos diseñados que incorporan el uso del Geogebra, los cuales se encuentran disponibles en la siguiente dirección: http://www.geogebra.org/cms/es/

Finzer y Jackiw (1998) establecen que los SGD forman parte de los llamados software de *manipulación dinámica de objetos matemáticos* (de allí su nombre), los cuales se caracterizan por tres atributos:

1. La manipulación de los objetos matemáticos es *directa*, ya que, una vez elegido un objeto (por ejemplo, el vértice de un triángulo) se procede a su arrastre a través de cierto camino, observando cómo cambian los restantes elementos que configuran el objeto (en el ejemplo mencionado, los otros vértices y los lados del triángulo).
2. El movimiento de los objetos matemáticos es *continuo*; los cambios se producen durante el arrastre y pueden observarse, en todo momento, las propiedades que permanecen invariantes cuando una figura es sometida a una transformación.
3. El aprendiz está *inmerso* en el ambiente de aprendizaje; es decir, el aprendiz se involucra con los objetos geométricos mediante diversas exploraciones y está centrado en la búsqueda o construcción del conocimiento matemático inherente a tal construcción geométrica.

Puede afirmarse que, según Iglesias (2000), los SGD presentan ciertas características comunes, entre las cuales destacan las siguientes:

1. Producen un ambiente (o micromundo) en el cual la Geometría Euclidiana puede ser explorada. Al respecto, Alsina Catalá et. al. (1997) expresaron que el estudiante puede experimentar a través de un SGD "temas geométricos de la misma manera que se experimentan temas aritméticos con una calculadora o temas funcionales con una calculadora científica" (p. 126).

2. Las transformaciones en el plano (incluyendo las isométricas) pueden ser observadas por los estudiantes en forma directa y continua (por ser software de manipulación dinámica).

3. Permiten la construcción de los llamados lugares geométricos; entendiendo que, en un SGD, un lugar geométrico "representa el conjunto de las posiciones tomadas por un objeto A cuando un punto M libre varia sobre un objeto" (Bainville, 2003). Cabe decir que, Alsina Catalá et. al. (1997), en relación con la resolución de problemas, se refiere a la estrategia de los lugares geométricos y expresa que "consiste en determinar el conjunto de puntos que pueden resolver el problema. A este conjunto puede llegarse por reunión o intersección de otros conjuntos en función de cómo las condiciones dadas van delimitando los puntos solución" (p. 98).

4. Facilitan el descubrimiento de importantes relaciones geométricas entre los objetos que intervienen en una construcción geométrica. Para Gravina (1996), en la medida que los estudiantes realizan una construcción con un SGD logran comprender determinadas definiciones o propiedades geométricas y, además, descubrir propiedades invariantes a través de la experimentación y, dependiendo del nivel de escolaridad, pueden llegar a trabajar con demostraciones de los resultados obtenidos experimentalmente.

5. Poseen una elevada capacidad para crear simulaciones; es decir, es posible simular el funcionamiento de los mecanismos empleados por aparatos tecnológicos desde un punto de vista geométrico. En internet, se consigue, por ejemplo, una colección de applets de java (elaborados a partir de una construcción con Cabri II) disponibles en http://jmora7.com/Mecan/ , donde es posible ver a ciertos mecanismos

actuar en movimiento, permitiendo interactuar sobre ellos para modificar ciertas condiciones. Sin dejar de mencionar que los SGD emplean una regla y un compás que simulan las tradicionales construcciones geométricas con tales instrumentos.

6. Proporcionan significativas evidencias experimentales que pudieran motivar a los estudiantes a dar justificaciones a las propiedades geométricas establecidas; según Schumann (1996), esas evidencias pudieran encontrarse por: (a) medición (longitud de un segmento, medida de un ángulo, área y perímetro de una figura plana); (b) construcción de un lugar geométrico (¿Qué línea es descrita por el punto Y que depende constructivamente de X, si X se mueve en una línea de guía (o incluso libremente)?; (c) identificación de relaciones de dependencia entre objetos geométricos (paralelismo, perpendicularidad, simetría con respecto a un punto o con respecto a un eje, etc.); (c) estudio de casos (¿cuál es la ubicación del ortocentro de un triángulo, si este es: acutángulo, o rectángulo, u obtusángulo?).

7. Se han convertido en una herramienta indispensable para matemáticos y educadores matemáticos.

En relación al impacto de este tipo de software sobre el desarrollo de la Geometría y su proceso de enseñanza y aprendizaje, se han realizado diversos comentarios; para De Villiers (1999 a), el desarrollo de los SGD despertó el interés por la enseñanza de la Geometría en países donde ésta había quedado relegada; en esto coincide con Hanna (2000), quien expresó que "la disponibilidad en la clase de software con capacidades gráficas dinámicas ha dado un nuevo impulso a la exploración matemática, y, en particular, ha traído un bienvenido nuevo interés en la enseñanza de la Geometría" (p. 12), ya que, facilitan la realización de construcciones geométricas con precisión y, mediante la exploración de las mismas, llegar a establecer conjeturas y, seguidamente, buscar vías de validación.

Por otra parte, Iglesias (2000) evidenció que el uso de un software de Geometría Dinámica como el Cabri – Géomètre II exige el diseño y la implementación de una propuesta didáctica específica, como el curso de *Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora,* cuya eficacia está sustentada en un proceso permanente de investigación educativa.

La Demostración en Geometría

Aproximadamente en el año 300 a. C., el matemático griego Euclides publica su obra denominada los "*Elementos*", en la cual se presenta el conocimiento geométrico en forma sistematizada y siguiendo el desarrollo de una teoría axiomática; es decir, a partir de ciertos términos no definidos y axiomas se deducen todos los teoremas por medio del razonamiento lógico deductivo (sustentado en las reglas de inferencia). No obstante, dado el carácter empírico – práctico que la Geometría tuvo en sus inicios es preciso señalar que un porcentaje significativo de los conocimientos geométricos se obtuvo a partir de la observación y experimentación (mediciones y construcciones); esto es, aplicando el método inductivo; de manera que, teniendo en cuenta la evolución histórica de la Matemática como disciplina científica, se puede afirmar que tanto la inducción como la deducción han sido dos vías para llegar al conocimiento matemático. Al respecto, Fetisov (1973) afirmó que

> Por supuesto, los primeros conocimientos geométricos del hombre se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. No obstante, conforme creció el conjunto de conocimientos geométricos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras, por medio de la deducción, sin recurrir a las observaciones o a los experimentos (p. 16).

Además, Iglesias y Ortiz (2013, pp. 230 y 231) señalan que

> La Demostración Matemática se estudia desde diferentes perspectivas: *Histórica* (evolución histórica de la Matemática y, en particular, de la Geometría y la demostración y sus implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje), *Epistemológica* (rasgos característicos del conocimiento matemático, fuentes o procedencia, criterios de validación y relación entre el sujeto que conoce y el objeto matemático), *Cognitiva* (desarrollo del pensamiento matemático, dificultades confrontadas, errores cometidos y competencias matemáticas alcanzadas y puestas en práctica) y *Didáctica* (estrategias, materiales y recursos didácticos que favorezcan el abordaje y la comprensión de la actividad demostrativa).

En esta investigación, se enfatiza en las perspectivas cognitiva y didáctica, pero se reconoce la importancia de abordar el estudio de la demostración desde una perspectiva epistemológica, ya que, la misma es una actividad propia y distintiva del quehacer matemático. Por ello, Iglesias y Ortiz (2013) presentaron – como ponencia arbitrada - una aproximación al estudio de la demostración desde una perspectiva epistemológica, teniendo como referencia dos asuntos esenciales de la Teoría del Conocimiento, como lo son la forma de conocimiento y el criterio de verdad; para ello, se plantearon, en el campo de la Matemática y de la Educación Matemática, las siguientes interrogantes: ¿El conocimiento matemático es racional o puede ser intuitivo? ¿Cómo se sabe que el conocimiento matemático es verdadero? En la búsqueda de respuesta a estas interrogantes se revisaron algunas investigaciones sobre intuición y demostración mencionadas por D'Amore (2006) y entre las cuales destacan los trabajos realizados por Fischbein (1987), Duval (1999), Balacheff (2000) y Harel y Sowder (2007); encontrándose que la introducción del método axiomático contribuyó a la evolución de la Matemática como disciplina científica y, además, trajo consigo a los métodos de demostración como formas aceptadas de validación de las verdades matemáticas. Sin embargo, en el ámbito educativo, esto ha ocasionado una sobrevaloración de los llamados contextos de justificación (Sierpinska y Lerman, 1996), descuidando así lo relacionado con el descubrimiento del conocimiento matemático. Esto último pareciera estar asociado a un conjunto de procesos como construir, explorar, visualizar, conjeturar y verificar, los cuales conducirían a sentir la necesidad de justificación; siendo esta necesidad lo que impulsaría a los profesores y estudiantes a dar una explicación, presentar una prueba o realizar una demostración formal. Asimismo, se destacan las relaciones existentes entre la intuición, la demostración y la argumentación; lo cual obliga a tener en cuenta aspectos relacionados con las intuiciones matemáticas (Fishbein, 1987), las prácticas argumentativas (Duval, 1999; Flores, 2007) y las acciones de proceso y producto propias de la actividad demostrativa (Perry Carrasco, Camargo Uribe, Samper de Caicedo y Rojas Morales, 2006) a la hora de analizar las acciones y las producciones de los estudiantes para profesor de Matemática cuando resuelvan un problema geométrico en un ambiente de Geometría Dinámica. Cabe señalar que, dada la vinculación con lo tratado en esta tesis, la autora ha decidido presentar la mencionada ponencia como anexo (ver Anexo A), ya que, considera que lo mismo facilitará el seguimiento de lo tratado en los próximos apartados.

Fetisov (1973), atendiendo al carácter axiomático y deductivo de la Geometría, estableció que "una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y proposiciones previamente establecidas" (p. 17). Por ello, los matemáticos tienen que enfrentarse con "*el problema de la evidencia*" (Fischbein, 1987), ya que, ellos requieren distinguir entre las proposiciones directamente aceptables por evidentes y aquellas que tienen que ser probadas, con el propósito de incorporarlas al seno de una teoría axiomática y, dado que la evidencia intuitiva no es sinónimo de certeza, tienen que arriesgarse a usar su intuición al momento de resolver un problema y hacer una demostración. Por esto, los matemáticos entienden la necesidad de demostrar una proposición para establecer su veracidad, independientemente de las evidencias experimentales disponibles: los matemáticos son capaces y están dispuestos a demostrar lo que parece obvio. Sin embargo, en el ámbito escolar, los estudiantes no comprenden la necesidad de demostrar lo que les parece evidente y, por lo tanto, tienen dificultades para presentar argumentos convincentes que garanticen la veracidad de una proposición. En este sentido, Alsina (1999) afirma que:

> No hay nada tan triste como explicar los detalles de una demostración a alguien que no pueda apreciar la necesidad de la misma. Las demostraciones pueden ser muy instructivas si a su valor argumentativo se une la motivación de su necesidad. Muchas veces conviene resaltar tantos los ejemplos como los contraejemplos, o hacer ver lo que sucedería al suprimir una hipótesis o ser menos restrictivos. (...). Etapas distintas del aprendizaje pueden también requerir demostraciones "viables", plausibles para el nivel (p. 35)

Además, en el ámbito de la Geometría, los dibujos juegan un papel relevante en los procesos de conceptuar, conjeturar y demostrar, ya que, como señala Fetisov (1973) es muy importante que los estudiantes distingan entre las características generales y esenciales de una figura y aquellas que son particulares y accidentales en un dibujo dado. En este sentido, Hershkowitz (1990), refiriéndose a la construcción de los conceptos matemáticos y asumiendo las nociones de concepto e imagen conceptual propuestas por Tall y Vinner (1981), establece que el concepto se deriva de su definición matemática y tiene atributos relevantes (los que debe poseer un caso para ser un ejemplo del concepto) y atributos no relevantes (los que sólo poseen algunos de los ejemplos del concepto); sin embargo, el uso de los llamados ejemplos prototipo (aquellos que satisfacen los atributos relevantes del concepto, pero también algunos atributos no relevantes con marcadas características visuales) han provocado que ciertos atributos no relevantes se incorporen a las definiciones que manejan los estudiantes. Por ejemplo, los estudiantes comúnmente asumen que los lados consecutivos de un rectángulo tienen diferentes longitudes, con lo cual un cuadrado no sería un rectángulo. Por ello, es necesario que los estudiantes se habitúen a dar ejemplos de un concepto dado, conocida su definición, así como también a dar un no ejemplo del mismo.

Al respecto, Laborde (1997) destaca la relación entre el dibujo y el objeto geométrico:

> La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos, queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representa; el segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente. El término figura geométrica así entendido remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones (p. 33)

De lo cual, se deduce – según Laborde (1997) que: un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado por un estudiante como algo que lo remita a un objeto geométrico y las interpretaciones de un mismo dibujo son múltiples, ya que, dependen de los conocimientos previos del estudiante y el contexto en el cual se esté trabajando; de modo que, "el dibujo en Geometría puede ser considerado como modelo del objeto geométrico, y así ofrece un campo de experimentación gráfica" (p. 36); opción que es favorecida cuando se trabaja con un SGD, debido a que permite realizar una construcción con regla y compás y, luego, manipularla dinámicamente, para así identificar las características invariantes de la misma; así, pues, los estudiantes pueden diferenciar entre los atributos relevantes y los atributos particulares de una construcción geométrica y las relaciones existentes entre los elementos que la conforman. Esto facilitaría la comprensión de la definición de un objeto geométrico, la visualización de propiedades geométricas y el reconocimiento de las relaciones existentes entre los elementos (otros objetos geométricos) que la conforman, lo cual pudiera servir de base para dar una justificación matemática.

En otro orden de ideas, los ambientes de aprendizajes basados en el uso de un SGD establecen la necesidad de armonizar la intuición y el razonamiento lógico – deductivo, lo cual era una de las grandes aspiraciones de Efraim Fischbein. Asimismo, en este tipo de ambientes, es posible distinguir entre verificación empírica y deducción lógica, lo cual está estrechamente relacionado con la validación del conocimiento matemático (Mariotti, 1998).

Según la perspectiva del Grupo de Investigación en Educación Matemática (Génova – Italia), Boero (1999) plantea que la aproximación a la demostración pertenece a una forma más general de aprendizaje cultural y cognitivo y, por ende, ingresar a la cultura de los teoremas significa desarrollar competencias específicas inherentes a la producción de teoremas y a la prueba de las conjeturas. Además, este investigador estudia los roles múltiples de la argumentación en las actividades matemáticas concernientes a teoremas y la mediación del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración.

Los investigadores pertenecientes al Grupo Internacional de Psicología en Educación Matemática (PME) también han centrado sus esfuerzos en el análisis de la influencia de un SGD sobre los estudiantes y las concepciones de la demostración matemática mientras los estudiantes están resolviendo problemas geométricos en un ambiente mediado por tal software. En el volumen 44 (1-2) de la revista *Educational Studies in Mathematics* publicado en el año 2000, los investigadores del PME abordan esta temática. Entre sus aportes destacan los siguientes:

1. Hanna (2000) explora el papel de la demostración en la Educación Matemática y justifica su importancia en los planes de estudio. Además, promueve una discusión sobre ciertas aplicaciones de los SGD como herramientas valiosas en la enseñanza de la demostración. Además, señala que el uso de un SGD en las clases de Matemática será eficaz en la medida que se acompañe de tareas cuidadosamente diseñadas y que

le brinden a los estudiantes las oportunidades para: construir figuras geométricas dadas ciertas condiciones, visualizar relaciones entre los objetos que la conforman, establecer ciertas conjeturas, cometer errores, reflexionar y ofrecer explicaciones matemáticas tentativas. Por ello, para Hanna, el desafío del profesor en el aula es aprovechar la emoción y el disfrute por la exploración para motivar a los estudiantes a suministrar una prueba, o al menos hacer un esfuerzo para seguir una prueba dada.

2. Mariotti (2000) intenta clarificar el papel de un SGD, como el Cabri II, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Esta autora centra su atención en la construcción social del conocimiento y en la mediación semiótica lograda a través de los artefactos culturales (perspectiva de Vigotsky).

3. Jones (2000) estudia la influencia a largo plazo del uso de un SGD sobre la construcción de nociones amplias del razonamiento deductivo. Se centra en la evolución de la capacidad que tienen los estudiantes para hacer uso preciso del lenguaje matemático y clasificar correctamente una familia de cuadriláteros, a partir de la exploración visual de las similitudes y diferencias existentes entre ellos. Asimismo, señala que el uso de un SGD ayudó a los estudiantes a formular declaraciones razonablemente precisas sobre las propiedades y relaciones existentes entre los distintos tipos de cuadriláteros, y para llevar a cabo deducciones correctas, las cuales considera dos pasos importantes en la construcción de pruebas.

4. Marrades y Gutiérrez (2000) investigan las maneras en que el SGD puede usarse para mejorar la comprensión por parte de los estudiantes de la naturaleza de la demostración matemática y mejorar sus habilidades asociadas a la demostración, teniendo como base la exploración, la heurística y la visualización.

5. Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2000) analizan las conjeturas, los métodos activos y las explicaciones dadas por los estudiantes cuando se enfrentaron con las contradicciones o contraejemplos; es decir, analizan el papel de las refutaciones en los ambientes de Geometría Dinámica.

6. Laborde (2000) intenta desarrollar una discusión global sobre el papel que desempeñan los SGD, teniendo en cuenta la variedad de posibles contextos para la demostración en este tipo de ambiente, la naturaleza cognoscitiva y social de la

demostración como reflejo del entorno que se construyó alrededor del uso de un SGD, de observar a demostrar y la superación de la oposición entre hacer y demostrar.

De manera análoga, en el año 2002, la revista *ZDM – International Reviews on Mathematical Education* dedicó el volumen 34 (1) a la demostración y argumentación en las clases de Matemática y, luego, el volumen 34 (3) a la investigación sobre los SGD; entre las ideas relevantes se pueden mencionar: (a) Es necesario que los estudiantes distingan entre la evidencia empírica y la demostración (Hanna y Jahnke, 2002); (b) las investigaciones en Educación Matemática y Psicología Cognitiva han contribuido a la descripción y explicación de los procesos de demostración y sus prerrequisitos: habilidad de razonamiento espacial, conocimiento declarativo, estrategias metacognitivas y conocimiento de los métodos de demostración (Heinze y Kwak, 2002); (c) los entornos de aprendizaje deberían brindar oportunidades a los estudiantes para la exploración y la argumentación matemática, teniendo como soporte la resolución de problemas (Reiss y Renkl, 2002); (d) los ambientes de Geometría Dinámica son complejos, debido a que exigen el diseño de secuencias de aprendizaje que alternen el trabajo con el software y las discusiones colectivas y, en muchos casos, es necesario redefinir los contenidos, los métodos y el rol del docente (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002); (e) ciertos factores han de ser tomados en cuenta cuando se pretende usar un SGD con fines didácticos: selección o elaboración de materiales apropiados, entrenamiento de los profesores sobre cómo hacer uso de tales materiales (incluyendo el SGD) y correspondencia de las secuencias de enseñanza con los objetivos de aprendizaje establecidos (Gawlick, 2002).

También, como parte del debate sobre el papel y la importancia asignada a la argumentación y la demostración en el ámbito de la Educación Matemática, en la revista *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, se dedicó un número especial – 40 (3) del año 2008 - sobre las perspectivas didácticas y epistemológicas sobre la demostración matemática, en el cual se incluyeron catorce (14) reportes de investigación, entre los cuales, por interés investigativo, se hará referencia al artículo presentado por Reiss, Heinze, Renkl y Groß (2008) sobre el razonamiento y la demostración en Geometría.

Para estos autores, las habilidades de razonamiento y argumentación son importantes para diferentes disciplinas y juegan un rol especial en Matemática; sin embargo, muchos estudiantes encaran serias dificultades para razonar y argumentar en forma consistente y, en particular, con la demostración matemática. Ellos señalan que los estudios empíricos indican que la habilidad para argumentar en una forma matemáticamente correcta y producir una demostración depende de ciertos prerrequisitos: (a) el conocimiento de conceptos matemáticos y sus propiedades; (b) el dominio de estrategias heurísticas y su aplicación en la resolución de problemas; (c) el uso de estrategias metacognitivas; y (d) una adecuada comprensión de la naturaleza de la prueba matemática. Además, Reiss et al. (2008) establecen que las habilidades para argumentar y demostrar pudieran ser analizadas atendiendo a las exigencias de los problemas planteados a los estudiantes: (a) Hacer uso del conocimiento básico de conceptos o propiedades geométricas (por ejemplo, hallar la medida de un ángulo de un triángulo conociendo las medidas de los otros dos ángulos y aplicando la propiedad que establece que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º); (b) Demostrar haciendo uso de una simple deducción (por ejemplo, demostrar que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes); (c) Realizar una demostración compleja que implica una cadena deductiva con varios pasos (por ejemplo, demostrar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, ya que, es necesario introducir una construcción auxiliar y hacer uso de las propiedades de rectas paralelas cortadas por una secante).

Asimismo, Reiss et. al (ob. cit.) destacan la utilidad del *modelo experto de demostración matemática* presentado por Boero (1999), en el cual se contemplan seis fases: (a) la producción de una conjetura, teniendo como base las exploraciones realizadas en y sobre la figura construida o dada; (b) la formulación de la conjetura haciendo uso del lenguaje geométrico apropiado; (c) la identificación de argumentos matemáticos para la validación de la conjetura y la generación de las ideas centrales que guíen a la demostración; (d) la selección y combinación de argumentos coherentes en una cadena deductiva; (e) la organización de estos argumentos acordes a estándares matemáticos y (f) la propuesta de una prueba formal. Se pudiera decir que, para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en Geometría, las primeras cuatro fases son las que despiertan el interés de los educadores matemáticos y como señala Boero (1999) forman parte del lado privado del trabajo de los matemáticos, quienes – por lo general – sólo muestran lo realizado en las dos últimas fases (comunicación y sistematización del conocimiento matemático en el seno de una teoría axiomática).

Cabe destacar que, en el año 2007, el comité ejecutivo del ICMI convocó un estudio sobre las cuestiones relevantes de la prueba y la demostración en la Educación Matemática; dicho estudio estuvo presidido por Gila Hanna y Michael de Villiers, quienes - junto con otros ochos reconocidos educadores matemáticos – prepararon el documento de discusión; las contribuciones fueron sometidas a un riguroso proceso de arbitraje y las mismas fueron debatidas en la conferencia celebrada en la Universidad Normal Nacional de Taiwan en Taipei, desde el 10 al 15 de Mayo de 2009. Este estudio culminó con la publicación en el año 2012 del volumen correspondiente al Estudio ICMI 19 en el cual se examinan varias nociones teóricas y prácticas acerca de por qué y cómo los educadores matemáticos deben acercarse a la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y la demostración. Entre los temas que fueron el foco de discusión de los diferentes grupos de trabajo conformados para desarrollar este estudio ICMI, se pueden mencionar los siguientes: (a) Desarrollo cognitivo de la prueba; (b) Argumentación; (c) SGD y experimentación; (d) Prueba en el currículo escolar; (e) Naturaleza de la prueba en el aula; (f) Prueba en la Educación Universitaria (Hanna y De Villiers, 2012). En el Cuadro 16, se muestra una síntesis de los asuntos tratados por estos grupos de trabajo.

En la presentación de esta publicación, se señala que los educadores matemáticos participantes en este estudio ICMI comparten una visión común de la demostración matemática que trasciende a la visión formal de la misma como una secuencia ininterrumpida de premisas que establecen una conclusión necesaria, en la que cada paso es una aplicación de las reglas de inferencia lógica. Por ello, Hanna y De Villiers (2012) afirman que: "Este tomo de estudios trata a la prueba en un sentido más amplio, reconociendo que una visión estrecha de la prueba ni refleja la práctica matemática, ni ofrece las mayores oportunidades para la promoción de la comprensión matemática" (p. 3, traducción libre).

Cuadro 16
Asuntos tratados por los grupos de trabajo participantes en el estudio ICMI 19

Grupo de Trabajo	Coordinador(es)	Asuntos tratados
Desarrollo cognitivo de la Prueba	David Tall y Oleksiy Yevdokimov	Características del desarrollo cognitivo de la prueba en los distintos niveles escolares.
Argumentación	Viviane Durand-Guerrier	Relación entre la prueba y la argumentación desde la perspectiva de las cualidades opuestas como formal vs informal, forma vs contenido, semántica vs sintaxis, verdad vs validez, lógica matemática vs sentido común, prueba formal vs heurística, y continuidad vs discontinuidad.
SGD y Experimentación	Ferdinando Arzarello	Las formas en que las investigaciones matemáticas usando tecnología avanzada y diferentes recursos semióticos se refieren a los aspectos formales del discurso matemático y la producción de pruebas.
Prueba en el currículo escolar	Fou-Lai Lin	El conocimiento que los profesores necesitan para enseñar a demostrar con eficacia y de cómo las actividades demostrativas deben estar diseñadas para fomentar la mejor enseñanza acerca de la prueba y la actividad demostrativa.
Naturaleza de la prueba en el aula	Tommy Dreyfus, Hans Niels Jahnke y Wann-Sheng Horng	La forma, el estado y el papel que la prueba debe asumir en cada nivel educativo para asegurar la comprensión matemática.
Prueba en la Educación Universitaria	Annie Selden	Explora todos los aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y demostración en el nivel universitario, incluyendo la transición de la escuela secundaria a la universidad y la transición de la licenciatura al trabajo como matemáticos.

Por lo tanto, en esta investigación, la demostración matemática se entiende como "una práctica argumentativa orientada por las leyes de la lógica formal o reglas de inferencia y dirigida a entender el porqué es válida una proposición matemática y convencer a otros y quizá a uno mismo de su validez" (Iglesias y Ortiz, 2013, p. 242). Esta acepción guarda relación con lo propuesto por Flores (2007), quien asumió a la demostración o prueba como el resultado de una práctica argumentativa que se apoya en esquemas analíticos cuyos razonamientos son válidos desde el punto de vista de la lógica formal. Además, sin perder de vista que la demostración como proceso guarda relación con diversas actividades propias del quehacer matemático: exploraciones, estrategias heurísticas, reconocimiento de patrones o regularidades, formulación de conjeturas, verificación empírica, explicaciones, etc.

El análisis didáctico como herramienta para diseñar unidades didácticas con contenidos geométricos

La autora también ha venido trabajando con los cursos de Geometría I y Geometría II correspondientes al componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay; por ello, se dedicó a la sistematización de un conjunto de actividades didácticas con contenido geométrico que ha venido diseñando y poniendo en práctica, con el propósito de proponer una serie de unidades didácticas susceptibles de ser desarrolladas en los mencionados cursos (Iglesias, 2008).

Para llevar a cabo esta labor, asumió como referencia la noción de proyecto docente, entendida por Flores Martínez (1998, p. 1) como "una declaración fundamentada de una serie de decisiones profesionales, relacionadas con la enseñanza de una o varias asignaturas de un plan de formación docente" (p. 1), el cual, además, se estructura en función de tres acciones: (1) precisar el contexto, (2) sentar las bases que lo fundamentan y (3) describir las decisiones profesionales concretas, con el máximo de precisión.

Por lo tanto, en la fundamentación teórica, atendiendo a los componentes del currículo de Matemática establecidos por Rico, Castro y Coriat (1997) (ver Gráfico

8), se decidió utilizar como columna vertebral la noción de análisis didáctico (Gómez y Rico, 2002; Gómez, 2007).

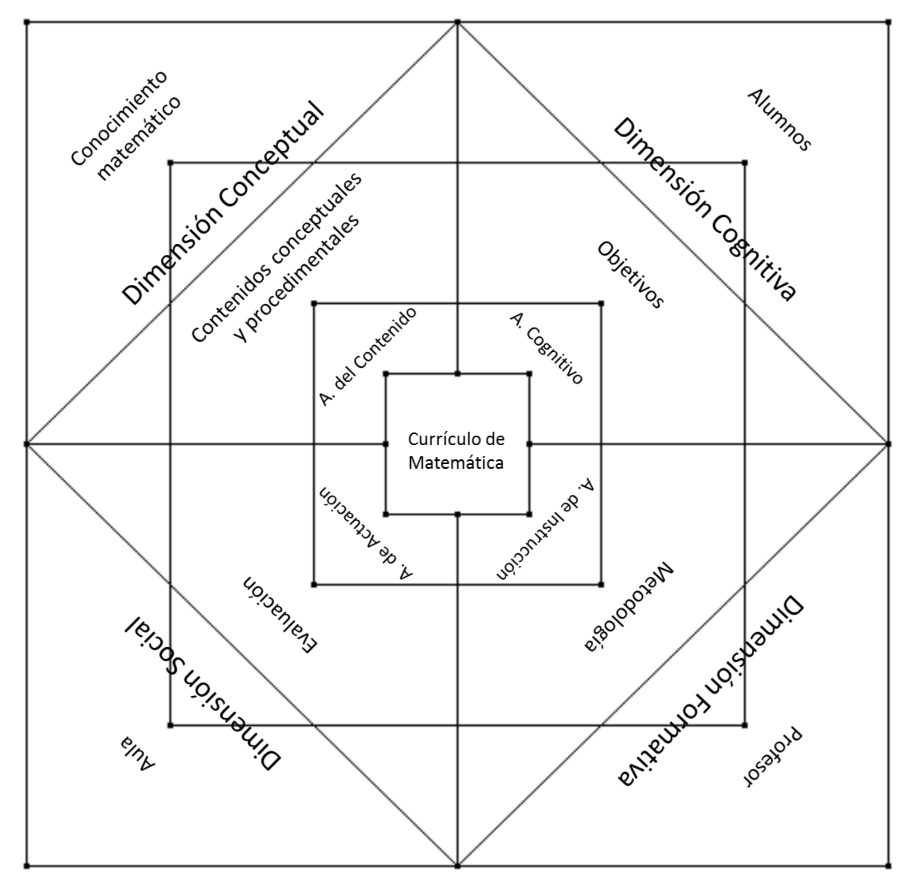


***Gráfico 8*. Componentes del currículo de Matemática y su relación con la noción de análisis didáctico.**

En Ortiz, Iglesias y Paredes (2013), se describe una propuesta de articulación e integración de ciertos referentes teóricos y metodológicos, vinculados con el análisis didáctico, para reportar el diseño de los programas de Geometría I y Geometría II en la formación inicial de profesores de Matemática en la UPEL Maracay.

Por ello, en esta investigación el análisis didáctico cumple ciertas funciones: (a) En la fase de diseño, el análisis didáctico sirvió como guía en el proceso de planificación de las unidades didácticas que conformaron el curso de RPG_AC, atendiendo a sus tres primeros componentes: análisis de contenido (selección y alcance de los temas a ser estudiados), análisis cognitivo (competencias matemáticas y didácticas que se pretende sean desarrolladas por los futuros profesores de

Matemática) y análisis de instrucción (diseño de tareas didáctico – matemáticas); (b) en la fase de actuación (gestión de las clases), el análisis de contenido fue dado a conocer como una herramienta que orienta el diseño de unidades didácticas con contenidos matemáticos y, por consiguiente, los participantes en el curso de RPG_AC lo asumieron como unos de los referentes teóricos y metodológicos a seguir cuando planificaron actividades didácticas para la Geometría en Educación Media; (c) en la fase de actuación (evaluación de productos y procesos), el análisis didáctico ha suministrado los indicadores establecidos a priori para analizar las competencias matemáticas y didácticas puestas en práctica por los participantes en el curso de RPG_AC cuando realizaron las tareas planteadas. Dado la relevancia del análisis didáctico en el desarrollo de esta investigación, en los próximos capítulos se ampliará lo relacionado con su aplicación.

A modo de síntesis integradora

Entre los marcos teóricos que han facilitado el estudio de las relaciones entre la formación didáctico – matemática de los profesores y su desarrollo profesional han sido tomados en consideración los modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática propuestos por Shulman (2005) y Hill et al. (2008), complementados con los aportes de Azcárate (1998) y Godino (2009). Dichos modelos han permitido distinguir dos amplios dominios de conocimientos matemáticos para la enseñanza: el conocimiento del contenido matemático (CCM) y el conocimiento didáctico del contenido matemático (CDCM); es este último dominio lo que da especificidad al conocimiento profesional docente, puesto que permite distinguirlo del conocimiento que poseen otros profesionales que trabajan con la Matemática.

Además, desde una perspectiva curricular, se ha abordado el estudio de las competencias profesionales de lo general a lo particular, partiendo de las competencias genéricas (comunes para distintas profesiones) y pasando por las competencias específicas (relacionadas con el área de Educación) según lo presentado en el proyecto Tuning – América Latina (Beneitone, 2007); se llega a la revisión de la noción de competencia matemática (definición, elementos y modelo funcional), teniendo como referencia los documentos oficiales de la OCDE para el Programa

Internacional para la Evaluación de los Estudiantes (PISA). En este sentido, han resultado sumamente útiles los aportes de Niss y Højgaard (2011), ya que, en el caso de un profesor de Matemática, han facilitado definir un conjunto de descriptores para cada una de las ocho competencias matemáticas (ver Cuadros 15 y 16), las cuales se organizan en dos grupos: (a) la capacidad de formular y responder preguntas sobre y por medio de las matemáticas; (b) el ser capaz de hacer frente con el lenguaje y las herramientas matemáticas. Asimismo, teniendo en cuenta los trabajos de Niss y Højgaard (2011), se han distinguido tres competencias didácticas específicas que debe poseer un buen profesor de Matemática: (a) competencia curricular, (b) competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje y (c) competencia para gestionar y evaluar la enseñanza, las cuales se considera están estrechamente vinculadas con el CDCM (ver Capítulo VI).

El proceso formativo del Profesor de Matemática se asume desde la perspectiva del aprendizaje situado (Brown et al., 1989; Sagástegui, 2004; Contreras y Blanco, 2002; Niss y Højgaard, 2011), teniendo en cuenta las propuestas del grupo de la SEIEM sobre Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor, entre las cuales destacan: (a) la clase de Matemática como escenario (Gómez-Chacón, 2002); (b) los entornos de aprendizaje (García y Sánchez, 2002); (c) el papel que juegan las tareas didáctico – matemáticas (Blanco y Contreras, 2002); (d) los ámbitos de investigación profesional (Cardeñoso y Azcárate, 2002). La autora ha procurado integrar estas ideas en el diseño y gestión del curso de RPG_AC, centrado en la formación en Geometría y su Didáctica (ver Capítulo IV).

Se ha empleado el modelo de Van Hiele para identificar las habilidades asociadas a los cuatro niveles de razonamiento geométrico que un estudiante tendría que poner en práctica para demostrar proposiciones matemáticas (aspecto cognitivo), así como diseñar las tareas didáctico – matemáticas que conforman el curso de RPG_AC (aspecto didáctico); tareas que integran el uso de un SGD como el Cabri II Plus y que se organizan en torno a un esquema fundamental: construir → explorar → conjeturar → validar.

Dado que los SGD son reconocidos como herramientas que favorecen la construcción y manipulación dinámica de objetos geométricos (Finger y Jackiw, 1998) y, además, que facilitan el reconocimiento de relaciones entre los objetos que intervienen en una construcción geométrica (Gravina, 1996), se considera que los mismos ayudarían a generar la necesidad de buscar vías de validación de las conjeturas formuladas (Hanna, 2000). Obviamente, la validación de conjeturas geométricas conduciría al abordaje de la demostración en una clase de Matemática.

La demostración se entiende como una actividad propia y distintiva de la Matemática (Iglesias y Ortiz, 2013), ya que, los métodos de demostración permiten la incorporación de nuevos teoremas en el seno de una teoría axiomática; sin embargo, la sobrevaloración de los llamados contextos de justificación (Sierpinska y Lerman, 1996) en las clases de Matemática, ha ocasionado que se descuiden actividades asociadas con el descubrimiento del conocimiento matemático tales como la exploración, la heurística y la visualización (Marrades y Gutiérrez, 2000).

Asimismo, la demostración – desde una perspectiva cognitiva y didáctica – está vinculada a la posibilidad que tiene un estudiante de establecer una proposición matemática, reunir evidencias de su veracidad, buscar razones que justifiquen su respuesta o lo ayuden a convencer a otros y expresar – en forma oral o por escrito – una justificación, la cual atendiendo a sus características es entendida como una explicación, una prueba o una demostración (Balacheff, 2000). De allí, el papel que juega en esta investigación la noción de práctica argumentativa propuesta por Flores (2007).

Otro asunto clave, en este trabajo, es la aplicación del análisis didáctico como una herramienta que facilita el diseño y la gestión de unidades didácticas con contenidos geométricos (Ortiz, Iglesias y Paredes, 2013), atendiendo a aspectos investigativos (diseño y gestión del curso de RPG_AC; ver Capítulo IV) y formativos (diseño de unidades didácticas con contenidos geométricos para la educación media por parte de los participantes en el curso de RPG_AC; ver Capítulo VI).

CAPÍTULO III
ABORDAJE METODOLÓGICO
Área de Investigación

La Formación Inicial y Permanente del Profesor de Matemática es una de las áreas de investigación que conforman el campo de la Educación Matemática (González, 2000a). Entre los tópicos que se estudian en tal área, se encuentran: (1) La relación existente entre el conocimiento disciplinar y el conocimiento didáctico del docente de Matemática (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001); (2) la evaluación de los distintos programas de formación del docente de Matemática (Ortiz, 2002); (3) la disposición de los docentes de Matemática para emplear recursos informáticos como los software de Cálculo Simbólico y Geometría Dinámica, así como las calculadoras graficadoras (Ortiz, 2002); y (4) las competencias matemáticas y didácticas puestas en práctica por los docentes de Matemática cuando realizan ciertas tareas, tales como resolver problemas, elaborar demostraciones, diseñar actividades didácticas con contenido matemático, etc. (Font Moll, 2011; Valverde, Castro y Molina, 2013; Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013; García Quiroga y otros, 2013). Por ende, en atención a las interrogantes que guiaron esta investigación y los objetivos establecidos, la misma se ubica en el área de investigación sobre la *formación inicial del Profesor de Matemática* y, además, abarca tópicos relacionados con la investigación en *Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría*, como la aplicación del Modelo de Razonamiento de Van Hiele, el uso de los software de Geometría Dinámica, la resolución de problemas geométricos y la demostración en Geometría (Iglesias, 2007).

Diseño de la Investigación

Este estudio ha sido concebido dentro de la modalidad general de investigación conocida como *Investigación de Campo*, la cual según la UPEL (2006) se define como

> el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo. Los datos de interés son recogidos en forma directa de la realidad; en este sentido se trata de investigaciones a partir de datos primarios y originales. (p. 18)

De acuerdo a lo señalado, en esta investigación se pretendió estudiar las competencias matemáticas y didácticas que los futuros profesores de Matemática pusieron en práctica cuando realizaron ciertas tareas asociadas al quehacer matemático y didáctico, en el contexto del curso de RPG_AC; curso que incorpora el uso sistemático de un software de Geometría Dinámica como el Cabri II y donde la autora ha estado involucrada como diseñadora y facilitadora del mismo. Por lo tanto, este estudio se ubica en el paradigma cualitativo interpretativo (Sabariego Puig, 2012), puesto que, desde este enfoque, "el énfasis se pone en la perspectiva de los participantes durante las interacciones educativas con un intento de obtener comprensiones en profundidad de casos particulares desde una perspectiva cultural e histórica" (p. 74).

Para abordar esta investigación, se acudió a una estrategia de *estudio de caso* (Yin, 2003), el cual estuvo focalizado en el análisis de las producciones de un grupo de futuros profesores de Matemática, quienes participaron en el curso de RPG_AC, como parte de su plan de formación especializada en la UPEL Maracay. Se trata de estudiar con profundidad el contexto de actuación y los contenidos del curso de RPG_AC. En este sentido, desde la perspectiva cualitativa, Miles y Huberman (1994) definen como caso un fenómeno de algún tipo que ocurre en un área de influencia. El caso queda así caracterizado por un foco y su entorno. En este trabajo, el foco es el curso de RPG_AC. El área de influencia está delimitada por el contexto, conceptos, participantes y tiempo, entre otros.

Procedimientos e Instrumentos

Dado que, en esta investigación se siguió un paradigma cualitativo interpretativo, la misma se desarrolló atendiendo a las fases propuestas por Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), las cuales son: (a) Fase preparatoria, (b)

Fase de Trabajo de Campo, (c) Fase Analítica y (d) Fase Informativa. Para estos autores, teniendo en cuenta el carácter continuo del proceso de investigación, estas fases “no tienen un principio y final claramente definidos, sino que se superponen y mezclan unas con otras, pero siempre en un camino hacia adelante en el intento de responder a las cuestiones planteadas en la investigación” (p. 63). Seguidamente, se describen cada una de las fases que conformaron esta investigación:

Fase preparatoria, la cual se sustentó en la reflexión en y sobre la práctica en torno a la problemática relacionada con la formación docente en el área de Geometría y su Didáctica, así como la revisión de fuentes documentales relacionadas con esta temática. Esta fase abarcó dos etapas no disjuntas: (a) la elaboración del proyecto de tesis doctoral, el cual fue revisado y confrontado ante tres investigadores activos en el ámbito de la Educación Matemática, con el propósito de valorar su calidad científica y viabilidad; (b) la planificación de las actividades a ser desarrolladas en el curso de RPG_AC durante el período académico 2011 – 1, teniendo como referencia los tres componentes del análisis didáctico (Gómez, 2007; Rico y Fernández-Cano, 2013) para la fase de diseño y siguiendo el esquema propuesto por Iglesias (2008) y que aparece reseñado en Ortiz, Iglesias y Paredes (2013).

Fase de trabajo de campo, coincidió en espacio y tiempo con el desarrollo del curso de RPG_AC durante el período académico 2011 – 1; sin embargo, como se comenta en el Capítulo VI, el diseño de la unidad didáctica con contenido geométrico por parte de los profesores en formación se siguió desarrollando en la Fase de Ejecución de Proyectos Educativos, bajo la orientación de la autora, con lo cual se produjo una prolongación del trabajo de campo inicialmente previsto. Esta fase abarcó las siguientes actividades:

*Revisión de fuentes documentales***:** Se realizó una revisión de fuentes documentales impresas y electrónicas relacionadas, entre otros, con los siguientes tópicos: (a) *La formación inicial de los profesores de Matemática*, teniendo en consideración los modelos del conocimiento profesional del profesor de Matemática, sus competencias profesionales (matemáticas y didácticas) y algunos modelos formativos; (b) La investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la

Geometría, con énfasis en los componentes y propiedades del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, el uso de los software de Geometría Dinámica en las clases de Matemática, la demostración en Geometría, y el análisis didáctico como herramienta para diseñar unidades didácticas con contenidos geométricos. Esta revisión permitió conocer los avances de la investigación sobre la demostración en ambientes de Geometría Dinámica y sustentar a cada uno de los componentes del curso de RPG_AC, así como analizar la información recabada durante el desarrollo de este curso. Los asuntos antes mencionados han sido dados a conocer en el Capítulo II (Referentes Teóricos).

Descripción detallada del curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora: Dado que en esta investigación el contexto de actuación ha jugado un papel relevante, ya que, el desarrollo y puesta en práctica de las competencias matemáticas y didácticas han estado asociados al uso de un SGD, la resolución de problemas matemáticos y la demostración matemática. Por ello, la autora, como diseñadora y facilitadora del curso de RPG_AC, empleó la noción de análisis didáctico (Gómez, 2007, Rico y Fernández-Cano, 2013), con el propósito de describir detalladamente el curso de RPG_AC (factores que fueron tomados en cuenta, alcance y abordaje del contenido geométrico estudiado, competencias matemáticas y didácticas que se pretendieron fueran puestas en prácticas por los participantes en el curso, los errores que pudieran cometer, las dificultades que pudieran confrontar, las estrategias y recursos didácticos que fueron empleados, la secuencia didáctica, la evaluación de los aprendizajes, etc.) y justificar la toma de decisiones didáctico – matemáticas. Esto ha permitido presentar en el Capítulo IV una caracterización del escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de RPG_AC, desde el punto de vista de la autora, atendiendo a sus roles de diseñadora, facilitadora y evaluadora de los aprendizajes.

Desarrollo del curso de RPG_AC: Representó la ocasión para desarrollar las actividades didácticas planificadas y recabar los insumos necesarios para analizar las competencias matemáticas y didácticas exhibidas por los participantes en el curso de RPG_AC cuando realizaron determinadas tareas. El curso se llevó a cabo durante el periodo académico 2011 – 1, con una duración de 16 semanas, de abril a julio de 2011. Dado que las clases se desarrollarían en el Laboratorio de Informática Nº 1 y teniendo en cuenta el número de computadoras disponibles, el cupo se fijó en quince (15) estudiantes; lográndose inscribir un total de trece (13) estudiantes, cuatro (4) hombres y nueve (9) mujeres, quienes se organizaron en pequeños grupos G_i para realizar las tareas planteadas, tal como se muestra en el Cuadro 17. Nótese que para los talleres nº 1 y 2 se conformaron seis (6) grupos, mientras que para el taller nº 3 y el diseño de la unidad didáctica con contenido geométrico, los participantes se reorganizaron en cuatro (4) grupos.

Cuadro 17
Estudiantes participantes en el curso de RPG_AC para el período académico 2011 – 1 y su organización en pequeños grupos.

Estudiante	Identificación	Sexo	Taller 1	Taller 2	Taller 3	Diseño UD
1	OB	F	G1	G1	G1	G1
2	ER	F	G6	G6	G2	G2
3	MR	F	G6	G6	G4	G4
4	KV	M	G4	G4	G3	G3
5	ZT	F	G5	G5	G3	G3
6	HB	M	G2	G2	G4	G4
7	WG	M	G2	G2	G2	G2
8	AG	F	G1	G1	G1	G1
9	YC	F	G2	G2	G4	G4
10	AO	F	G3	G3	G2	G2
11	GG	F	G5	G5	G1	G1
12	SR	M	G4	G4	G3	G3
13	CG	F	G3	G3	G2	G2

En el Capítulos IV se han reseñado las actividades didácticas que conformaron el curso de RPG_AC, las cuales estuvieron conformadas por tres (3) talleres de resolución de problemas geométricos asistida por el uso de un SGD como el Cabri II; además del diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico para la educación media, aplicando la noción de análisis didáctico (ver Capítulo VI).

Es importante señalar que, atendiendo al plan de estudio de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay, a los participantes les tocaba inscribir un curso optativo de integración y ellos decidieron inscribir el curso de RPG_AC; además, algunos de ellos habían cursado con la autora los cursos obligatorios de Geometría I y Geometría II y habían mostrado interés hacia el estudio de la Geometría, mediante la disposición a realizar tareas como las descritas en Ortiz, Iglesias y Paredes (2013), en las cuales se utilizaron materiales y recursos tales como: juego geométrico, geoplano, plantillas con diferentes tramas, papel para plegar, tangram chino y SGD; también conocían de la existencia del Cabri II, ya que, en los cursos de Geometría, éste había sido utilizado como pizarra electrónica, para ilustrar cómo realizar algunas construcciones geométricas con regla y compás.

Recolección de la información: Con el propósito de llevar a cabo el análisis de las competencias matemáticas y didácticas de los futuros docentes de Matemática cuando abordaron la demostración matemática en un ambiente de Geometría Dinámica, se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de la información:

1. Archivos Cabri: Esto permitió llevar un registro de cada una de las construcciones geométricas realizadas por los participantes, en función de las actividades propuestas en cada uno de los tres talleres que formaron parte del curso de RPG_AC, haciendo uso del Cabri II Plus. Según Bainville (2003), este software de Geometría Dinámica genera dos tipos de archivos:

- *Los de extensión .fig*, los cuales consisten en un documento compuesto por una figura construida, haciendo uso de la barra de herramientas, sobre una hoja de papel virtual de un metro cuadrado (1 m por 1 m); pueden guardarse y, luego, abrirse para explorar la construcción realizada o revisarla con la opción revisar la construcción, tal como se muestra en el Gráfico 9. Para cada uno de los tres talleres que conformaron el curso de RPG_AC, los participantes realizaron construcciones geométricas con el Cabri II y las guardaron – debidamente identificadas - en un pen drive, quedando a disposición de la autora para su posterior revisión y análisis.

- *Los de extensión .mac*, permiten realizar y guardar construcciones consistentes con regla y compás, a partir de la identificación de los objetos iniciales y finales que la conforman, con el propósito de aplicar tal macroconstrucción en la elaboración de otras construcciones geométricas, sin necesidad de realizar los pasos intermedios (ver Gráfico 9); las principales opciones de la barra de herramientas del Cabri II Plus está conformada por macroconstrucciones. En el taller nº 1, los participantes realizaron algunas macroconstrucciones, con el propósito de reconocer su utilidad en la elaboración de construcciones más complejas.

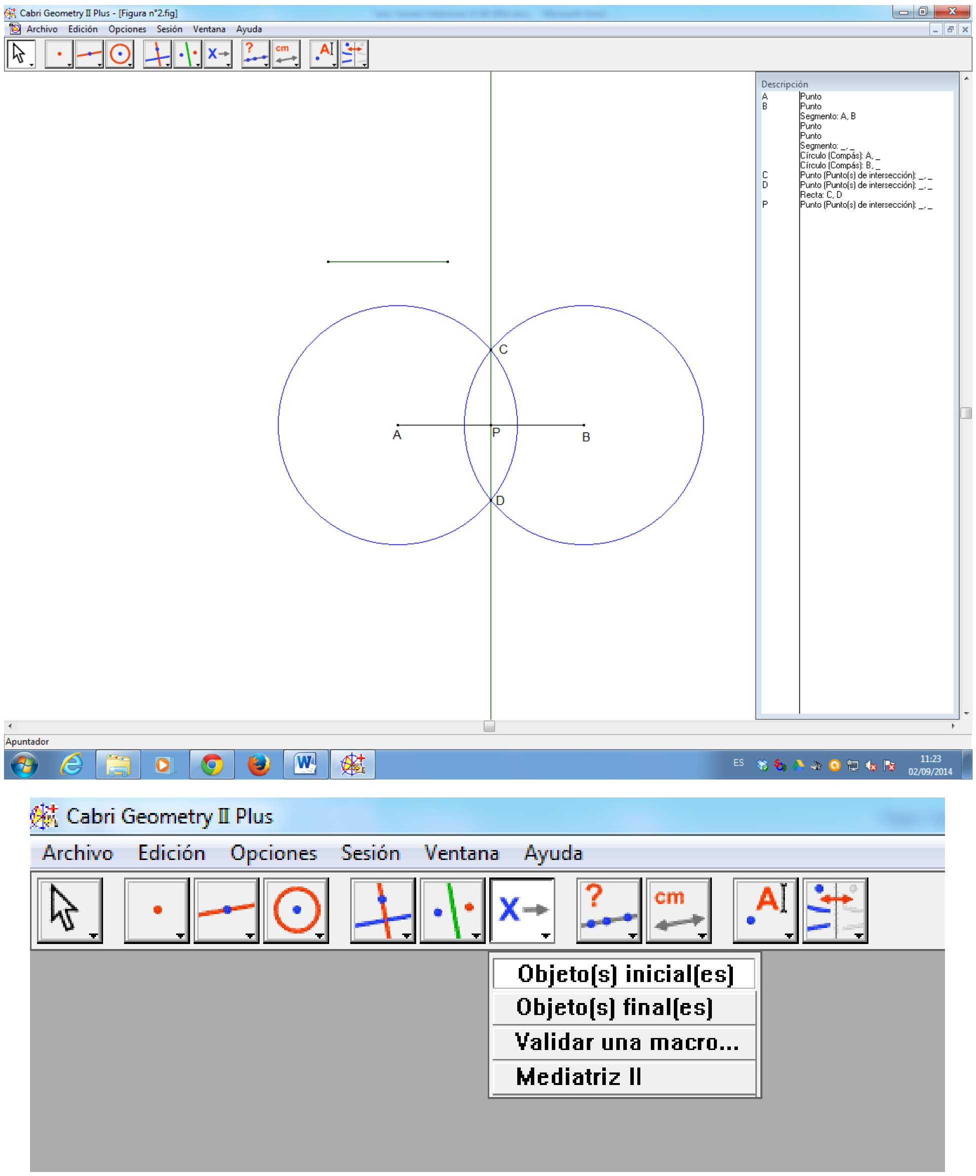


***Gráfico 9*. Imagen en pantalla de un archivo de extensión .fig (parte superior), mostrando la descripción, paso por paso, de la construcción de la mediatriz de un segmento; en la parte inferior, aparece desplegado el menú macroconstrucciones con la macro Mediatriz II generada a partir de la construcción realizada.**

2. *Informes de trabajo:* Permitieron recoger información acerca del trabajo de cada uno de los participantes cuando resolvieron un problema geométrico, realizaron una demostración o diseñaron una actividad didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en el ámbito escolar. Los informes escritos consistieron en documentos elaborados en Word, siguiendo las actividades propuestas en cada uno de los talleres de RPG o el esquema propuesto por Iglesias (2008) para el diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico. Para la elaboración de los informes escritos se tomó como base las actividades desarrolladas en el aula, discutidas con la facilitadora del curso de RPG_AC y los compañeros de clases, y la misma se complementó con el trabajo fuera del aula que realizaron cada uno de los participantes. Cabe decir que, al inicio del curso, cada uno de ellos recibió un CD con el Cabri II Plus, con el propósito de instalarlo en su computadora personal y así facilitarle la familiarización con este SGD y la realización de las tareas propuestas.

3. *Grabaciones de audio y video:* Permitieron llevar un registro de las exposiciones realizadas por los participantes cuando presentaron sus producciones ante todo el grupo, como cierre de cada una de las tareas realizadas. Para llevar a cabo tales grabaciones, se contó con la participación de los propios participantes en el curso de RPG_AC, bajo la orientación de la autora y haciendo uso de una pequeña cámara digital, con el propósito de registrar en audio y video las intervenciones de los profesores en formación cuando mostraban una construcción realizada con el Cabri II y trataban de dar algún tipo de justificación en cuanto a su consistencia o validar alguna conjetura formulada. Cabe señalar la disposición de los participantes a ser grabados, ya que, al inicio del curso de RPG_AC, la facilitadora les dio a conocer el proyecto de tesis doctoral, les explicó como sus producciones serían, a posteriori, objeto de análisis con fines investigativos y ellos aceptaron participar en la investigación. Estas grabaciones le permitieron a la autora complementar la información recabada a través de los informes de trabajo y los archivos .fig, ya que, en las mismas quedaban registrados comentarios o intercambios de ideas que no se mostraban en las producciones escritas.

Fase analítica, consistió en el análisis cualitativo de las producciones de los futuros docentes de Matemática participantes en el curso de RPG_AC; por ello, se procedió al análisis de las producciones orales y escritas de los participantes tanto en lo archivos Cabri, los informes de trabajo y las grabaciones de audio y video; con el propósito de identificar, describir y analizar las competencias matemáticas y didácticas puestas en práctica cuando realizaron ciertas tareas.

Asimismo, se describieron los usos que le dieron los futuros docentes de Matemática a los SGD en el contexto del curso de RPG, a través de las producciones que quedaron registradas en los informes de trabajo y los archivos que quedaron grabados en el computador, teniendo en cuentan los botones de herramienta utilizados al realizar una construcción geométrica en un ambiente de Geometría Dinámica, así como las macro-construcciones realizadas por los participantes o empleadas por ellos. Cabe señalar que los procedimientos empleados por los usuarios de este SGD han podido ser reconstruidos gracias a ciertas herramientas disponibles en este tipo de software, como la llamada opción “revisar la construcción” o la opción “mostrar la descripción” con las cuales se genera un reporte de los pasos seguidos al realizar una construcción geométrica en Cabri II (tal como se mostró en el Gráfico 9).

En el Capítulo V, se muestra como se llevó a cabo el análisis de las competencias matemáticas puestas en práctica por los profesores en formación cuando realizaron las actividades propuestas en los tres talleres que conformaron el curso de RPG_AC; mientras que, en el Capítulo VI, a partir de la revisión de las unidades didácticas con contenidos geométricos diseñadas por los participantes en el curso de RPG_AC, se presenta el análisis de las competencias didácticas a la luz de los planteamientos formulados por Azcárate (1998), Godino (2009) y Niss y Højgaard (2011).

En el análisis realizado se procedió a una triangulación de datos, donde lo obtenido en las producciones orales y escritas – los archivos .fig, los informes de trabajo y las grabaciones de audio – video – se confrontó, a la luz de las interrogantes y objetivos que guiaron esta investigación, así como los referentes teóricos considerados como se muestra en el Gráfico 10.

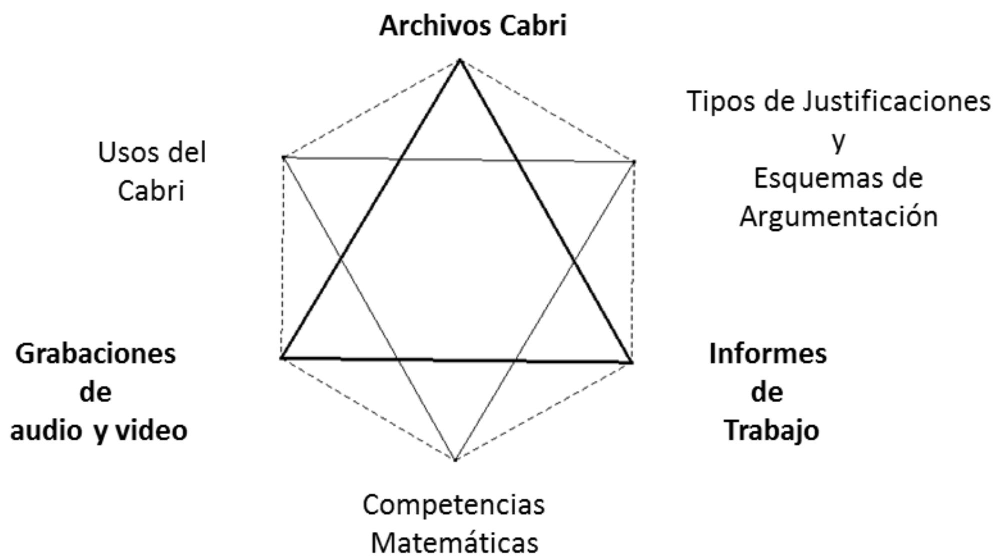


***Gráfico 10*. Triangulación de datos aplicada en esta investigación.**

Fase informativa, consistió en la redacción del reporte de investigación que se da a conocer en este documento.

En el Gráfico 11, se muestra un esquema del abordaje metodológico empleado en el desarrollo de esta investigación, en atención a las fases antes descritas.

Síntesis y reflexión sobre el abordaje metodológico

Se llevó a cabo un estudio bajo la modalidad de *Investigación de Campo* (UPEL, 2006), la misma siguió *una estrategia de estudio de caso* (Yin, 2003) y estuvo focalizada en el análisis de las producciones de un grupo de futuros profesores de Matemática, quienes participaron en el curso de RPG_AC. Se asumió un *paradigma cualitativo interpretativo* y, en su desarrollo, se siguieron las cuatro fases propuestas por Rodríguez Gómez et al. (1999), las cuales fueron: (a) *Fase preparatoria* (elaboración del proyecto de tesis doctoral y planificación del curso de RPG_AC); (b) *Fase de Trabajo de Campo* (revisión de fuentes documentales, desarrollo del curso de RPG_AC y recopilación de la información); (c) *Fase Analítica* (análisis cualitativo de las producciones de los futuros docentes de Matemática participantes en el curso de RPG_AC); (d) *Fase Informativa* (redacción del reporte de investigación).

La recolección e interpretación de la información han estado influenciadas por la experiencia académico – investigativa de la autora como diseñadora y profesora del curso de RPG_AC. En este sentido, es innegable que ella se encuentra familiarizada con las interacciones que suelen producirse con los participantes en este curso y de ellos entre sí, lo cual le facilitó centrar la atención en ciertos episodios registrados en las grabaciones de audio y video.

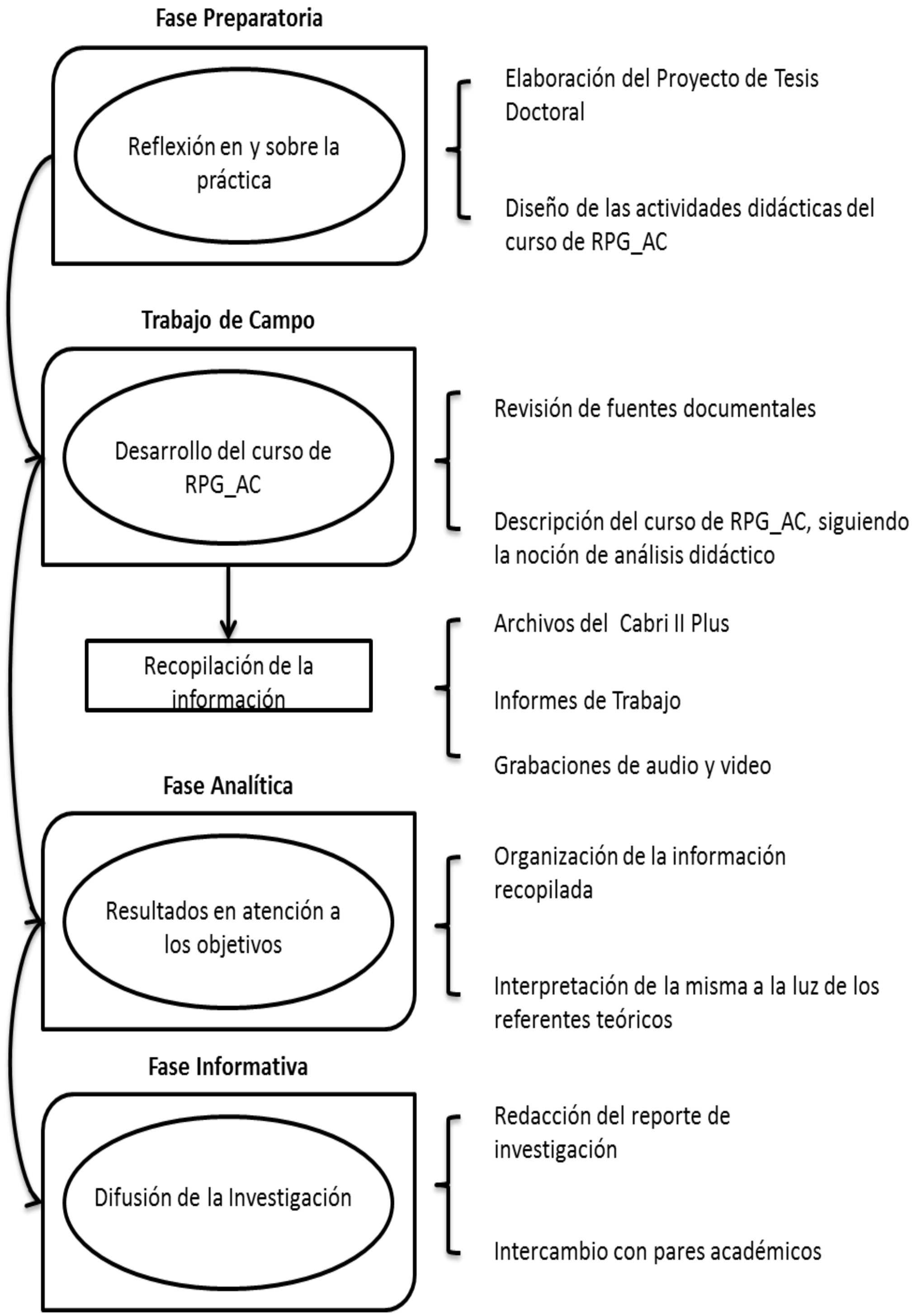


***Gráfico 11*. Abordaje metodológico empleado en esta investigación, siguiendo las fases propuestas por Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), para una investigación interpretativa.**

CAPÍTULO IV

ESCENARIO Y EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE

Caracterización del escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora

Caracterizar es determinar los atributos peculiares del curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora (RPG_AC), visto éste como el escenario en donde se han desarrollado las diversas experiencias de aprendizaje que son objeto de estudio en esta investigación, teniendo como base las producciones de los participantes. Para llevar a cabo tal caracterización se ha tenido en cuenta la noción de análisis didáctico (Gómez, 2007; Rico y Fernández Cano, 2013), siguiendo el esquema propuesto por Iglesias (2008) (ver Gráfico 12) para diseñar y poner en práctica una serie de unidades didácticas en los cursos de Geometría I y Geometría II de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay, lo cual aparece reseñado en Ortiz, Iglesias y Paredes (2013).

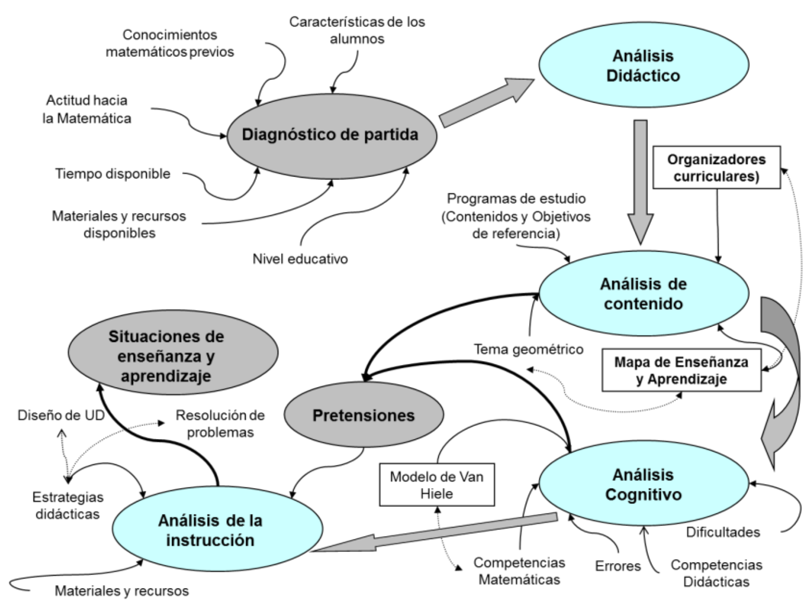


***Gráfico 12.* Pasos seguidos en el diseño de las actividades didácticas desarrolladas en el curso de RPG_AC.**

Para planificar las actividades didácticas que serían desarrolladas en el curso de RPG_AC, en atención al modelo propuesto por Luengo González y otros (1997), se llevó a cabo un *diagnóstico de partida,* teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- *Características de los alumnos*: En el curso de RPG_AC, se trabaja con grupos heterogéneos en cuanto a edad, sexo, procedencia, experiencia laboral y preparación académica previa.

- *Conocimientos matemáticos previos*: Dado que el curso de RPG_AC es un curso optativo de integración correspondiente al componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay, éste tiene como prerrequisitos los cursos obligatorios de Geometría I y Geometría II, en los cuales se aborda el estudio de la Geometría Plana, partiendo de los conceptos no definidos de punto, recta y plano, procurando enfatizar en las relaciones existentes entre ellos, las cuales se expresan a través de los axiomas o postulados de incidencia y de orden; de esta manera, es posible presentar e interpretar las definiciones de semirrecta, semirrectas opuestas, segmento de recta, punto medio de un segmento, etc. Luego, se estudian las definiciones y propiedades básicas de ángulos, triángulos y cuadriláteros; previo al estudio de los cuadriláteros, se estudian las definiciones y propiedades vinculadas con la relación de paralelismo. Esto atendiendo a lo establecido en el programa del curso de Geometría I (ver Anexo B-1).

Seguidamente, en el curso de Geometría II, se estudian las definiciones y propiedades básicas relacionadas con la semejanza de triángulos y las desigualdades geométricas. Además, se deducen las fórmulas para el cálculo de área y perímetro de figuras poligonales y su aplicación en la resolución de problemas. También se estudian las definiciones y propiedades básicas relacionadas con la circunferencia, el círculo y sus elementos. Cabe señalar que, en el rediseño del curso de Geometría II, se incorporó una unidad didáctica, en la cual se realizan ciertas construcciones con regla y compás y su correspondiente validación. Finalmente, se revisan y discuten las definiciones y propiedades básicas relacionadas con los cuerpos geométricos (ver Anexo B-2).

- *Actitud hacia la Matemática*: Tratándose de un curso optativo de integración, los estudiantes participantes eligieron inscribirlo, una vez que se informaron con la facilitadora cuál sería la orientación del curso, manifestando su interés hacia el uso de los SGD en la resolución de problemas geométricos, ya que, en los cursos de Geometría, el Cabri II había sido utilizado como pizarra electrónica para ilustrar ciertas definiciones y propiedades de la Geometría Plana. Además, la facilitadora conocía de su motivación intrínseca hacia el estudio de la Matemática y su disposición para la realización de tareas matemáticas no rutinarias.
- *Tiempo disponible*: Un (01) período académico, el cual abarcó dieciséis (16) semanas con cinco (05) horas de clases a la semana; para un total de ochenta (80) horas por período. Esto dió una disponibilidad de 16 horas de clases para el desarrollo de cada una de las cinco (05) unidades didácticas que conforman el programa del curso.
- *Materiales y recursos didácticos disponibles*: En el curso de RPG_AC, se utilizó un software de Geometría Dinámica como lo es el Cabri Géomètre II Plus y, además, se incorporó el uso del doblado de papel como otra opción válida para construir figuras geométricas; para el desarrollo del curso, se contó con doce (12) computadoras disponibles en el Laboratorio 1 de la especialidad de Informática de la UPEL Maracay. Además, se dispuso de una computadora portátil y un video beam, con el propósito de proyectar y compartir con todo el grupo las actividades realizadas.
- *Nivel Educativo*: Se trata de un curso de pregrado perteneciente al componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay que reúne las siguientes características: (a) Ámbito: formación docente; (b) Nivel de cobertura: un (1) curso; (c) Modalidad: Presencial; (d) Diseño curricular vigente: Diseño UPEL 1996; (e) Perfil del egresado: Desarrollo de competencias matemáticas y didácticas asociadas a la resolución de problemas, el uso de materiales y recursos manipulables y el diseño de unidades didácticas con contenido geométrico.

En el Gráfico 13, a modo de resumen, se muestran los diferentes aspectos que fueron considerados para la realización del diagnóstico de partida, lo cual contribuyó al conocimiento de la situación personal y académica inicial de los participantes en el curso de RPG_AC, así como de los diferentes factores que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

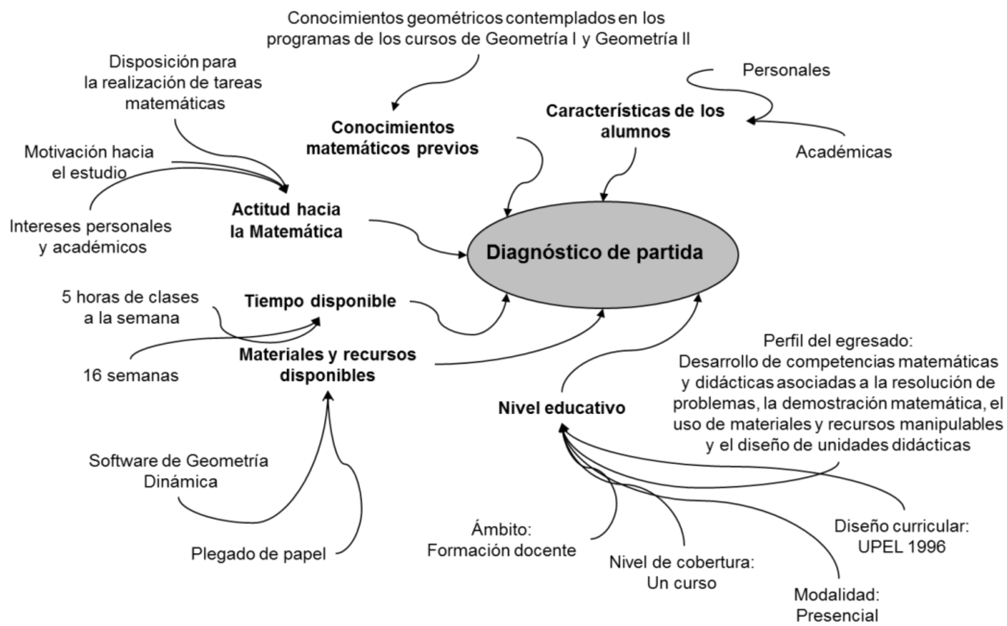


Gráfico 13. **Diferentes aspectos que fueron considerados para la realización del diagnóstico de partida.**

Una vez realizado el diagnóstico de partida, se procedió a efectuar el *análisis del contenido* de los temas geométricos a ser estudiados en el curso de RPG_AC, haciendo uso del mapa de enseñanza y aprendizaje propuesto por Orellana Chacín (2002). Para comenzar se revisaron los programas de los cursos obligatorios de Geometría I y Geometría II, los cuales fueron rediseñados por Iglesias (2008), atendiendo a la necesidad de superar el seguimiento de un enfoque rigurosamente axiomático en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Euclidiana. Para lograrlo, se consideró, por un lado, partir de la exploración gráfica de ideas geométricas, trabajando con el dibujo a mano alzada y construcciones realizadas con diferentes materiales (geoplano, plantillas, papel para plegar, juego geométrico y software de Geometría Dinámica) y, por otro, plantear problemas, posiblemente vinculadas con la evolución histórica de la Geometría o situaciones del mundo real, que propicien la progresiva formalización del conocimiento geométrico en el contexto de una teoría axiomática. Esto permitió identificar los conocimientos previos que deberían haber alcanzado los participantes en los cursos del área de Geometría, como se ilustra en los mapas conceptuales sobre los tópicos geométricos estudiados en los cursos de Geometría I y Geometría II (Anexos C-1 y C-2).

Seguidamente, teniendo en cuenta la relación establecida entre la noción de organizadores del currículo y el mapa de enseñanza y aprendizaje, la autora – en su rol como planificadora y facilitadora del curso de RPG_AC – estableció los aspectos del MEA en los cuales se enfatizaría al estudiar tópicos de Geometría Euclidiana, como se observa en el Gráfico 14. Se destaca el abordaje de los temas geométricos, a partir de la resolución de problemas, partiendo de la realización de construcciones geométricas con regla y compás en un AGD y con doblado de papel y su exploración, con el propósito de establecer relaciones entre los elementos que las conforman, formular conjeturas y procurar validarlas. Por ello, como se muestra en el Gráfico 15, se seleccionaron los siguientes temas geométricos: (a) Construcciones geométricas con regla y compás, (b) construcciones geométricas con doblado de papel, (c) Equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura geométrica y (d) Cuadriláteros concíclicos y cuadriláteros inscribibles. Temas que permitieran poner en juego los conocimientos geométricos – conceptuales y procedimentales – alcanzados en los cursos del área de Geometría.

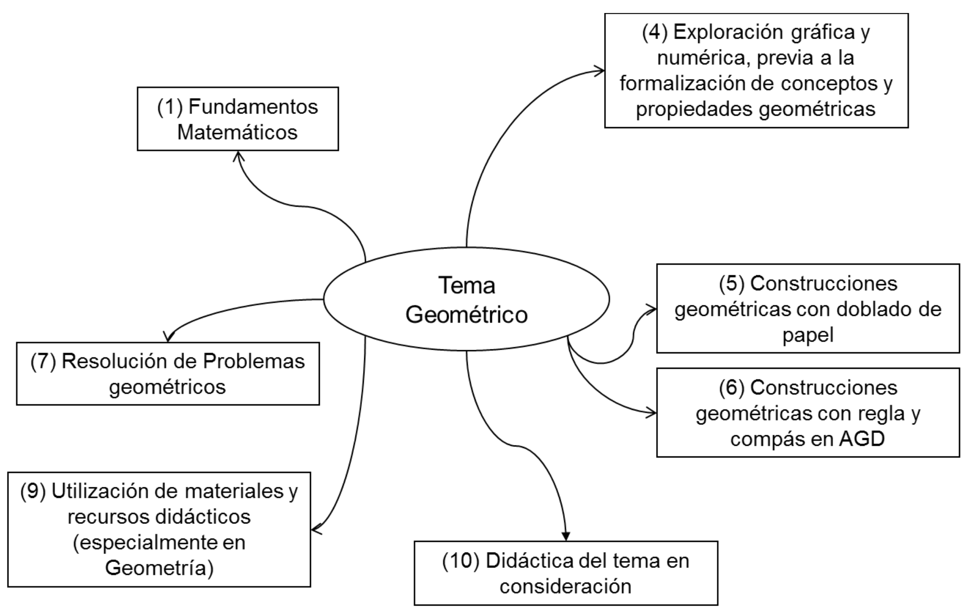


***Gráfico 14*. Mapa de enseñanza y aprendizaje para el curso de RPG_AC.**

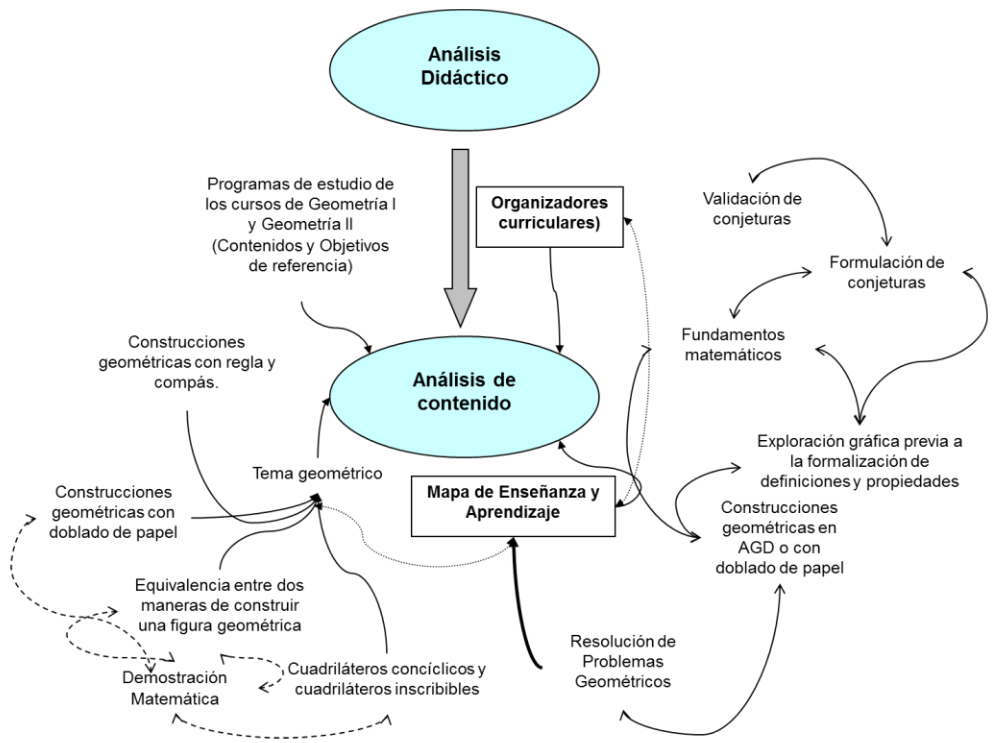


***Gráfico 15*. Aspectos considerados en el análisis de contenido de los temas geométricos abordados en el curso de RPG_AC.**

Una vez efectuado, el análisis del contenido de cada uno de los temas geométricos a ser estudiados en el curso de RPG_AC, se procedió a realizar el *análisis cognitivo*, teniendo como insumos los resultados del diagnóstico de partida y del análisis del contenido geométrico y como puntos de referencia las competencias matemáticas y las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele, los errores que los estudiantes pudieran cometer y las dificultades que confrontarían teniendo como base la experiencia profesional de la autora y los trabajos de investigación realizados por otros educadores matemáticos. En el Gráfico 16, se muestran los diferentes aspectos que intervienen en el análisis cognitivo y las relaciones existentes entre ellos.

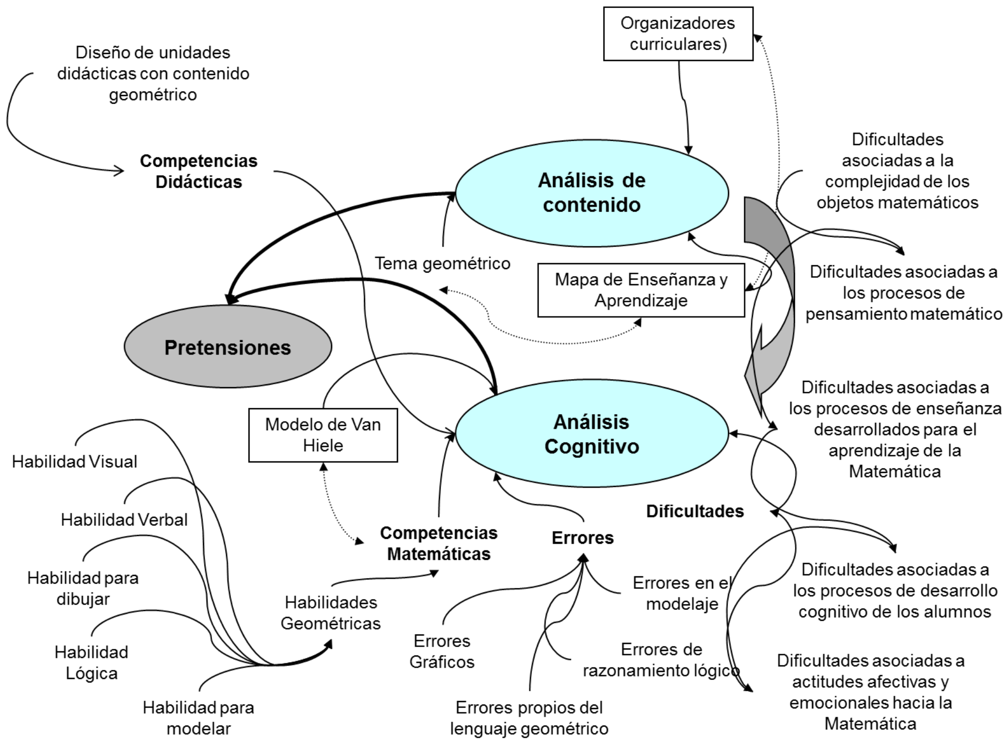


***Gráfico 16*. Aspectos considerados en el análisis cognitivo y las relaciones existentes entre ellos.**

En el Cuadro 18, se muestran las habilidades geométricas (Hoffer, 1981) asociadas a las distintas competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2011) y los primeros cuatro niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998). Nótese que las competencias matemáticas de argumentar, comunicar, modelar y representar se corresponderían con las habilidades geométricas propuestas por Hoffer: lógica, verbal, para modelar y dibujo.

Cuadro 18
Habilidades geométricas asociadas a las competencias matemáticas y los niveles de razonamiento geométrico

Competencias Matemáticas	**Reconocimiento**	**Análisis**	**Relaciones, clasificación u ordenamiento**	**Deducción**
	1	**2**	**3**	**4**
Pensar y Razonar (PR)	Entienden los conceptos geométricos, pero no los aplican (**PR1.1**). Las características detectadas en una figura no son identificadas en otras que también las poseen (**PR1.2**).	Utilizan los conceptos matemáticos (**PR2.1**). Reconocen los elementos que conforman una figura, pero no establecen relaciones entre ellos (**PR2.2**). No son capaces de reunir ciertas figuras atendiendo a un criterio de clasificación (**PR2.3**).	Reconocen las relaciones existentes entre diferentes tipos de figuras (**PR3.1**). Reconocen las propiedades comunes de diferentes tipos de figura (**PR3.2**).	Comprenden las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas (**PR4.1**). Utilizan información de una figura para deducir más información (**PR4.2**). Deducen consecuencias a partir de la información dada (**PR4.3**). Deducen propiedades de las figuras geométricas a partir de la información dada (**PR4.4**). Utilizan las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones (**PR4.5**).
Argumentar (A) (Habilidad Lógica)	Siguen y justifican los cálculos aritméticos (**A1.1**).	Siguen ciertas formas de argumentación matemática (**A2.1**).	Siguen y validan el encadenamiento de argumentos matemáticos de diferentes tipos (**A3.1**).	Siguen, validan y elaboran argumentos matemáticos de diferentes tipos (**A4.1**).

Cuadro 18 (cont.)

Competencias Matemáticas	**Reconocimiento**	**Análisis**	**Relaciones, clasificación u ordenamiento**	**Deducción**
	1	**2**	**3**	**4**
Comunicar (C) (Habilidad verbal)	Asocian el nombre correcta con una figura dada (**C1.1**). Interpretan frases que describen figuras. (**C1.2**) Describen figuras teniendo en cuenta su semejanza con objetos del mundo real (**C1.3**).	Describen adecuadamente varias propiedades de una figura (**C2.1**).	Establecen definiciones con claridad y precisión (**C3.1**). Formulan frases que muestran relaciones entre figuras o entre los elementos que las conforman (**C3.2**).	Reconocen que información da un problema y qué información hay que hallar (**C4.1**).
Modelar (M) (Habilidad para modelar)	Identifican figuras geométricas en objetos físicos (**M1.1**).	Reconocen propiedades geométricas de objetos físicos (**M2.1**).	Explican fenómenos susceptibles de ser estudiados matemáticamente (**M3.1**).	Resuelven problemas que establezcan relaciones entre objetos físicos y objetos geométricos (**M4.1**).
Plantear y Resolver Problemas (P y RP)	Responden preguntas en contextos trabajados con anterioridad (**P y RP1.1**).	Resuelven problemas en los que se presentan todos los datos (**P y RP2.1**).	Aplican estrategias conocidas para resolver un problema (**P y RP3.1**).	Disponen de sentido para la heurística y plantean problemas (**P y RP4.1**).

Cuadro 18 (cont.)

Competencias Matemáticas	**Reconocimiento**	**Análisis**	**Relaciones, clasificación u ordenamiento**	**Deducción**
	1	**2**	**3**	**4**
Representar (R) (Habilidad de dibujar)	Realizan dibujos de figuras, nombrando adecuadamente sus partes (**R1.1**).	Expresan en un dibujo la información verbal dada (**R2.1**). Utilizan las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla (**R2.2**).	Construyen una figura, conociendo sus partes componentes y las relaciones existentes entre ellas (**R3.1**).	Deducen a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica (**R4.1**). Reproducen una figura o cuerpo geométrico a partir de modelos dados (**R4.2**). Reconocen cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura (**R4.3**).
Lenguaje Simbólico (LS)	Realizan operaciones básicas (**LS1.1**).	Utilizan algoritmos y fórmulas (**LS2.1**). Manejan enunciados con símbolos (**LS2.2**).	Comprenden las relaciones entre el lenguaje formal y el lenguaje natural (**LS3.1**).	Representan situaciones reales mediante símbolos (**LS4.1**).
Uso de materiales o recursos como la regla y el compás, el doblado de papel y los SGD (M y R)	Reconocen las operaciones básicas (o las acciones) que pueden realizarse con los materiales o recursos disponibles (**M y R1.1**).	Utilizan los materiales o recursos para construir figuras geométricas, a partir de las condiciones dadas (**M y R2.1**)	Exploran las construcciones realizadas, con el propósito de identificar invariantes geométricas (es decir, relaciones entre los elementos que conforman dicha figura) (**M y R3.1**).	Demuestran dominio de los materiales y recursos y los emplean para diseñar actividades con contenido geométrico (**M y R 4.1**).

Asimismo, es importante identificar los errores que los estudiantes pudieran cometer cuando se enfrentan a una tarea matemática. En este trabajo, en atención a la clasificación de los errores en Geometría presentada por Franchi y Hernández de Rincón (2004), se enfatizó en: errores gráficos, errores propios del lenguaje geométrico, errores de razonamiento lógico y errores en el modelaje. En el siguiente cuadro, se presentan los errores más comunes atendiendo a tal clasificación:

Cuadro 19
Errores más comunes en Geometría que pudieran cometer los estudiantes

Tipos de errores en Geometría	Errores más comunes
Errores gráficos	Dibuja una figura geométrica que no se corresponde con el enunciado del problema geométrico dado. No dibuja una figura, dado un problema geométrico. Usa, en forma incorrecta, la información dada gráficamente. Pasa por alto información relevante de una figura geométrica, conocida su representación gráfica. Realiza construcciones geométricas con regla y compás inconsistentes. Utiliza, en forma incorrecta, materiales y recursos didácticos para dibujar, medir, construir, modelar, etc. Dibuja las figuras geométricas en posiciones clásicas. Dibuja solamente figuras estereotipadas.
Errores propios del lenguaje geométrico	Usa en forma inadecuada las notaciones y los términos geométricos. Describe en forma defectuosa las construcciones geométricas realizadas. Interpreta inadecuadamente un enunciado verbal, dado en forma oral o por escrito. Interpreta y usa inadecuadamente una definición geométrica.

Cuadro 19 (cont.)

Tipos de errores en Geometría	Errores más comunes
Errores de razonamiento lógico	Dada una proposición, no logra identificar la hipótesis y la tesis. Dada una proposición, confunde la hipótesis con la tesis, y viceversa. Añade condiciones que no están dadas en la hipótesis de una proposición. Omite cierta (s) condición (es) dadas en la hipótesis de una proposición. Demuestra cierta (s) condición (es) dadas en la tesis de una proposición. Aplica una propiedad conocida (axioma o teorema), sin que se tengan las condiciones requeridas en la hipótesis para su aplicación. Asume que el recíproco de una proposición verdadera, también es verdadero. Uso incorrecto de los métodos de demostración indirectos (contra - recíproco y por reducción al absurdo).
Errores en el modelaje	Transforma defectuosamente una situación problémica real en un problema geométrico. Aplica defectuosamente conocimientos propios de otras disciplinas en un problema geométrico dado.

Cabe señalar que, en los Cuadros 18 y 19, no se ha pretendido presentar un listado exhaustivo de los aspectos allí considerados (habilidades geométricas y errores en Geometría).

El último aspecto considerado al momento de realizar el análisis cognitivo fue el de las dificultades que confrontarían los estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Aquí, la autora siguió la clasificación de las dificultades propuesta por Socas (1997):

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos*: Los objetos matemáticos se caracterizan por ser entes abstractos y, ende, cuando se habla de la manipulación de objetos matemáticos, es preciso tomar en cuenta que ésta se hace a nivel mental, a través del manejo de definiciones y propiedades matemáticas; en cambio, cuando se habla de la manipulación física de objetos matemáticos, lo que se está “manipulando” son modelos de diversa índole. Según Segovia y Rico (2001, p. 93), un modelo es “una maqueta o esquema de la realidad, que se elabora para facilitar la comprensión y estudio de su complejidad”. El uso adecuado de modelos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática propicia la adquisición de conceptos y la comprensión de propiedades por parte de los estudiantes; en caso que, esto no sea así, los estudiantes se limitan a memorizar y repetir (aprendizaje memorístico y repetitivo). Asimismo, la comprensión y comunicación de las ideas matemáticas exige el dominio de un lenguaje formal (terminología, notaciones, reglas de inferencia, etc.) que, en muchas ocasiones, los estudiantes no poseen. Esto dificulta la comprensión de los temas matemáticos.

- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*: El quehacer matemático en el área de Geometría exige la realización de tareas intelectuales tales como: efectuar construcciones geométricas con diferentes materiales y explorarlas, identificar patrones y regularidades, formular conjeturas y validarlas, ya sea demostrándolas o rechazándolas (dar un contraejemplo), dar e interpretar definiciones geométricas, comprender y aplicar correctamente propiedades geométricas, etc. Por ello, el estudio de la Matemática exige el desarrollo y la puesta en práctica de procesos de pensamiento matemático tales como: definir, clasificar, conjeturar y demostrar, que están más allá de la mera memorización y repetición. Así, el grado de exigencia, desde el punto de vista intelectual, que poseen estas actividades propias del quehacer matemático, en muchas ocasiones, dificulta el aprendizaje de la Geometría.

- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la Matemática*: Algunas dificultades confrontadas por los estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y, en especial, de la Geometría se deben a la metodología didáctica puesta en práctica por el profesor. Un enfoque rigurosamente axiomático del conocimiento geométrico en las clases de Geometría genera dificultades a los estudiantes en cuanto a su debida comprensión, ya que, sólo se centra en los contenidos y su organización en el seno de una teoría axiomática y, por ello, no se toma en cuenta la progresiva evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes. En ciertas ocasiones, los contenidos son tratados con énfasis en los aspectos métricos (cálculos de áreas y perímetros), haciendo uso de clases expositivas, con escaso manejo de materiales didácticos manipulativas; de modo que, los estudiantes calculan el área de una región triangular, pero no son capaces de identificar correctamente la base y la altura de un triángulo. También, la representación gráfica de figuras en posiciones clásicas por parte del profesor propicia que los estudiantes dejen de reconocerlas cuando estas figuras cambian de posición o que centren su atención en atributos no relevantes de una figura.

- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*: En atención al modelo de Van Hiele, el razonamiento geométrico de una persona evoluciona – en forma progresiva – a través de cinco niveles: reconocimiento, análisis, clasificación, deducción y rigor lógico; evolución que se produce en función de las experiencias de enseñanza y aprendizaje por las cuales haya pasado. De modo que, un estudiante en los dos primeros niveles de razonamiento confrontará dificultades para seguir la demostración formal de un teorema, por lo cual es importante que el profesor le proponga tareas matemáticas que le ayuden a ir desarrollando y poniendo en práctica habilidades geométricas asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la Matemática*: Según Socas (1997), a muchos estudiantes no les gusta la Matemática, debido a diversos factores, entre los cuales señala los siguientes: la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de Matemática hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia la Matemática que le son transmitidas. Por ello, en muchas ocasiones, el miedo, la tensión y el rechazo hacia la Matemática les dificulta la comprensión del conocimiento matemático; por ello, es común que los alumnos se "bloqueen" cuando estudian un tema matemático.

Por lo antes expuesto, en el curso de RPG, se pretende que los profesores en formación sean capaces de: (1) desarrollar y poner en práctica habilidades geométricas asociadas a los cuatro primeros niveles de razonamiento geométrico cuando aborden el estudio de un tema geométrico, (2) percatarse de los errores que cometen y, además, sean capaces de superarlos y (3) superar las dificultades que llegasen a confrontar durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

La autora – en su condición de diseñadora de las unidades didácticas con contenidos geométricos y teniendo en cuenta los temas a ser estudiados y los objetivos de aprendizaje que se pretende sean alcanzados por los profesores en formación – procedió a diseñar situaciones de enseñanza y aprendizaje centradas en la resolución de problemas geométricos y el uso de materiales y recursos manipulables. En el Gráfico 17, se ilustra cómo se llevó a cabo el *análisis de la instrucción.*

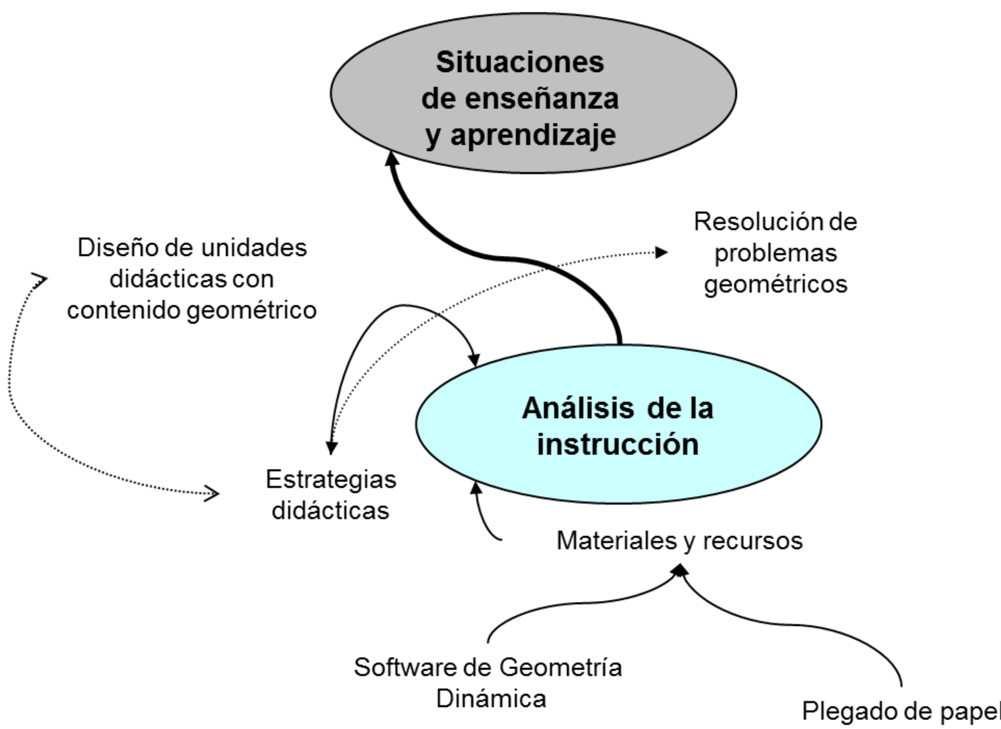


Gráfico 17. **Aspectos considerados en el análisis de la instrucción y las relaciones existentes entre ellos.**

En este orden ideas, a continuación se abordara la caracterización de las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de RPG_AC, teniendo como referencia las actividades propuestas en los tres (3) talleres realizados durante el período académico 2011 – 1, como se muestra en el Cuadro 20:

Cuadro 20
Actividades didácticas propuestas en los talleres que conformaron el curso de RPG_AC

Fases de Aprendizaje	Taller nº 1	Taller nº 2	Taller nº 3
Información	Revisar una presentación sobre la caracterización y relevancia histórica de las construcciones geométricas con regla y compás en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.	Leer y analizar el artículo "*Explorando ángulos y triángulos con doblado de papel*" (Arrieche e Iglesias, 2010).	Siguiendo el esquema de construir, explorar, conjeturar y validar, se plantearon problemas relacionados con el estudio de las definiciones y propiedades de los cuadriláteros concíclicos o circunscribibles y cuadriláteros inscribibles.
Orientación Dirigida	Realizar algunas construcciones con regla y compás, haciendo uso del Cabri – Géomètre II y, luego, elaborar las macros correspondientes.	Realizar la construcción de la herramienta triangular tanto con doblado de papel como en un ambiente de Geometría Dinámica.	
Explicitación	Analizar las construcciones geométricas con regla y compás previamente realizadas, lo cual implicaba la identificación de las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de tales construcciones	Analizar las construcciones geométricas previamente realizadas y dar respuesta a las preguntas planteadas en el artículo.	
Orientación Libre	Aplicar los conocimientos geométricos en la realización de construcciones geométricas con regla y compás, dados los objetos iniciales y los objetos finales, sin presentar, en forma explícita, un procedimiento que conduzca a una construcción consistente.	Seleccionar la construcción de un objeto geométrico con doblado de papel y, luego, realizar la construcción equivalente con regla y compás en un AGD.	
Integración	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	

Las Construcciones con Regla y Compás en un Ambiente de Geometría Dinámica

Las construcciones con regla y compás han ocupado un puesto relevante en la enseñanza de la Geometría tanto por su utilidad práctica como su contribución al desarrollo teórico.

Euclides, matemático griego, nos legó una manera de organizar el conocimiento aritmético y geométrico, haciendo uso del método axiomático; es decir, "una presentación lógica de la Geometría en la forma de una cadena de proposiciones basadas en unas cuantas definiciones y suposiciones iniciales" (Siñeriz, 2007, p. 194). Cabe recordar que, en la antigua Grecia, la Geometría abandonó su carácter empírico–práctico, adquiriendo así un carácter lógico–deductivo; teniéndose como punto de inflexión la publicación de una obra compilatoria del conocimiento matemático intitulada *Elementos*. En la versión actualizada y traducida al español por la Editorial Gredos, en 1991, los *Elementos* son un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros. Estos trece libros abarcan los siguientes temas (libros): (a) Geometría Plana (I al IV). (b) Proporcionalidad (V y VI). (c) Aritmética (VII al IX). (d) Inconmensurabilidad (X). (e) Geometría del Espacio (XI al XIII).

Entre los métodos utilizados en los *Elementos* destaca el procedimiento de construcción de figuras con regla y compás; tales construcciones – como lo señala Siñeriz (2007) - no tenían por objetivo "la realización efectiva de la construcción, sino mostrar por un encadenamiento lógico de proposiciones que algo es construible con regla y compás" (p. 195). Las primeras tres proposiciones del Libro I sirven para ilustrar la metodología de trabajo empleada en los *Elementos* de Euclides y el uso de la regla y el compás: (I.1) Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados. (I.2) Transportar un segmento a un punto dado (como extremo). (I.3) Dados dos segmentos, cortar del mayor un segmento igual al menor. Cabe señalar que, para los antiguos geómetras griegos, la regla era ilimitada, sin marcas y tenía un sólo un borde y el compás era un instrumento que sólo trazaba circunferencias de centro dado pasando por un punto dado; en otras palabras, ningún instrumento podía usarse para transportar distancias. Esto significa que la regla no podía marcarse, y que el compás había de tener la característica que si una de sus patas se levantaba del papel, el instrumento se cerraba. A diferencia del compás euclídeo, el compás moderno conserva su abertura y, por tanto, puede utilizarse para transportar distancias. Es necesario indicar que las primeras tres proposiciones del Libro I de Euclides establecen la equivalencia entre el compás euclideo y el compás moderno.

Dada la relevancia histórica del tema, el primer taller del curso de RPG_AC se centró en el estudio de las construcciones geométricas con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica, ya que, esto les permitiría a los participantes: (a) Familiarizarse con los botones de herramientas disponibles en el Cabri Géomètre II Plus (en adelante, Cabri II). (b) Realizar una construcción consistente con regla y compás de un(os) objeto(s) geométrico(s), a partir de un(os) objeto(s) inicial(es) dado(s). (c) Reconocer relaciones geométricas entre los objetos que conforman una construcción con regla y compás. (d) Identificar las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de las construcciones realizadas.

Para ello, las actividades propuestas – como se muestra en el Cuadro 20 – se organizaron siguiendo las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele; destacando que una vez realizada una exposición sobre la caracterización y relevancia histórica de las construcciones geométricas con regla y compás en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, se entregó una hoja de trabajo que contemplaba las actividades dirigidas y las actividades libres. Para su descripción es necesario tener en consideración que en una construcción geométrica, se pueden identificar los siguientes elementos: (a) Objetos iniciales (lo dado), (b) Procedimiento de construcción que incluye los objetos auxiliares, y (c) Objetos finales (lo que se quiere construir). Además, en los SGD, los objetos geométricos suelen ser clasificados atendiendo a dos criterios distintos, pero relacionados entre sí: Modo de Construcción y Grados de libertad.

En atención al *modo de construcción*, se establece la siguiente clasificación: (a) *Objetos Elementales,* entre los cuales se distinguen los *objetos libres* (punto, recta y circunferencia) y los o*bjetos definidos por puntos* (segmento, recta definida por dos puntos, semirrecta, vector, triángulo definido por tres puntos no alineados, polígonos y circunferencia definida por el centro y otro punto). (b) *Objetos construidos*: son todos aquellos objetos que pueden construirse haciendo uso de los botones construcciones y macro-construcciones.

En atención a los *grados de libertad* que poseen al ser desplazados sobre la hoja de trabajo, los objetos se clasifican en: (a) *Objetos bases*: Los objetos libres y los puntos construidos por objetos. (b) *Objetos dependientes*: Los objetos construidos (salvo los puntos definidos por objetos) y los objetos definidos por puntos. Esto es relevante, ya que, por ejemplo, al trazar la mediatriz de un segmento dado, haciendo uso del Cabri II, se establece una relación de dependencia entre el segmento dado (objeto inicial que funciona como un objeto base) y su correspondiente mediatriz (objeto dependiente).

Cuadro 21
Actividades dirigidas propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG_AC

<table>
<tr><td colspan="2">Actividades dirigidas: Lea atentamente el procedimiento señalado en cada una de las actividades propuestas y, luego, aplíquelo haciendo uso del Cabri II.</td></tr>
<tr><td>1. Construcción de un “compás”.</td><td>OBJETO(S) INICIAL(ES) DADO(S)</td></tr>
<tr><td>2. Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento.</td><td rowspan="4">PROCEDIMIENTO DADO</td></tr>
<tr><td>3. Construcción de un ángulo que mida 60º usando solamente regla y compás.</td></tr>
<tr><td>4. Construcción de un ángulo que mida 45º usando solamente regla y compás.</td></tr>
<tr><td>5. Trazado de la bisectriz de un ángulo dado.</td></tr>
<tr><td>6. División de un segmento de recta en n partes iguales.</td><td>OBJETOS FINAL(ES) POR CONSTRUIR</td></tr>
</table>

En las *actividades dirigidas*, como se muestra en el Cuadro 21, a partir de los objetos iniciales, se indica el procedimiento a seguir para construir el objeto deseado; por ende, los participantes sólo necesitan seguir el procedimiento indicado y utilizar adecuadamente los botones de herramientas disponibles en el Cabri II para realizar una construcción consistente. Sin embargo, la facilitadora debía procurar que los estudiantes centraran su atención en las relaciones existentes entre los objetos que conforman tal construcción; este es el punto clave para aproximarse al proceso de demostración en Geometría. Para ilustrar lo aquí planteado, se ha tomado como referencia la actividad dirigida nº 2, *Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento*:

1. Trace un segmento AB. (OBJETO INICIAL)
2. Con el *compás* teniendo una abertura mayor que la mitad de la longitud de AB (aquí es necesario introducir un **segmento auxiliar** cuya longitud representa la abertura del compás), haga centro en los puntos A y B sucesivamente y trace arcos de circunferencia que se corten en los puntos C y D.
3. Trace la recta determinada por los puntos C y D. La recta CD se denomina *mediatriz del segmento AB*. (PRIMER OBJETO FINAL)
4. Determina el punto de intersección P de la recta CD con el segmento AB. Tal punto de intersección es el *punto medio del segmento AB*. (SEGUNDO OBJETO FINAL)
5. ¿Cómo puedes garantizar que la recta CD es la mediatriz del segmento AB? O, en otras palabras, ¿cómo puedes garantizar que P es punto medio del segmento AB y que la recta CD es perpendicular al segmento AB en P?

Como puede observarse, una vez indicado el procedimiento a seguir y realizada la construcción de la mediatriz de un segmento dado, se formulaban ciertas interrogantes tratando de propiciar que los participantes develaran las relaciones existentes entre los objetos que intervienen en esta construcción. Así sería posible que los participantes notaran que (1º) el punto C equidista de los extremos del segmento AB, por ser AC y BC radios de las circunferencias congruentes C_1 (A, r) y C_2 (B, r) y (2º) el punto D también equidista de los extremos del segmento AB, por ser AD y BD radios de las circunferencias congruentes C_1 y C_2. Entonces los puntos C y D pertenecen a la mediatriz M del segmento AB y como dos puntos distintos cualesquiera determinan una única recta, se concluye que M es la recta que pasa por los puntos C y D (por el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento y el postulado de la recta).

Otra manera sería la siguiente: Dado un segmento AB y un número real r tal que r sea mayor que AB/2. Sean C y D los puntos de intersección de las circunferencias C_1 (A, r) y C_2 (B, r). Entonces, AC = AD = r (por ser radios de la circunferencia C_1) y BC = BD = r (por ser radios de la circunferencia C_2) y, por transitividad, los segmentos AC, AD, BC y BD son congruentes entre sí. Entonces, por el postulado de congruencia LLL, se tiene que Δ ACD y Δ BCD son congruentes y, por partes correspondientes de triángulos congruentes (PCTC), m (< ACD) = m (< BCD) y como, además, se tiene que AC = BC y CP = CP, por el postulado LAL, se cumple que Δ ACP y Δ BCP son congruentes. Y los ángulos < CPA y < CPB son rectos, por ser congruentes (por PCTC) y suplementarios (ya que forman un par lineal).

De esta manera, se estaría estableciendo por una cadena de razonamiento lógico – deductivo, apoyado en las relaciones de dependencia existentes entre los objetos que intervienen en esta construcción, que la mediatriz de un segmento es construible con regla y compás, tal como lo establece la concepción euclídea.

Cuadro 22
Actividades libres propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG_AC

Actividades libres: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada.	
1. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados.	OBJETO(S) INICIAL(ES) DADOS
2. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.	PROCEDIMIENTO POR ESTABLECER
3. Construcción de un triángulo dadas las medidas de un par de ángulos y la longitud del lado comprendido entre ellos.	
4. Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial).	
5. Construir un triángulo equilátero ABC dado uno de sus lados.	
6. Construir un rombo PQRS dadas sus diagonales PR y QS.	OBJETOS FINAL(ES) DADOS

En las *actividades libres*, como se muestra en el Cuadro 22, a partir de los objetos iniciales, los participantes tenían que establecer un procedimiento que les permitiera realizar una construcción consistente con regla y compás del (los) objeto(s) final(es); por ende, los participantes requerirían establecer relaciones entre lo conocido y lo que le pedían construir a partir de lo que conoce (definiciones y propiedades), para lograr establecer el procedimiento a seguir y, además, garantizar que el objeto construido es el esperado y no otro. Para ilustrar esta situación, se ha tenido como referencia la actividad libre nº 4, construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial), la cual admite diferentes formas de construcción y, por ende, diferentes formas de validación. En el Cuadro 23, se muestra el procedimiento de construcción nº 1.

Cuadro 23
Construcción de un cuadrado dado uno de sus lados

Construcción nº 1

Procedimiento	**Comentarios**
Dado un segmento de extremos A y B	Este procedimiento garantiza que, en el cuadrilátero ABCD se cumple que: AB = AD = DC y que los ángulos < DAB y < ADC son rectos. Haría falta probar que AB = AD = DC = CD y que los ángulos < DCB y < CBA son ángulos rectos. En efecto, se conoce que, en un plano E, las rectas AB y L_2 son perpendiculares a la recta L_1 y, por ende, se tiene que AB $\parallel$ L_2. Como, además, AB = DC y el segmento DC está contenido en la recta L_2, se cumple que, en el cuadrilátero ABCD, los segmentos AB y DC son paralelos y congruentes y, por tanto, tal cuadrilátero es un paralelogramo. Asimismo, se conoce que en un paralelogramo ambos pares de lados y ángulos opuestos son congruentes, con lo cual se establece que: AD = BC, m (< DCB) = 90º y m (< CBA) = 90º.
Se traza una recta L_1 perpendicular al segmento AB en A. Entonces el ángulo con vértice en A es un ángulo recto.	
Con el compás, haciendo centro en A y pasando por el punto B, se traza una circunferencia C_1 que corta a la recta L_1 en D. Así, los segmentos AB y AD son congruentes por ser radios de una misma circunferencia.	
Se traza una recta L_2 perpendicular al segmento AD en D. De modo que el ángulo con vértice en D es un ángulo recto.	
Con el compás haciendo centro en D y pasando por el punto A, se traza una circunferencia que corta a la recta L_2 en C. Así se cumple que AD = DC (por ser radios de la circunferencia C_2.	
Se traza el segmento CD.	

Cabe señalar que, durante el desarrollo del Taller nº 1, los participantes seleccionaron una o dos construcciones adicionales, las cuales fueron presentadas, ante el resto del grupo, con el propósito de validar su consistencia. Tales producciones serán dadas a conocer en el Capítulo V.

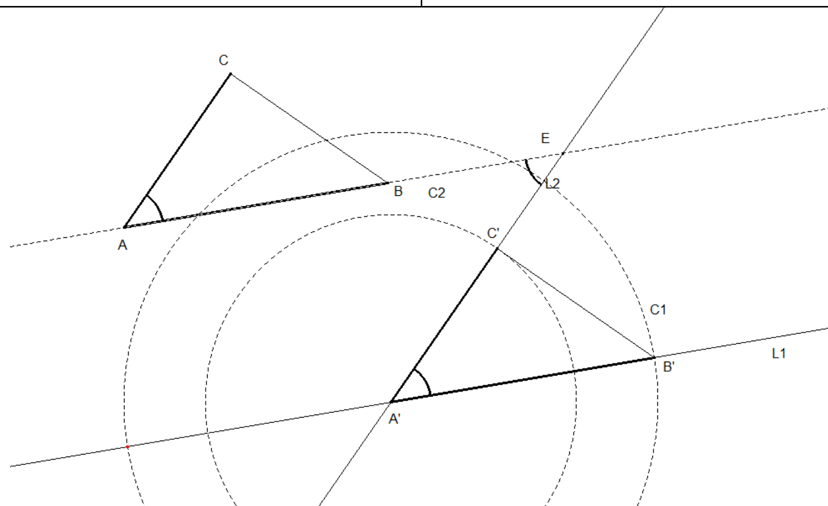
Asimismo, Siñeriz (2007) señala que se han identificado tres métodos a seguir en las construcciones con regla y compás: (a) el método de los dos lugares; (b) el método de la figura auxiliar y (c) el método de la figura semejante. Para ilustrarlos, se han tenido en cuenta los siguientes elementos: objeto(s) inicial(es), procedimiento a seguir y objeto(s) final(es) y las actividades propuestas en el taller nº 1.

El *método de los dos lugares* tiene como base la noción de lugar geométrico, entendido éste como un conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas. Así, por ejemplo, en la actividad dirigida nº 2, *Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento*, como anteriormente se describió, la mediatriz de un segmento fue entendida como el conjunto de puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento y como dos puntos distintos cualesquiera determinan una única recta fue suficiente con hallar un par de puntos distintos C y D que equidistarán de los extremos del segmento AB. Para hallar los puntos C y D se consideró *la intersección de dos lugares geométricos*: las circunferencias congruentes C_1 (A, r) y C_2 (B, r), con $r > AB/2$. Entonces, siguiendo el método de los dos lugares, el problema se reduce a la construcción de, a lo más, dos puntos, y la solución viene dada por la intersección de dos lugares geométricos, los cuales deben ser rectilíneos o circulares. Nótese que las primeras cinco (5) actividades dirigidas propuestas en el taller nº 1 (ver Cuadro 21), se realizan aplicando el método de los dos lugares.

El *método de la figura auxiliar* consiste en construir una figura relacionada con los datos del problema y teniendo a ésta como referencia construir la figura requerida. Por ejemplo, entre las actividades libres del taller nº 1, se planteó lo siguiente: *Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos*. Observa la siguiente figura y describe el procedimiento para construir un triángulo, conocidas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos. ¿Cómo construir el triángulo

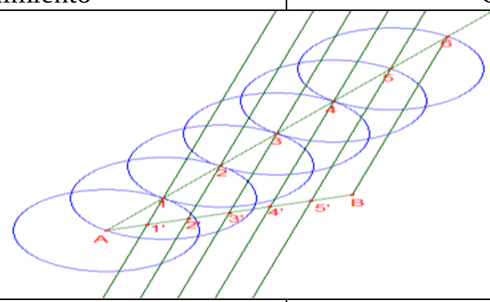
ABC conocidas las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC? (ver Cuadro 24). En este caso, el Δ ABC se asume como figura auxiliar y la clave de la construcción es copiar el ángulo BAC, teniendo en cuenta las propiedades de rectas paralelas cortadas por una secante.

Cuadro 24
Aplicación del método de la figura auxiliar

Procedimiento	Observaciones
	
En un triángulo ABC, se conocen las longitudes de los lados AC y AB y la medida del ángulo comprendido entre ellos (ver figura auxiliar).	El Δ ABC se asume como figura auxiliar.
Por un punto A’ se traza una recta L_1 paralela al segmento AB y una recta L_2 paralela al segmento AC. Entonces, los ángulos CAB y C’A’B’ son congruentes.	$L_1 \parallel$ AB por A’ y $L_2 \parallel$ AC por A’. La recta AB es secante a las rectas paralelas L_2 y AC y, por el teorema PAI, los ángulos < CAE (con B entre A y E) y < AEA’ son congruentes. La recta L_2 es secante a las rectas paralelas L_1 y AB y, por el teorema PAI, < AEA’ y < EA’B’ son congruentes; y, por transitividad, < CAE y < EA’B’, donde < CAE = < CAB y < EA’B’ = < C’A’B’.
Con el compás, haciendo centro en A’ con radio AB, se traza una circunferencia que corta a la recta L_1 en B’. Seguidamente, se traza una circunferencia con centro en A’ y radio AC, la cual corta a la recta L_2 en C’. Así, A’B’=AB y A’C’=AC.	Nótese que para hallar los puntos B’ y C’ se ha empleado el método de los dos lugares. Además, por el postulado de congruencia LAL para triángulos, se tiene que los triángulos ABC y A’B’C’ son congruentes.

El *método de la figura semejante* es recomendable emplearlo cuando no se puede construir directamente la figura solicitada (objeto final), pero si es posible construir una figura semejante a la misma; por lo general, en la construcción se realiza la copia de ángulos y el trazado de rectas paralelas. Para ejemplificar la aplicación de este método, se tomará como referencia la actividad dirigida nº 6 del taller nº 1: División de un segmento de recta en n partes iguales (ver Cuadro 25).

Cuadro 25
Aplicación del método de la figura semejante

Procedimiento	Observaciones
	
Trace el segmento AB.	Objeto inicial
Trace una semirrecta L con origen en el punto A y que no esté contenida en el segmento AB.	Se introduce un segmento auxiliar cuya longitud r representa la abertura del compás.
Con el compás, haga centro en A y con una abertura arbitraria, trace un arco de circunferencia que corte a tal semirrecta en el punto 1. Utilizando la misma abertura de compás, haga centro en 1 y trace un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en el punto 2. Así, sucesivamente, hasta trazar n divisiones en tal semirrecta.	Los segmentos A1, 12, 23, 34, 45 y 56 son congruentes, ya que, tienen longitud r; es decir, el segmento A6 contenido en la semirrecta L se divide en seis (6) partes iguales.
Enumere los puntos de corte del 1 al n.	
Une el punto n con el punto B.	Los puntos A, B y n determinan al triángulo ABn.
Trace rectas paralelas al segmento nB que pasen por los puntos n – 1, n – 2, ..., 2, 1.	Se introduce el trazado de rectas paralelas a un lado del triángulo, garantizando que tales rectas corten a los lados restantes del Δ ABn.
Determina los puntos de corte de estas rectas paralelas con el segmento AB.	$L_i \cap AB = \{i'\}$ con i: 1, 2, 3, 4, 5
¿En cuáles definiciones y propiedades geométricas se sustenta esta construcción?	En el criterio AA de semejanza para triángulos y la definición de triángulos semejantes. Los triángulos Aii’, con i: 1, 2, 3, 4, 5 y A6B son semejantes, ya que, < A es un ángulo común y los ángulos Aii’ son congruentes por ser AAI

Equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura geométrica

En el artículo intitulado "*Explorando ángulos y triángulos con doblado de papel*", Arrieche e Iglesias (2010) presentaron una herramienta didáctica construida mediante el doblado de papel, la cual puede ser utilizada para medir ciertos ángulos, cuando no se cuenta con un transportador; asimismo, se mostró que puede ser aprovechada para reforzar el estudio de las nociones de ángulos y triángulos y propiciar el desarrollo de algunas habilidades geométricas en los estudiantes. Además, emplearon el Cabri II para mostrar la construcción con regla y compás de esta herramienta triangular, basándose en la trisección de un ángulo recto; procurando describir el procedimiento empleado y dejando ver su equivalencia con la construcción con doblado de papel.

Por ello, en el taller nº 2, las actividades dirigidas estuvieron centradas en la construcción de tal herramienta triangular tanto con doblado de papel como con regla y compás en un AGD, a partir de la lectura y análisis del mencionado artículo. En cuanto a las actividades libres, los participantes seleccionaron una figura geométrica y realizaron su construcción de ambas maneras, tratando de establecer la equivalencia entre ambas construcciones.

Es necesario destacar que, en este caso, el doblado de papel fue utilizado con fines educativos (construcción de figuras planas para el estudio de sus propiedades geométricas) y no artísticos (construcción de figuras o cuerpos geométricos con fines ornamentales); el doblado se realizó a partir de un trozo de papel en forma rectangular, cuadrada o triangular y no a partir de tiras.

Para entender la noción de equivalencia entre una construcción con doblado de papel y una construcción con regla y compás de un mismo objeto geométrico, es preciso tener en cuenta los axiomas con los que se trabaja en el doblado de papel o la papiroflexia. En el Cuadro 26, teniendo en cuenta la investigación realizada por Sánchez (2008), se mencionan los axiomas propuestos por Germán Luis Beitia, Humiaki Huzita y Roger Alperin.

Cuadro 26
Axiomas en los cuales se soporta el doblado de papel o papiroflexia

I. Germán Luis Beitia	II. Humiaki Huzita	III. Roger Alperin
Puede considerarse que una hoja es una superficie plana.	Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede realizar un pliegue que los conecte.	La línea que conecta dos puntos construibles es una línea construible.
Un pliegue realizado en una hoja de papel que pase por dos puntos y que se ha hecho sobre una superficie plana como soporte es una línea recta.	Dados dos puntos P_1 y P_2, podemos plegar P_1 sobre P_2.	El punto de coincidencia de dos líneas construibles es un punto construible.
El papel puede ser plegado de tal manera que pase por dos o más puntos colineales.	Dadas dos rectas L_1 y L_2, podemos plegar L_1 sobre L_2.	La mediatriz de un segmento que conecta dos puntos construibles es una línea construible.
Puede superponerse dos puntos distintos en una misma hoja de papel.	Dado un punto P y una recta L, podemos hacer un pliegue perpendicular a L que pase por P.	La línea que biseca cualquier ángulo dado puede ser construida.
Puede doblarse el papel de modo que un punto puede superponerse a otro pliegue.	Dados dos puntos P_1 y P_2 y una recta L, podemos hacer un pliegue que haga corresponder a P_1 con un punto de L y que pase por P_2.	Dada una línea construida L y los puntos construidos P y Q, entonces siempre es posible construir la línea que pasa por Q y que refleja a P en L.
Puede plegarse el papel de modo que dos pliegues de una misma hoja pueden superponerse.	Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos rectas L_1 y L_2, podemos hacer un pliegue que haga corresponder a P_1 con un punto de L_1 y P_2 con un punto de L_2.	Dadas las líneas construidas L y M y los puntos construidos P y Q, entonces siempre es posible construir una línea que simultáneamente refleja a P en L y a Q en M.
Dos ángulos son congruentes, si al superponerse coinciden.		
Dos segmentos son congruentes si al superponerse coinciden.		

Nótese que estos tres conjuntos de axiomas del doblado de papel guardan relación con propiedades (axiomas o teoremas) de la Geometría Euclidiana, pero pudiera decirse que se basan en tres ideas matemáticas distintas: (a) superposición de figuras geométricas (ver Cuadro 27); (b) correspondencia entre figuras geométricas (ver Cuadro 28), y (c) puntos y rectas construibles (ver Cuadro 29).

Cuadro 27
Relación de los axiomas propuestos por Beitia con propiedades de la Geometría Euclidiana

<table>
<tr><th>Axiomas propuestos por German Luis Beitia</th><th>Definiciones y propiedades de la Geometría Euclidiana</th></tr>
<tr><td>Puede considerarse que una hoja es una superficie plana.</td><td rowspan="3">En la Geometría Euclidiana se consideran como términos primitivos o términos no definidos a los conceptos de punto, recta y plano. De modo que el espacio es el conjunto de todos los puntos y las rectas y los planos son subconjuntos notables del espacio. Suele hablarse del espacio tridimensional. Asimismo, el Axioma o Postulado de la Recta establece que dos puntos distintos cualesquiera determinan una recta y solamente una; es decir, dados dos puntos distintos A y B, existe exactamente una recta que pasa por tales puntos y, por ello, se denota por $\overleftrightarrow{AB}$. De modo que, si un punto C pertenece a la recta AB, puede escribirse que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$ y, decirse que los puntos A, B y C están alineados o que son puntos colineales. Además, el Axioma o el Postulado del Plano establece que tres puntos distintos cualesquiera no alineados determinan un único plano; en consecuencia, dada una recta L y un punto P no perteneciente a L, tales objetos determinan un único plano. También se conoce que si dos puntos distintos cualesquiera pertenecen a un plano, entonces la recta que pasa por ellos está contenida en el plano. Esto nos garantiza que los planos son llanos. Por ende, si una recta L interseca a un plano E, que no la contiene, su intersección es un punto solamente. Por otra parte, si dos rectas distintas se intersecan, su intersección es un punto solamente y, además, tales rectas determinan un único plano.</td></tr>
<tr><td>Un pliegue realizado en una hoja de papel que pase por dos puntos y que se ha hecho sobre una superficie plana como soporte es una línea recta.</td></tr>
<tr><td>El papel puede ser plegado de tal manera que pase por dos o más puntos colineales.
.</td></tr>
</table>

Cuadro 27 (cont.)

<table>
<tr><th>Axiomas propuestos por German Luis Beitia</th><th>Definiciones y propiedades de la Geometría Euclidiana</th></tr>
<tr><td>Puede superponerse dos puntos distintos en una misma hoja de papel.</td><td rowspan="3">La superposición de dos figuras es la técnica desarrollada por los antiguos geómetras griegos para comparar figuras geométricas en cuanto a forma y tamaño.</td></tr>
<tr><td>Puede doblarse el papel de modo que un punto puede superponerse a otro pliegue.</td></tr>
<tr><td>Puede plegarse el papel de modo que dos pliegues de una misma hoja pueden superponerse.</td></tr>
<tr><td>Dos ángulos son congruentes, si al superponerse coinciden.</td><td rowspan="2">Dos figuras geométricas son congruentes, si tienen la misma forma y el mismo tamaño; por ello, al superponer una sobre la otra, coinciden; es decir, no sobra, ni falta algo. En este caso, dos ángulos son congruentes, si tienen la misma medida y dos segmentos son congruentes, si tienen la misma longitud.</td></tr>
<tr><td>Dos segmentos son congruentes si al superponerse coinciden.</td></tr>
</table>

En este primer conjunto de axiomas del doblado de papel, la idea clave es la de *superposición de figuras geométricas*, entendida como la técnica empleada desde la antigua Grecia para comparar dos figuras geométricas en cuanto a forma y tamaño y así decidir si eran congruentes o no, ya que, mediante la superposición de dos figuras que coinciden se prueba que las mismas son congruentes.

Cuadro 28
Relación de los axiomas propuestos por Huzita con propiedades de la Geometría Euclidiana

Axiomas propuestos por Humiaki Huzita	Definiciones y propiedades de la Geometría Euclidiana
Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede realizar un pliegue que los conecte.	Axioma o Postulado de la Recta: Por dos puntos distintos cualesquiera pasa una única recta o dos puntos distintos cualesquiera determinan una única recta.

Cuadro 28 (cont.)

Axiomas propuestos por Humiaki Huzita	Definiciones y propiedades de la Geometría Euclidiana
Dados dos puntos P_1 y P_2, podemos plegar P_1 sobre P_2.	Dado que dos puntos distintos A y B determinan una única recta $\overleftrightarrow{AB}$, así como un segmento AB contenido en dicha recta. Además, el punto medio M de un segmento AB existe y es único y la mediatriz del segmento AB es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Nótese que al hacer coincidir P_1 con P_2, con doblado de papel, el pliegue representa la mediatriz del segmento P_1P_2.
Dadas dos rectas L_1 y L_2, podemos plegar L_1 sobre L_2.	Dado que L_1 y L_2 son coplanarias, caben dos opciones: (a) que se intersequen (rectas secantes) y su intersección es un punto solamente; determinándose así cuatro ángulos (dos pares de ángulos opuestos por el vértice), de modo que al hacer coincidir una recta con la otra, se bisecan dos de estos ángulos. (b) que no se intersequen (rectas paralelas), al hacer coincidir una recta con la otra, el pliegue representa una recta L_3 paralela a las rectas L_1 y L_2.
Dado un punto P y una recta L, podemos hacer un pliegue perpendicular a L que pase por P.	Dados un punto P y una recta L, por P pasa una y solo una recta L_1 perpendicular a L. Nótese que P puede pertenecer o no a la recta L.
Dados dos puntos P_1 y P_2 y una recta L, podemos hacer un pliegue que haga corresponder a P_1 con un punto de L y que pase por P_2.	
Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos rectas L_1 y L_2, podemos hacer un pliegue que haga corresponder a P_1 con un punto de L_1 y P_2 con un punto de L_2.	

En este segundo conjunto de axiomas, se asume que el plano (representado por la hoja de papel) es un conjunto de infinitos puntos y que es factible, mediante operaciones propias del doblado de papel, establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos pertenecientes a dicho plano.

Cuadro 29
Relación de los axiomas propuestos por Roger Alperin con propiedades de la Geometría Euclidiana

Axiomas propuestos por Roger Alperin	Definiciones y propiedades de la Geometría Euclidiana
La línea que conecta dos puntos construibles es una línea construible.	Axioma o Postulado de la Recta: Por dos puntos distintos cualesquiera pasa una única recta o dos puntos distintos cualesquiera determinan una única recta.
El punto de coincidencia de dos líneas construibles es un punto construible.	Si dos rectas distintas se intersecan, su intersección es un punto solamente y, además, determinan un único plano.
La mediatriz de un segmento que conecta dos puntos construibles es una línea construible.	La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.
La línea que biseca cualquier ángulo dado puede ser construida.	Dados un ángulo < AOB y C un punto perteneciente al interior del < AOB. Se dice que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz del ángulo dado, si m (< AOC) = m (< COB). También se dice que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ biseca al < AOB.
Dada una línea construida L y los puntos construidos P y Q, entonces siempre es posible construir la línea que pasa por Q y que refleja a P en L.	
Dadas las líneas construidas L y M y los puntos construidos P y Q, entonces siempre es posible construir una línea que simultáneamente refleja a P en L y a Q en M.	

En el tercer conjunto de axiomas, es clave la noción de puntos y rectas construibles, la cual es también propia de las construcciones con regla y compás, donde un punto es construible por la intersección de dos rectas distintas, o por la intersección de una recta con un arco de circunferencia, o por la intersección de dos arcos de circunferencia, o por un número finito de estas operaciones.

En el curso de RPG_AC, para la construcción de figuras geométricas con doblado de papel se tomaron en consideración las siguientes “reglas”:

1. Una hoja de papel - independientemente de su forma - es asumida como una superficie plana que posee infinitos puntos.
2. Un pliegue realizado en una hoja de papel que pase por dos puntos es asumido como una línea recta.
3. El papel puede ser plegado de tal manera que pase por dos puntos distintos.
4. Dos puntos distintos pueden superponerse en una misma hoja de papel y el pliegue que se forma representa la mediatriz del segmento de recta determinado por ese par de puntos.
5. Dos pliegues en una misma hoja de papel pueden superponerse. Si ambos pliegues se intersecan, su intersección es un punto solamente; determinándose dos pares de ángulos opuestos por el vértice, de modo que al hacer coincidir una recta con la otra, se bisecan dos de estos ángulos. Si ambos pliegues no se intersecan, al superponer un pliegue con el otro, se obtiene un tercer pliegue paralelo a los dos iniciales.
6. Dados un punto P y un pliegue L, puede hallarse el simétrico del punto P respecto al pliegue L (doblando a lo largo del pliegue L).
7. Dos ángulos son congruentes, si al superponerse coinciden.
8. Dos segmentos son congruentes si al superponerse coinciden.

Construir, explorar, conjeturar y validar

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM, por sus siglas en inglés) ha venido publicando, desde finales de la década de los años ochenta, los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. La primera edición se dio a conocer en 1989, siendo traducida al español por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales en 1993. Ante la necesidad de mantener la vigencia de los principios y estándares, la junta directiva del NCTM aprobó proceder a su revisión y actualización, publicando una segunda edición en el año 2000, la cual también fue traducida al español en 2003.

Según el NCTM (2003), los *principios* “son enunciados que reflejan preceptos básicos fundamentales para una educación matemática de calidad” (p. 7), mientras que los *estándares* “son descripciones acerca de lo que la enseñanza de las matemáticas debería capacitar a los estudiantes para saber y hacer: los objetivos importantes de la educación matemática” (p. 7).

En el Cuadro 30 se muestra un resumen de los seis principios para las matemáticas escolares establecidos en la edición del año 2000.

Cuadro 30
Principios para las matemáticas escolares (NCTM, 2003)

Declaración	Premisas
El Principio de Igualdad. La excelencia en la educación matemática requiere de igualdad: grandes expectativas y sólido apoyo para todos los estudiantes.	• La igualdad requiere grandes expectativas y oportunidades válidas para todos. • La igualdad exige tener en cuenta las diferencias para ayudar a cada alumno a aprender matemáticas. • La igualdad requiere recursos y apoyo en todas las clases y para todos los estudiantes.
El Principio Curricular. Un currículo es algo más que una colección de actividades: tiene que ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y bien articulado a través de los diferentes niveles.	• El currículo debe ser coherente. • El currículo debería centrarse en matemáticas importantes. • El currículo debería estar bien articulado a lo largo de los niveles de enseñanza.
El Principio de Enseñanza. Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los estudiantes saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien.	• La eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los estudiantes son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas. • Una enseñanza eficaz requiere un entorno de aprendizaje que apoye y estimule. • Una enseñanza eficaz requiere tratar continuamente de mejorar
El Principio de Aprendizaje. Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos.	• La comprensión es fundamental al aprender matemáticas. • Se pueden aprender matemáticas comprendiéndolas.
El Principio de Evaluación. La evaluación debería apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a profesores como a estudiantes.	• La evaluación debería enriquecer el aprendizaje de los alumnos. • La evaluación es una valiosa herramienta para tomar decisiones.

Cuadro 30 (cont.)

Declaración	Premisas
El Principio Tecnológico. La tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje.	• La tecnología enriquece el aprendizaje de las matemáticas. • La tecnología apoya la enseñanza eficaz de las matemáticas. • La tecnología influye en qué matemáticas se enseñan.

Una vez enunciados los principios para una educación matemática de calidad, se establecieron diez estándares que "describen un conjunto coherente de conocimientos y competencias matemáticas; una base comprensiva recomendada para todos los estudiantes, en vez de un menú a partir del cual tomar decisiones curriculares" (p. 31). Estos estándares se clasifican en dos categorías:

1. *Los estándares de contenidos*: Describen explícitamente los contenidos matemáticos que los estudiantes deberían aprender: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad.
2. *Los estándares de procesos*: Ponen de relieve las formas de adquisición y usos de los contenidos matemáticos: Resolución de problemas, Razonamiento y demostración, Comunicación, Conexiones y Representación.

En el Cuadro 31, se presenta los estándares de contenidos establecidos para todas las etapas de la escolaridad.

Cuadro 31
Estándares de contenidos (NCTM, 2003)

Contenidos	Estándares
Números y operaciones	• Comprender los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos. • Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras. • Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables.
Álgebra	• Comprender patrones, relaciones y funciones. • Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos. • Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

Cuadro 31 (cont.)

Contenidos	Estándares
Álgebra	• Analizar el cambio en contextos diversos.
Geometría	• Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas. • Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación. • Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas. • Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.
Medida	• Comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida. • Aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas.
Análisis de datos y Probabilidad	• Formular preguntas que pueden abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas. • Seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos. • Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos. • Comprender y aplicar conceptos de probabilidad.

Los estándares de contenidos identificados con etiquetas tradicionalmente empleadas como Aritmética, Álgebra, Geometría y Medida, Estadística y Probabilidad parecieran organizarse en torno a las ideas principales consideradas en PISA: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad, incertidumbre y datos (OCDE, 2004). Así, por ejemplo, en cuanto a la idea principal de *espacio y forma* se establece lo siguiente:

> Las regularidades se encuentran en todas partes (…). Las formas pueden considerarse como regularidades (…). Las regularidades geométricas pueden servir como unos modelos relativamente simples de muchas clases de hechos, y su estudio resulta posible y deseable en todos los niveles.

> El estudio de la forma y las construcciones exige buscar similitudes y diferencias al analizar los componentes formales y al reconocer las formas en diferentes representaciones y diferentes dimensiones.
> Para conseguirlo es preciso comprender las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas. (…). Debemos aprender a orientarnos por el espacio y a través de las construcciones y formas. (…). También supone entender la representación en dos dimensiones de los objetos tridimensionales, la formación de sombras y cómo interpretarlas, qué es la perspectiva y cómo funciona (OCDE, 2004, p. 38).

En el Cuadro 32, se presenta los estándares de procesos establecidos para todas las etapas de la escolaridad.

Cuadro 32
Estándares de procesos (NCTM, 2003)

Procesos	Estándares
Resolución de problemas	• Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas. • Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos. • Adaptar y aplicar diversas estrategias de resolución de problemas. • Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él.
Razonamiento y demostración	• Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas. • Formular e investigar conjeturas matemáticas. • Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones. • Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.
Comunicación	• Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación. • Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas. • Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás. • Usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.
Conexiones	• Reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas. • Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente.

Cuadro 32 (cont.)

Procesos	Estándares
Conexiones	• Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.
Representación	• Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas. • Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas. • Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Asimismo, en los estándares de procesos está implícita la noción de competencias matemáticas, ya que, éstas hacen referencia a los procesos que deben activarse para resolver problemas en diversos contextos.

Un elemento destacable de los estándares de contenidos geométricos para todas las etapas educativas es el reconocimiento de la Geometría como "el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, culminando en la enseñanza secundaria con el trabajo con demostraciones" (NCTM, 2003, p. 43). Además, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática, se mencionan algunos asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría (ob. cit., p. 43), las cuales han sido reconocidas en esta investigación:

1. "La *construcción de modelos geométricos* y el *razonamiento espacial* ofrecen vías para interpretar y describir entornos físicos y pueden constituir herramientas importantes en la *resolución de problemas*".
2. "Usando modelos concretos, dibujos y programas informáticos de *Geometría Dinámica*, pueden implicarse activamente con las ideas geométricas".
3. "Pueden formular y explorar *conjeturas* sobre Geometría y aprender a razonar cuidadosamente sobre ideas geométricas, desde los primeros años de escolaridad".
4. "La idea de *construir el conocimiento geométrico a través de los niveles*, desde el pensamiento informal al más formal, está de acuerdo con lo que opinan teóricos e investigadores" (haciendo referencia al modelo de Van Hiele).
5. Es importante que los estudiantes "se den cuenta de que generar *muchos ejemplos* de un determinado fenómeno no constituye una *demostración*".

Por lo tanto, teniendo en cuenta que los estudiantes para profesores de Matemática, desde una perspectiva del aprendizaje situado, necesitan participar en tareas cercanas al quehacer matemático, susceptibles de ser puestas en práctica en el ámbito de la educación básica, las tareas matemáticas propuestas en el curso de RPG_AC se han organizado siguiendo el esquema:

Construir → Explorar → Conjeturar → Validar

Esquema que además ha sido tomado en consideración por otros educadores matemáticos como Alsina Catalá et. al. (1997), Perry Carrasco et. al. (2006) y Flores (2007). Como se ha visto en los apartados previos, en el curso de RPG_AC se ha enfatizado en las construcciones geométricas con regla y compás haciendo uso de un SGD como el Cabri II y las construcciones geométricas con doblado de papel, ya que, para realizar una construcción consistente se requiere tener en cuenta las relaciones existentes entre los elementos que conforman una construcción (objetos iniciales, auxiliares y finales), para garantizar que se ha construido el objeto esperado, a partir de las condiciones dadas.

Según Alsina Catalá et. al. (1997, p. 126), "el análisis de cuestiones métricas o algebraicas con la ayuda de Cabri permite inducir descubrimientos muy interesantes siguiendo, esencialmente, el proceso: Diseñar → Explorar → Modelizar → Conjeturar → Definir → Argumentar → Demostrar". Por ello, identifican siete (7) tipos de actividades geométricas con Cabri: (a) *Diseño* (manejo de las herramientas disponibles en el software); (b) *Exploración* (seguimiento o elaboración de procedimientos para construir figuras geométricas, incluyendo el reconocimiento de atributos relevantes); (c) *Modelización* (encontrar una estructura matemática que dote de sentido a una construcción o transformación geométrica); (d) Formulación de conjeturas (hallar una afirmación formal a partir de un descubrimiento); (e) *Definición* (nombrar y asignar caracterizaciones); (f) *Argumentación* (dar conjeturas en una manera descriptiva), (g) *Acercamiento deductivo* (validación haciendo uso de inferencias lógicas). Obsérvese que, aunque Alsina Catalá et. al. distinguen entre argumentación y acercamiento deductivo (demostración), reconocen el papel que juegan las prácticas argumentativas en una clase de Geometría, ya que, entre los indicadores de la argumentación (como Cabri – actividad) mencionan la formulación de razonamientos basados en casos y las generalizaciones simples, hacer sentencias declarativas y explicitar experiencias interesantes. Estos indicadores servirían de base para establecer razonamientos deductivos con inferencias lógicas que permitan probar una conjetura.

Asimismo, Perry Carrasco et. al. (2006), al presentar una caracterización de la actividad demostrativa a través de manifestaciones de desempeño de las acciones realizadas por los participantes en un curso de Geometría Plana en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá – Colombia), reconocen el fuerte lazo que habría que establecer entre la producción de una demostración formal y algunas acciones de carácter heurístico vinculadas con el proceso para la producción de una justificación (explicación, prueba y demostración formal); además, señalan que la argumentación es el razonamiento asociado a todas las acciones que conforman la actividad demostrativa y, por ello, sirve de puente entre las acciones de proceso y producto.

Para Perry Carrasco et. al (2006, p. 27), entre las acciones de carácter heurístico, se encuentran:

1. *Visualización*: "Mirada sobre la representación gráfica que se enfoca".
2. *Exploración*: "Acción visible sobre la representación gráfica para estudiar una situación con un propósito específico relacionado con la solución del problema".
3. *Conjeturación*: "Establecimiento de un enunciado, del que se tiene seguridad, expresado en forma general, como una implicación".
4. *Verificación*: "Acciones visibles sobre la representación gráfica para poner a prueba la conjetura establecida".
5. *Análisis*: "Formulación de relaciones de dependencia entre propiedades geométricas presentes en la situación".

Flores (2007) diseño un experimento de enseñanza con profesores de Matemática del bachillerato en México, haciendo uso del Geometer's Sketchpad, que incorporó actividades de construcción, de análisis y de discusión; para Flores,

> las actividades de construcción incluyen la explicación del por qué funciona la construcción, es decir, implican un proceso de formación y prueba de conjeturas; éstas son las más importantes de la propuesta, pues ellas se tiene que poner atención a las relaciones entre los elementos que las conforman y el proceso de construcción en sí (p. 74).

Por ende, en el taller nº 3 del curso de RPG_AC, siguiendo el esquema de construir → explorar → conjeturar → validar, se plantearon problemas relacionados con el estudio de las definiciones y propiedades de los cuadriláteros concíclicos o circunscribibles y cuadriláteros inscribibles, el cual es un tema no contemplado en los programas de los cursos de Geometría I y Geometría II, pero que se consideraba susceptible de ser abordado por los participantes en función de los conocimientos previos. Este taller se organizó en torno a siete (7) actividades como se observa en el Cuadro 33.

Las actividades propuestas en el taller nº 3 comparten ciertos rasgos que Flores (2007) considera relevantes para las actividades a ser realizadas en un AGD: las propiedades geométricas pueden obtenerse como conjeturas a partir de la exploración de las construcciones realizadas, pero la validación de tales conjeturas no es inmediata; aunque, por lo general, exigen la puesta en práctica de conocimientos y habilidades geométricas vinculadas con la Geometría Plana (conceptos y propiedades que se estudian en los cursos previos del área de Geometría).

El análisis de las producciones orales y escritas de los participantes en el curso de RPG_AC para cada uno de los talleres antes descritos se da a conocer en el Capítulo V. Además, en el curso de RPG_AC, los participantes abordaron el diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico para la educación media, siguiendo la noción de análisis didáctico; procurando integrar los dominios del conocimiento matemático para la enseñanza y propiciar el desarrollo de competencias didácticas asociadas al rol de planificador del profesor de Matemática. Esta cuestión se desarrolla en el Capítulo VI.

Cuadro 33
Actividades propuestas en el taller nº 3 del curso de RPG_AC

Nº	Actividades	Comentarios
1	Construya una circunferencia con centro en O y radio r. Trace una cuerda AB correspondiente a dicha circunferencia. La cuerda AB subtiende dos arcos de circunferencia: ACB y ADB. Construya el cuadrilátero ACBD. Se dice que el cuadrilátero ACBD es concíclico o circunscribible. Establezca la definición de cuadrilátero concíclico.	Se pretendía que, a partir de la construcción del cuadrilátero ACBD, se estableciera la definición de cuadrilátero concíclico, lo cual exige el reconocimiento de sus atributos relevantes. Uno de ellos: los vértices de un cuadrilátero concíclico pertenecen a una misma circunferencia.
2	Mida cada uno de los ángulos internos del cuadrilátero ACBD. Sume las medidas de sus ángulos opuestos. ¿Qué concluye? ¿Puede validar tal conjetura?	Teniendo como referencia el cuadrilátero previamente construido, se marcan cada uno de sus ángulos internos y, luego, se miden, obteniendo que las sumas de las medidas de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico es 180º. La clave de la validación de esta conjetura está en reconocer que, por ejemplo, la diagonal AB descompone al cuadrilátero ABCD en dos triángulos, así como conocer y aplicar la propiedad que los ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes.
3	Construya un cuadrilátero. Trace las cuatro bisectrices internas de sus ángulos Determine los puntos de intersección de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes. Demostrar que el cuadrilátero determinado por estos puntos de intersección es concíclico (sugerencia: Utilice la propiedad previamente demostrada por usted).	A partir de un cuadrilátero cualquiera, se construye otro cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes (o consecutivos) del cuadrilátero original y, luego, probar que el nuevo cuadrilátero es concíclico. Nótese que, con la sugerencia, se pretendía establecer una relación con la propiedad previamente demostrada y así ir organizando las ideas.

Cuadro 33 (cont.)

Nº	Actividades	Comentarios
4	Construya un cuadrilátero concíclico ABCD. Trace sus diagonales AC y BD. Demuestre que el producto de las diagonales de un cuadrilátero concíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos: AB.CD + AD.BC = AC.BD.	A partir del trazado de las diagonales de un cuadrilátero concíclico, se pide demostrar el teorema de Ptolomeo; en esta demostración es clave la identificación de pares de triángulos semejantes y aplicar ciertas propiedades aritméticas de las razones y proporciones.
5	Se afirma que dados cuatro segmentos de longitudes a, b, c y d tales que cualesquiera es menor que la suma de las otras tres, es posible construir tres cuadriláteros concíclicos distintos que tengan como lados dichos segmentos. Intenta construir tales cuadriláteros.	El propósito está en construir un cuadrilátero concíclico dadas las longitudes de sus lados.
6	Construya una circunferencia con centro en O y radio r Sea A un punto exterior a dicha circunferencia. Desde A, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia. Sean E y H los correspondientes puntos de tangencia. Sea C un punto exterior a dicha circunferencia y que pertenezca al interior del ángulo < EAH. Desde C, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia. Sean F y G los correspondientes puntos de tangencia. Sea B el punto de intersección de las rectas tangentes AE y CF Sea D el punto de intersección de las rectas AH y CG Construya el cuadrilátero ABCD. Se dice que tal cuadrilátero es inscribible Establezca la definición de cuadrilátero inscribible Demostrar que si el cuadrilátero es inscribible, entonces la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados opuestos: AB + CD = BC + DA	A partir de la construcción de rectas tangentes a una circunferencia dada desde un punto exterior a la misma, se construye un cuadrilátero inscribible y se enuncia una propiedad relevante del mismo, esperando que sea demostrado; para ello, se espera que los participantes en el curso de RPG_AC conozcan y apliquen los dos segmentos tangentes a la circunferencia dada trazados des un mismo punto exterior son congruentes.

Cuadro 33 (cont.)

Nº	Actividades	Comentarios
7	Construya un cuadrilátero inscribible ABCD Construya los triángulos ABC y ADC Construya la circunferencia inscrita al triángulo ABC. Sean P y Q los puntos de tangencia con los lados AB y BC respectivamente Construya la circunferencia inscrita al triángulo ADC. Sean R y S los puntos de tangencia con los lados CD y DA respectivamente ¿Qué observa en relación a tales circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ADC? Justifique su respuesta ¿Qué puede decir en relación al cuadrilátero PQRS? Justifique su respuesta	El objetivo es que, una vez realizada la construcción siguiendo el procedimiento indicado, identifiquen relaciones existentes entre ciertos objetos que intervienen, formulen conjeturas y traten de validarlas.

Balance general del curso de RPG_AC como escenario de aprendizaje

El curso de RPG_AC ha sido asumido como *un escenario formativo e investigativo*, ya que, por una parte, forma parte como curso optativo de integración del plan de estudio del componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay y, por otra parte, es el contexto donde se ha abordado el estudio de las competencias matemáticas y didácticas que ponen en juego los participantes cuando realizan ciertas tareas.

Desde la planificación de las actividades de enseñanza y aprendizaje que lo conforman, el curso de RPG_AC se ha sustentado en el *planteamiento de tareas didáctico – matemáticas*, orientadas a la resolución de problemas geométricos, haciendo uso de un SGD como el Cabri II o al diseño de una unidad didáctica con contenidos geométricos para educación media.

Así, teniendo como referencia el MEA propuesto por Orellana Chacín (2002) y los componentes del análisis didáctico para la fase de diseño (Gómez, 2007; Rico y Fernández-Cano, 2013; Ortiz, Iglesias y Paredes, 2013), se planificaron tres talleres relacionados con los siguientes temas: (a) construcciones geométricas con regla y compás; (b) equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura; (c) cuadriláteros concíclicos y cuadriláteros inscribibles.

De esta manera, se ha valorado el papel que han jugado las construcciones con regla y compás en el desarrollo teórico y las aplicaciones prácticas de la Geometría Euclidiana, procurando que así lo entiendan los participantes en el curso de RPG_AC. En este sentido, se considera clave identificar en una construcción geométrica los siguientes elementos: (a) lo dado (objetos iniciales); (b) el procedimiento de construcción (incluyendo los objetos auxiliares); (c) lo que se quiere construir (objetos finales). En atención a los elementos conocidos y lo planteado en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, las actividades se clasificaron en actividades dirigidas y actividades libres. Además, en estas actividades se emplearon los métodos de construcción mencionados por Siñeriz (2000).

Para desarrollar la noción de equivalencia entre una construcción con doblado de papel y una construcción con regla y compás de una misma figura geométrica, se lograron identificar tres ideas matemáticas relevantes: (a) superposición de figuras geométricas; (b) correspondencia entre figuras geométricas y (c) puntos y rectas construibles.

Las actividades se organizaron siguiendo el esquema construir → explorar → conjeturar → validar, el cual se considera apropiado para emprender acciones de carácter heurístico como las planteadas por Alsina Catalá et al. (1997) y Perry Carrasco et al. (2006), especialmente cuando se sigue un enfoque de resolución de problemas y se incorpora el uso de un SGD.

También se establecieron las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele (Hoffer, 1981; Gutiérrez y Jaime, 1998) para cada una de las competencias matemáticas (ver Cuadro 18). Asimismo, se identificaron los errores geométricos más comunes que pudieran cometer los participantes en el curso de RPG_AC (Franchi y Hernández de Rincón, 2004; ver Cuadro 19), así como las dificultades que pudieran confrontar durante el proceso de enseñanza y aprendizaje (Socas, 1997).

La resolución de problemas geométricos vinculados con los temas seleccionados para cada uno de los talleres planificados fue la principal estrategia de enseñanza y aprendizaje junto con el uso del Cabri II y el plegado de papel (en el taller nº 2).

Con el diseño de una unidad didáctica con contenidos geométricos, basándose en la noción de análisis didáctico, se ha pretendido que los participantes – como profesores en formación - abordaran la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría escolar; problemática entendida como un *ámbito de investigación profesional* (AIP).

CAPÍTULO V

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Dado que el primer objetivo general de esta investigación establece el estudio de las competencias matemáticas puestas en práctica por los futuros profesores de Matemática, cuando resuelven problemas geométricos usando un software de Geometría Dinámica y abordan la demostración en Geometría y, además, en función de los objetivos específicos, esto implica: la descripción de los usos que, los profesores en formación, le dan a los software de Geometría Dinámica, la clasificación de las justificaciones que producen y el análisis de las competencias matemáticas puestas en práctica por ellos cuando realizan ciertas tareas matemáticas, se decidió abordar el análisis de la información recabada en cada uno de los tres talleres descritos en el Capítulo IV.

Cabe señalar que para el desarrollo de cada uno de estos talleres los participantes disponían de una hoja de trabajo y una computadora con el Cabri II Plus y, además, conocían que debían guardar las construcciones realizadas con este software en archivos .fig, elaborar un informe según lo establecido en la hoja de trabajo y, luego realizar una presentación oral de los resultados obtenidos ante la facilitadora y compañeros de estudios. De esta manera, las producciones orales y escritas de los participantes en el curso de RPG_AC han sido los insumos analizados en esta investigación, teniendo en cuenta cada uno de los tres talleres de resolución de problemas geométricos en un ambiente de Geometría Dinámica.

Para describir los usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II, se ha tenido en consideración el uso técnico de este software, en función a los siguientes indicadores: (a) empleo de las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás; (b) empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman tal construcción; (c) empleo de herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla.

En relación al primer indicador (empleo de las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás), el Cabri II Plus cuenta con una barra que proporciona las herramientas para crear y manipular los objetos geométricos (ver Gráfico 18), los cuales – como se mencionó en el Capítulo IV – se clasifican, según el modo de construcción, en objetos libres, objetos definidos por puntos y objetos construidos.

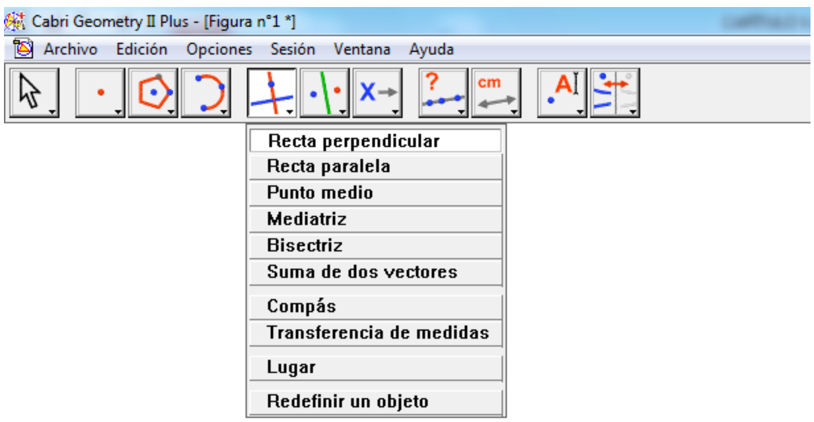
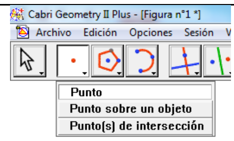


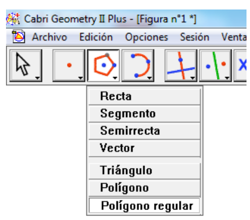
Gráfico 18. Barra de Herramientas del Cabri II Plus con el menú de construcciones desplegado.

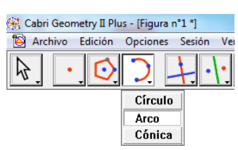
Así, por ejemplo, es posible crear un punto libre sobre un plano (dado por la hoja de trabajo) o un punto libre sobre un objeto previamente construido; así como es posible trazar una recta que pasa por dos puntos distintos cualesquiera o trazar una recta que pasa por un punto dado con cierta pendiente. Una circunferencia puede trazarse conociendo su centro y un punto por el cual pasa o también puede trazarse dado el centro y un radio (botón compás). Como se observa en el Gráfico 18, con los botones de herramientas correspondientes a las construcciones, es posible simplificar ciertas construcciones con regla y compás que involucran el trazado de rectas perpendiculares o paralelas, la construcción de la mediatriz de un segmento o la ubicación del punto medio de un segmento, la construcción de la bisectriz de un ángulo, etc. Todas estas herramientas vienen dadas por macro – construcciones. En el

Cuadro 34, se describen los principales botones de herramientas disponibles en el Cabri II Plus.

Cuadro 34
Herramientas de construcción disponibles en el Cabri II Plus

<table>
<tr><td rowspan="3">

PUNTOS</td><td>Punto</td><td>Crea un punto libre sobre la hoja.</td></tr>
<tr><td>Punto sobre un objeto</td><td>Crea un punto libre sobre un objeto.</td></tr>
<tr><td>Punto de intersección</td><td>Crea un punto de intersección de dos objetos.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">

LÍNEAS</td><td>Recta</td><td>Construye una recta que pasa por dos puntos distintos ya creados o una recta que pasa por un punto dado y tiene cierta inclinación (pendiente).</td></tr>
<tr><td>Segmento</td><td>Construye un segmento conocidos sus puntos extremos.</td></tr>
<tr><td>Semirrecta</td><td>Construye una semirrecta dado su origen y un punto por el cual pasa.</td></tr>
<tr><td>Vector</td><td>Construye un vector, dados su origen y extremo.</td></tr>
<tr><td>Triángulo</td><td>Construye un triángulo determinado por tres puntos distintos cualesquiera no alineados.</td></tr>
<tr><td>Polígono</td><td>Permite construir un polígono conocidos sus vértices.</td></tr>
<tr><td>Polígono regular</td><td>Permite construir un polígono regular conocidos su centro, uno de sus vértices y el número de lados.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

CURVAS</td><td>Círculo / Circunferencia</td><td>Construye una circunferencia a partir de su centro y un punto por el cual pasa.</td></tr>
<tr><td>Arco</td><td>Construye un arco de circunferencia conocido tres puntos (el primer y el tercer punto seleccionado son los extremos del arco).</td></tr>
<tr><td>Cónica</td><td>Construye la cónica definida por cinco puntos distintos, de los cuales a lo sumo tres están alineados.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

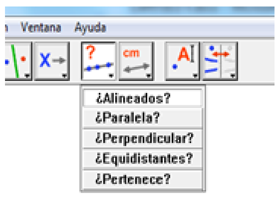
CONSTRUCCIONES</td><td>Recta Perpendicular</td><td>Construye la recta perpendicular a una recta dada y que pasa por un punto dado.</td></tr>
<tr><td>Recta Paralela</td><td>Construye la recta paralela a una recta dada y que pasa por un punto fuera de ella.</td></tr>
</table>

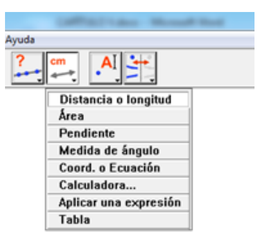
Cuadro 34 (cont.)

<table>
<tr><td rowspan="8">
CONSTRUCCIONES</td><td>Punto medio</td><td>Construye el punto medio de un segmento.</td></tr>
<tr><td>Mediatriz</td><td>Construye la mediatriz de un segmento dado.</td></tr>
<tr><td>Bisectriz</td><td>Construye la bisectriz de un ángulo.</td></tr>
<tr><td>Suma de vectores</td><td>Construye el vector suma de dos vectores dados.</td></tr>
<tr><td>Compás</td><td>Construye una circunferencia de centro y radio dados. Esta herramienta permite contar con un compás moderno, ya que, conserva la abertura.</td></tr>
<tr><td>Transferencia de medida</td><td>Permite transferir una longitud sobre una circunferencia, un polígono, un vector, un eje de coordenadas, o una semirrecta.</td></tr>
<tr><td>Lugar</td><td>Construye un lugar geométrico. Para ello hay que seleccionar un objeto A y un punto libre M sobre un objeto. Esta herramienta construye el lugar geométrico de A cuando M varía.</td></tr>
<tr><td>Redefinir un objeto</td><td>Permite redefinir la construcción de un objeto ya construido, sin tener que rehacer la construcción. Los objetos que dependen de este objeto no son afectados.</td></tr>
</table>

En cuanto al segundo indicador (empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman tal construcción), en el Cabri II, se dispone fundamentalmente de dos componentes de la barra de herramientas: propiedades (verificación de relaciones) y medida (longitud, área, pendiente, ángulo, etc.) como se da a conocer en el Cuadro 35.

Cuadro 35
Herramientas de verificación de relaciones y medida disponibles en el Cabri II Plus

<table>
<tr><td rowspan="5">

PROPIEDADES</td><td>¿Alineados?</td><td>Verifica si tres puntos – previamente seleccionados – están alineados.</td></tr>
<tr><td>¿Paralela?</td><td>Verifica si dos rectas (semirrectas, segmentos, vectores y lados de un polígono) son paralelas.</td></tr>
<tr><td>¿Perpendicular?</td><td>Verifica si dos rectas (semirrectas, segmentos, vectores y lados de un polígono) son perpendiculares.</td></tr>
<tr><td>¿Equidistante?</td><td>Verifica si dos puntos A y B son equidistantes del punto O. Deben seleccionarse los tres puntos O, A B en este orden.</td></tr>
<tr><td>¿Pertenece?</td><td>Verifica si un punto pertenece a un objeto seleccionado.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">

MEDIDA</td><td>Distancia y longitud</td><td>Mide la longitud de un segmento, la norma de un vector, o la distancia entre un punto y una recta, o entre un punto y una circunferencia, o entre dos puntos. Mide también el perímetro de un polígono y la longitud de una circunferencia.</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>Mide la superficie de un polígono y de un círculo.</td></tr>
<tr><td>Pendiente</td><td>Mide, en el sistema de coordenadas definido por defecto, la pendiente de una recta (semirrecta, segmento o vector).</td></tr>
<tr><td>Medida de un ángulo</td><td>Mide un ángulo definido por tres puntos (siendo el segundo punto seleccionado el vértice del ángulo).</td></tr>
<tr><td>Coordenadas y Ecuación</td><td>Construye un texto que contiene la ecuación de un objeto geométrico seleccionado: recta, circunferencia, cónica o lugar geométrico.</td></tr>
<tr><td>Calculadora</td><td>Activa la ventana de la calculadora que dispone de funciones usualmente empleadas en aritmética.</td></tr>
<tr><td>Aplicar una expresión</td><td>Calcula el valor de una expresión algebraica dados valores numéricos a las variables presentes.</td></tr>
<tr><td>Tabla</td><td>Permite crear una matriz de números surgidos de la figura, para diferentes configuraciones de los objetos.</td></tr>
</table>

En relación con el tercer indicador (empleo de herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla), los usuarios del Cabri II Plus disponen de las herramientas textos y símbolos y atributos como se muestra en el Cuadro 36 (sólo los botones más empleados por los participantes en el curso de RPG_AC).

Cuadro 36

Herramientas para mejorar la apariencia de la figura construida con el Cabri II Plus

<table>
<tr><td rowspan="5">

TEXTO Y SÍMBOLOS</td><td>Nombrar / Etiqueta</td><td>Verifica si tres puntos – previamente seleccionados – están alineados.</td></tr>
<tr><td>Texto</td><td>Verifica si dos rectas (semirrectas, segmentos, vectores y lados de un polígono) son paralelas.</td></tr>
<tr><td>Marcar un ángulo</td><td>Verifica si dos rectas (semirrectas, segmentos, vectores y lados de un polígono) son perpendiculares.</td></tr>
<tr><td>Traza</td><td>Verifica si dos puntos A y B son equidistantes del punto O. Deben seleccionarse los tres puntos O, A B en este orden.</td></tr>
<tr><td>Animación</td><td>Verifica si un punto pertenece a un objeto seleccionado.</td></tr>
<tr><td rowspan="9">

ATRIBUTOS</td><td>Ocultar / Mostrar</td><td>Permite ocultar o mostrar los objetos ocultos de la figura; esto permite mejorar la visualización de construcciones complejas o muy elaboradas.</td></tr>
<tr><td>Color</td><td>Permite cambiar los colores de trazo de un objeto.</td></tr>
<tr><td>Rellenar</td><td>Permite dar color al interior de un polígono o una circunferencia.</td></tr>
<tr><td>Color de texto</td><td>Permite cambiar el color de un texto.</td></tr>
<tr><td>Espesor</td><td>Modifica el espesor de las líneas y curvas.</td></tr>
<tr><td>Punteado</td><td>Modifica el estilo de trazo de las líneas y curvas.</td></tr>
<tr><td>Mostrar / Ocultar los ejes</td><td>Muestra el sistema de coordenadas cartesianas definido por defecto en el ambiente Cabri.</td></tr>
<tr><td>Rejilla</td><td>Permite mostrar el sistema de coordenadas con una rejilla (similar a una hoja de papel cuadriculado).</td></tr>
</table>

Nótese que, atendiendo al esquema de trabajo,

construir → explorar → conjeturar → validar

las herramientas de construcción resultarían útiles en la primera etapa, mientras que las herramientas de verificación de propiedades y medición favorecerían la exploración de la figura y el reconocimiento de patrones y regularidades; las herramientas de texto y símbolos y atributos, por lo general, ayudarían a mejorar la apariencia de una figura construida con regla y compás en un AGD y mostrar sus atributos relevantes cuando se da a conocer el procedimiento de construcción y su correspondiente validación. Así, pues, además, del uso técnico del Cabri II, pareciera factible hablar de un uso heurístico del mismo, teniendo en cuentas las acciones realizadas por los profesores en formación: construcción, exploración, formulación de conjeturas y validación, las cuales se describen a continuación:

Cuadro 37
Uso heurístico de un software de Geometría Dinámica

Acciones	**Descripción**
Construcción	Acción y efecto de construir una figura geométrica, con regla y compás en un AGD, a partir de ciertas condiciones iniciales.
Exploración	Acción y efecto de explorar una figura geométrica, previamente construida, con el propósito de reconocer relaciones entre los objetos que la conforman o intervinieron en su construcción y, así, identificar patrones o regularidades.
Formulación de Conjeturas	Acción y efecto de formular una afirmación relacionada con una de las propiedades que satisface la figura, en atención a los indicios recabados durante la exploración, pero que aún no ha sido validada.
Validación	Acción y efecto de validar o dar razones que justifican la veracidad de la conjetura o, en algunos casos, mostrar un contraejemplo que sirva para rechazar la conjetura formulada. .

Para la clasificación de las justificaciones dadas por los participantes en el curso de RPG_AC, se han seleccionado dos criterios:

1. La justificación como producto final de un proceso de validación matemática puede ser vista como explicación, prueba o demostración formal (ver Cuadro 38). Esto coincide por lo planteado por Balacheff (2000), para quien los procesos de validación son una forma de razonamiento cuando tenga como propósito asegurarse la validez de una proposición y producir una explicación, una prueba o una demostración.

2. La justificación como práctica argumentativa puede ser vista como una actividad intelectual en la cual se ponen en juego lo que Flores (2007) denomina *esquemas de argumentación* (ver Cuadro 39).

Cuadro 38
Tipos de justificación como producto de un proceso de validación matemática

Explicación	Ésta establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en los conocimientos y en lo que constituye la racionalidad de la persona que la expresa, haciendo uso especialmente del lenguaje natural. En la explicación, la verdad de una proposición ya ha sido aceptada por el sujeto locutor, pero no necesariamente por la audiencia o por los integrantes de una comunidad (Balacheff, 2000). Da una o más razones para volver compresible un dato (un fenómeno, un resultado, un comportamiento, etc.) (Duval, 1999, p. 9).
Prueba	Es una explicación reconocida y aceptada por una comunidad, una vez que la misma ha sido dada a conocer o comunicada por el sujeto locutor. Dicha aceptación no es definitiva, ya que, puede cambiar con el avance de los conocimientos y las reglas en las cuales se sustenta (Balacheff, 2000).
Demostración	Es el tipo de prueba predominante en Matemática. Una demostración "se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas (Balacheff, 2000, p. 13). Es un razonamiento válido, es una verdadera prueba y la única aceptable en Matemática (Duval, 1999).

Para Perry Carrasco et al. (2006), las *acciones de producto* vinculadas a la *actividad demostrativa* son explicación, prueba y presentación sistemática. Estas autoras establecen que: (a) la *explicación* es una "justificación de carácter empírico, basada en: remitir a la figura y mostrar lo que en ella se ve; mostrar resultados empíricos de la exploración" (p. 27); (b) la *prueba* es una "justificación no exhaustiva que explicita afirmaciones y razones referidas a propiedades geométricas generales sacadas del conjunto de posibilidades y de nuevas relaciones de dependencia encontradas en el análisis" (p. 27); (c) la presentación sistemática es "una justificación de carácter deductivo que encadena explícitamente afirmaciones y razones, desde la información conocida hasta el enunciado esperado" (p. 27).

Para Flores (2007), la justificación de un resultado es el proceso de validación de éste y establece que la demostración o prueba - no hace distinciones entre estos términos – puede ser entendida como resultado de una práctica argumentativa que se apoya en esquemas analíticos cuyos razonamientos son válidos; por lo cual, se ha dedicado a estudiar los esquemas de argumentación en profesores de Matemáticas del bachillerato mexicano. Según Flores, se entiende por esquema de argumentación a la manera en que una persona utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa dirigida a justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura surgida durante el proceso de resolución de un problema. En el siguiente cuadro, se describen los tipos de esquemas de argumentación identificados por Flores (2007).

Cuadro 39
Esquemas de argumentación propuestos por Flores (2007)

Denominación	Descripción
Autoritarios	Sus argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna autoridad; en este caso, puede ser un compañero, un libro de texto o el facilitador del curso.
Simbólicos	En los que el profesor en formación utiliza un lenguaje matemático y símbolos de manera superflua y poco consistente, sin llegar realmente a las conclusiones a las que quiere llegar. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados.
Fácticos	En los que el profesor en formación hace un recuento de lo que hizo o repite hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado. A menudo, se limita a exponer una serie de pasos como si fueran un algoritmo.
Empíricos	En los que el profesor en formación se apoya en hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar un argumento.
Analíticos	En los que el profesor en formación sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida

Cabe señalar que tanto Perry Carrasco et al. (2006) y Flores (2007) han trabajado en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría y han incorporado en sus prácticas docentes el uso de un SGD; por ello, sus aportes han sido tomados en cuenta en esta investigación.

Para analizar las competencias matemáticas puestas en práctica por los participantes en el curso de RPG_AC, se ha tenido en consideración las habilidades geométricas asociadas a las competencias matemáticas y los niveles de razonamiento geométrico tal como se muestran en el Cuadro 18 del Capítulo IV. Además, se tiene en cuenta que las competencias matemáticas se manifiestan cuando se realizan ciertas tareas vinculadas con el quehacer matemático y, por ello, las características de cada uno de los talleres (en términos de las actividades planteadas) exigirían (y quizá favorecerían) la puesta en juego de ciertas competencias en particular.

Construcciones geométricas en un AGD

Como se mencionó en el Capítulo IV, el taller nº 1 sobre las construcciones con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica se organizó en función a seis actividades dirigidas (objetos iniciales y procedimiento dado, objetos finales por construir) y seis actividades libres (objetos iniciales y finales dados, procedimiento por establecer) como se muestra en los Cuadros 21 y 22.

Una vez recabada la información correspondiente al taller nº 1, se elaboró un inventario de las actividades dirigidas, en atención a los siguientes aspectos: (a) seguimiento de las instrucciones dadas y aplicación del procedimiento indicado, (b) justificación de las afirmaciones realizadas, y (c) tipo de método de construcción empleado (ver Anexo D); así como también de las actividades libres, pero, en este caso, el aspecto (a) fue sustituido por descripción del procedimiento empleado para construir la figura (ver Anexo E). Conocido este inventario, se decidió trabajar con cinco de los seis grupos de trabajo conformados para realizar las actividades propuestas en el taller nº 1; uno de los equipos no fue considerado por no disponerse de algunos archivos .fig. Seguidamente, para cada uno de los cinco grupos de trabajo, se procedió a llevar un registro organizado de la información, según el siguiente esquema:

Cuadro 40
Esquema seguido para organizar la información recabada en el taller nº 1

<table>
<tr><td colspan="2">Taller nº 1</td><td colspan="2">Integrantes del grupo de trabajo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parte 1: Actividades dirigidas</td><td colspan="2" rowspan="2">Imagen de la figura construida
(copiada con la opción
Imprimir pantalla)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad nº X: Denominación de la actividad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método de construcción empleado</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Instrucciones</td><td>Herramientas empleadas</td><td>Secuencia</td><td>Observaciones</td></tr>
<tr><td>Pasos a seguir para construir una figura geométrica</td><td>Haciendo uso de la herramienta “mostrar la descripción”, se tiene un registro de cada una de las herramientas empleadas por los participantes cuando efectuaron una construcción con el Cabri II.</td><td>Orden de los pasos seguidos</td><td>Realizadas por la docente en función a sus intereses investigativos</td></tr>
</table>

Dado el volumen de información recabada y teniendo en cuenta el tipo de actividades (dirigidas y libres), el método de construcción empleado (método de los dos lugares, método de la figura auxiliar y método de la figura semejante) y las respuestas dadas por los participantes que involucraran algún tipo de justificación, se acordó trabajar con sólo cuatro de las doce actividades propuestas (ver Cuadro 41).

Cuadro 41
Actividades seleccionadas para el análisis de la información correspondiente al taller nº 1

Actividad	Tipo de actividad	Método de construcción
Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento.	Dirigida	Método de los dos lugares
División de un segmento de recta en n partes iguales.	Dirigida	Método de la figura semejante
Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.	Libre	Método de la figura auxiliar
Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial).	Libre	Método de los dos lugares

En el Capítulo IV, se ilustraron las actividades dirigidas del taller nº 1 con la actividad nº 2, *trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento*; por ello, aquí no se presentará una descripción detallada de la misma. Una vez analizadas los informes escritos y los archivos .fig, se identificaron las siguientes regularidades:

1. Siguen paso a paso el procedimiento indicado, usando las herramientas disponibles en el Cabri II según lo requerido; es decir, se observa una correspondencia entre los pasos del procedimiento de construcción dado y las herramientas empleadas por los participantes en el curso de RPG_AC (ver Cuadro 42). Introducen un segmento auxiliar, el cual debe tener una longitud r mayor a la mitad de la longitud del segmento AB; tal longitud r representa la abertura del compás y permitía construir una circunferencia con centro en A (o en B) y radio r. Uno de los equipos (grupo nº 2) trazó el segmento AB, ubicó el punto P (punto medio

del segmento AB), midió la distancia entre los puntos A y P y, luego, introducen un segmento auxiliar y miden su longitud para garantizar que sea mayor que AP. Los restantes equipos garantizaron esta condición por estimación, sin que mediara la verificación empírica. En esta actividad, el Cabri fue empleado básicamente para efectuar una construcción con regla y compás en un AGD.

Cuadro 42
Correspondencia entre el procedimiento dado y las herramientas empleadas

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
6. Trace un segmento AB.	A Punto B Punto Segmento: A, B
7. Con el *compás* teniendo una abertura mayor que la mitad de la longitud de AB (aquí es necesario introducir un segmento auxiliar cuya longitud representa la abertura del compás), haga centro en los puntos A y B sucesivamente y trace arcos de circunferencia que se corten en los puntos C y D.	Punto Punto Segmento: _, _ C_1 Circunferencia (Compás): A, _ C_2 Circunferencia (Compás): B, _ C Punto (Punto(s) de intersección): _, _ D Punto (Punto(s) de intersección): _, _
8. Trace la recta determinada por los puntos C y D. La recta CD se denomina *mediatriz del segmento AB*.	Recta C, D
9. Determina el punto de intersección P de la recta CD con el segmento AB. Tal punto de intersección es el *punto medio del segmento AB.*	P Punto (Punto(s) de intersección): _, _

2. Parecieran utilizar esquemas de argumentación fácticos, cuando reconocen relaciones existentes entre los diferentes objetos que conforman esta construcción con regla y compás en un AGD: los segmentos AC y AD son radios de la circunferencia C_1 (A, r); los segmentos BC y BD son radios de la circunferencia C_2 (B, r); C_1 (A, r) y C_2 (B, r) son circunferencias congruentes.

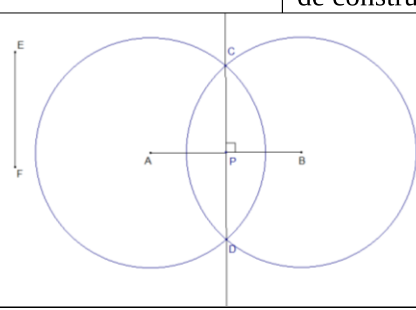
3. Partiendo de las relaciones previamente establecidas entre distintos objetos geométricos, procuran seguir una cadena lógico-deductiva, sustentada en definiciones y propiedades conocidas, con lo cual, se tendría un predominio de los esquemas de argumentación analíticos.

4. Entre las ideas principales para realizar la demostración que la recta CD es la mediatriz del segmento AB, se destacan: (a) probar que el cuadrilátero ACBD es un

rombo, para así establecer que sus diagonales AB y CD se bisecan en P y son perpendiculares entre sí (ver Cuadros 43, 44 y 46); (b) dado que los puntos C y D equidistan de los extremos del segmento AB, aplican el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento (ver Cuadro 45); (c) por congruencia de triángulos.

Cuadro 43
Justificación dada por el grupo nº 1 en la actividad dirigida nº 2

¿Cómo puedes garantizar que la recta CD es la mediatriz del segmento AB? O, en otras palabras, ¿cómo puedes garantizar que P es punto medio del segmento AB y que la recta CD es perpendicular al segmento AB en P?

Grupo nº	Justificación dada	Observaciones
1	"Si consideramos los segmentos AC, AD, BC y BD son de igual longitud, ya que, AC y AD son radios de una misma circunferencia al igual que BC y BD; a su vez ambas circunferencias son congruentes por ser construidas con el mismo segmento auxiliar. De lo anterior podemos considerar que el cuadrilátero ADBC, el cual tiene los cuatro lados de igual longitud y los únicos que cumplen esta condición son el cuadrado y el rombo. Por lo tanto, los segmentos CD y AB son las diagonales del cuadrilátero ADBC y, por propiedades tanto del cuadrado como del rombo, sus diagonales se bisecan en el punto medio y son perpendiculares entre sí. Por lo tanto, P es el punto medio del segmento AB y los segmentos CD y AB son perpendiculares en P"	Teniendo en cuenta las relaciones existentes entre los objetos que conforman esta construcción, establecen, siguiendo un razonamiento lógico – deductivo, que el cuadrilátero ADBC es un rombo; a partir de allí, hacen uso de propiedades conocidas de los rombos y cuadrados para justificar que P es el punto medio del segmento AB y que, además, las rectas AB y CD son perpendiculares en P. Nótese que no establecen explícitamente que el cuadrilátero ADBC sea un paralelogramo, lo cual se deduce del hecho que es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos congruentes. Pudiera decirse que hacen uso redundante del lenguaje al decir que las diagonales se bisecan en el punto medio. Aquí, parecieran mostrar un esquema de argumentación analítico apoyado en un esquema fáctico dada la referencia inicial al procedimiento de construcción.
		

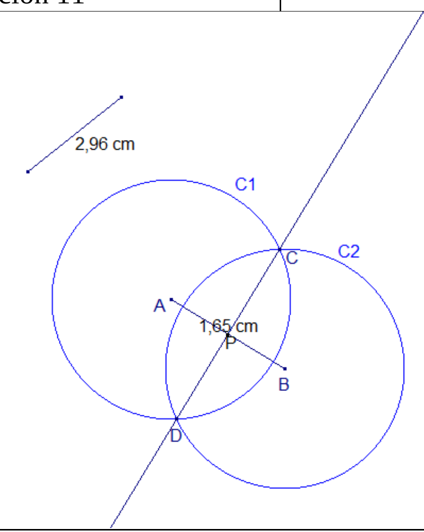
El grupo nº 2 siguió el esquema de afirmaciones y razones; aplicando el teorema AIP, demuestran que el cuadrilátero ACBD es un paralelogramo. Cabe resaltar que verifican que se satisfagan las condiciones establecidas en la hipótesis del mencionado teorema para garantizar que se cumple la tesis; es un error frecuente tratar de aplicar un teorema, sin verificar que esté dada la hipótesis. Seguidamente, como los lados del cuadrilátero ACBD son congruentes entre sí, establecen que éste es un rombo y, por ende, sus diagonales se bisecan y son perpendiculares entre sí (ver Cuadro 44). El teorema AIP establece que: "Se dan dos rectas L_1 y L_2 cortadas por una secante S en los puntos P y Q respectivamente. Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas L_1 y L_2 son paralelas".

Cuadro 44
Justificación dada por el grupo nº 2 en la actividad dirigida nº 2

¿Cómo puedes garantizar que la recta CD es la mediatriz del segmento AB? O, en otras palabras, ¿cómo puedes garantizar que P es punto medio del segmento AB y que la recta CD es perpendicular al segmento AB en P?

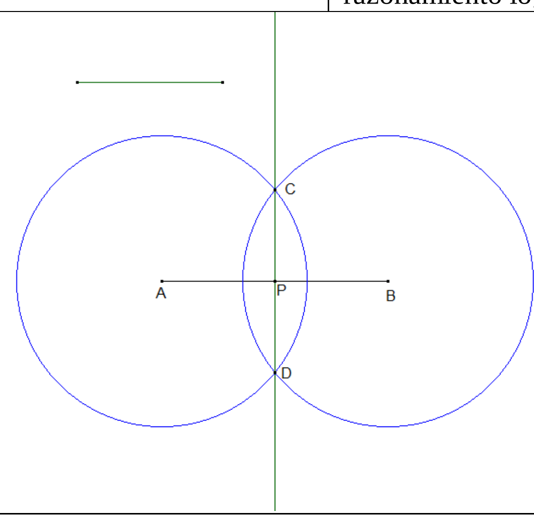
Grupo nº	Justificación dada	Observaciones
2	1. Las circunferencias C1 y C2 son congruentes; por hipótesis (*asumen que por construcción las circunferencias tienen el mismo radio y por ello son congruentes*). 2. Los segmentos AD, AC, BC y BD, son congruentes simultáneamente entre sí; son radios de circunferencias congruentes, afirmación 1 3. El segmento AB es congruente con el segmento BA; por ley de identidad 4. El triángulo ADB es congruente con el triángulo BCA; criterio de congruencia LLL, afirmaciones 2 y 3 5. El ángulo DBA es congruente con el ángulo CAB y el ángulo BAD es congruente con el ángulo ABC; afirmación 4 6. La recta AB es un secante de los segmentos BD y AC; definición de recta secante 7. El segmento AC el paralelo al segmento BD; si dos rectas son cortadas por una secante y sus ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son	Como arriba se mencionó se apoyan en la medición para garantizar que la longitud del segmento auxiliar sea mayor que la mitad de la longitud del segmento AB, manifestándose así un esquema de argumentación empírico. Obsérvese que la demostración se inicia teniendo en cuenta que las circunferencias C_1 y C_2 son congruentes, ya que, por construcción tienen el mismo radio y, luego, elaboran una cadena lógico-deductiva sustentada en los criterios de congruencia de triángulos, el teorema AIP y las propiedades de los rombos. De modo que pareciera predominar un esquema de argumentación analítico apoyado en un esquema fáctico.

Cuadro 44 (Cont.)

Grupo nº	Justificación dada	Observaciones
2	paralelas, afirmaciones 5 y 6. 8. La recta AB es un secante de los segmentos AD y BC; definición de recta secante 9. El segmento AD es paralelo al segmento BC; si dos rectas son cortadas por una secante y sus ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas, afirmaciones 5 y 8 10. El cuadrilátero ADBC es un paralelogramo que a su vez es un rombo; afirmaciones 2, 7 y 9 11. La recta DC es perpendicular al segmento AB y P es punto medio del segmento AB; porque las diagonales de un rombo se bisecan y son perpendiculares. Propiedades de los rombos 12. La recta CD es la mediatriz del segmento AB; afirmación 11	Aquí se materializa la idea central de esta demostración: probar que el cuadrilátero ADBC es un rombo.
		

El grupo nº 3 usó el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento, el cual permite visualizarla como el conjunto de puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento (contenido en dicho plano), aunque no hacen referencia explícita del mismo; no construyen una cadena lógico–deductiva y dejan implícitas ciertas premisas que soportan la justificación dada, como se muestra en el Cuadro 45.

Cuadro 45
Justificación dada por el grupo nº 3 en la actividad dirigida nº 2

¿Cómo puedes garantizar que la recta CD es la mediatriz del segmento AB? O, en otras palabras, ¿cómo puedes garantizar que P es punto medio del segmento AB y que la recta CD es perpendicular al segmento AB en P?		
Grupo nº	**Justificación dada**	**Observaciones**
3	Geométricamente el modo de obtener el punto medio de un segmento, mediante regla y compás, consiste en trazar dos arcos de circunferencia de igual radio (*). Los dos arcos se cortarán en dos puntos que pertenecen a la mediatriz, puesto que cumplen la condición de equidistar de los extremos del segmento. Esta corta al segmento en su punto medio. Por lo tanto, P es punto medio del segmento AB. Por ser la recta CD la mediatriz del segmento AB, esta es perpendicular a dicho segmento en P.	(*) No indican que tales circunferencias tienen centro en los extremos del segmento AB y esto es relevante para señalar que los puntos C y D equidistan de los puntos A y B. Además, es importante tener en cuenta el postulado de la recta: Por dos puntos distintos cualesquiera pasa una única recta (en este caso, la recta que pasa por los puntos C y D). Luego, aplican la definición de la mediatriz de un segmento. Pareciera mostrar un esquema de argumentación analítico apoyado en un esquema fáctico (al inicio se refieren al procedimiento de construcción con regla y compás), aunque no completan una cadena de razonamiento lógico-deductiva.
		

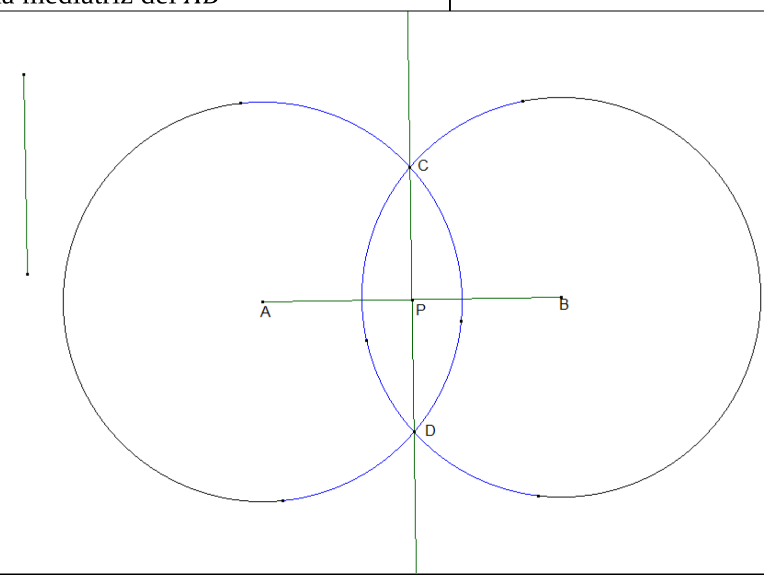
El grupo nº 4 – análogo a lo realizado por el grupo nº 2 – partiendo del hecho que, por construcción, el cuadrilátero ADBC tiene sus lados congruentes entre sí, prueban que es un rombo y, por ende, sus diagonales se bisecan y son congruentes entre sí (ver Cuadro 46). En este grupo, pareciera manifestarse un esquema de argumentación analítico apoyada en esquema de argumentación fáctico. Es de notar que en el proceso de justificación matemática los participantes han aplicado ciertas propiedades conocidas, pero han decidido demostrar otras que se suponen también conocen de los cursos de Geometría I y Geometría II.

Cuadro 46
Justificación dada por el grupo nº 4 en la actividad dirigida nº 2

¿Cómo puedes garantizar que la recta CD es la mediatriz del segmento AB? O, en otras palabras, ¿cómo puedes garantizar que P es punto medio del segmento AB y que la recta CD es perpendicular al segmento AB en P?

Grupo nº	Justificación dada	Observaciones
4	1. Para esta demostración, primeramente uniremos los puntos A, D, B y A, formando el cuadrilátero ADBC, además en este cuadrilátero todos los lados son congruentes, ya que el radio $\overline{AC}$, y el radio $\overline{AD}$, son radios de la misma circunferencia; y también el radio $\overline{BC}$, y el radio $\overline{BD}$, son radios de la misma circunferencia. Además ambas circunferencias son construidas considerando la misma longitud de un segmento auxiliar, por lo tanto en el cuadrilátero ADBC, $\overline{AD} \cong \overline{DB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$. 2. Ahora si consideramos la diagonal $\overline{DC}$, esta divide al cuadrilátero ADBC en dos triángulos, los cuales son: Δ DCA y Δ CDB; $\overline{DC} \cong \overline{CD}$ por identidad. 3. Por criterio de congruencia de triángulos (L.L.L), Δ DAC $\cong$ Δ CBD 4. Por P.C.T.C $<$ DCA $\cong$ $<$ CDB. 5. Considerando $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{DB}$, cortadas por una secante $\overleftrightarrow{DC}$, en los puntos D y C, tenemos que los ángulos con vértice en los puntos D y C son congruentes, $\overline{CA} \parallel \overline{DB}$, por A.I.P. 6. Si tomamos a $\overline{AB}$, como una diagonal de cuadrilátero ADBC, la cual lo divide en dos triángulos congruentes, los cuales son: Δ ACB $\cong$ Δ BDA; AB $\cong$ BA por identidad.	Construyen un cuadrilátero ADBC con sus lados congruentes entre sí: sin embargo, no aplican el hecho conocido que si en un cuadrilátero ambos pares de lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo; más bien proceden a demostrar esta propiedad. Seguidamente, por ser un paralelogramo con los lados congruentes entre sí, por definición, establecen que es un rombo y aplican la propiedad que las diagonales de un rombo se bisecan (como en todo paralelogramo) y son perpendiculares. Esto les permite asegurar que la recta CD es la mediatriz del segmento AB y P es el punto medio del segmento AB.

Cuadro 46 (cont.)

Grupo nº	Justificación dada	Observaciones
4	7. Por criterio de congruencia de triángulos (L.L.L), Δ ACB $\cong$ Δ BDA. 8. Por P.C.T.C $<$ CBA $\cong$ $<$ DAB. 9. Considerando $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, cortadas por una secante $\overleftrightarrow{AB}$, en los puntos A y B, tenemos que los ángulos con vértice en los puntos A y B son congruentes, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, por A.I.P. 10. Por lo tanto como en el cuadrilátero $\overline{CA} \parallel \overline{DB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, el ADBC es un paralelogramo, por definición de paralelogramo. 11. Como el paralelogramo ADBC tiene todos sus lados congruentes, por definición de rombo, el paralelogramo ADBC es un rombo. 12. Por propiedades del rombo, tenemos que sus diagonales se bisecan en el punto P y son ortodiagonales, por tanto $\overline{AP} \cong \overline{PB}$, y $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$ en el punto P. Así $\overleftrightarrow{CD}$ es la mediatriz del $\overline{AB}$	Utilizan el término ortodiagonal utilizado en el curso de Geometría II cuando se estudió el tema de cuadriláteros ortodiagonales y equidiagonales (otra manera de clasificarlos). Nótese que realizan la demostración bajo el esquema de afirmaciones y razones.
		

El grupo nº 5 dio una justificación similar a la presentada por el grupo nº 3, al hacer referencia del teorema de caracterización de la mediatriz. Resulta llamativo que ninguno de los grupos haya tratado de trabajar con la congruencia de los triángulos

Δ ACP y Δ BCP y, seguidamente, probar que los ángulos <CPA y <CPB son rectos, por ser congruentes (por partes correspondientes de triángulos congruentes, PCTC), y suplementarios, ya que, forman un par lineal y PA = PB (por PCTC) (ver Gráfico 19). El trabajo con congruencia de triángulos es uno de los asuntos más estudiados en el curso de Geometría I y que sirven de inicio para las actividades de demostración.

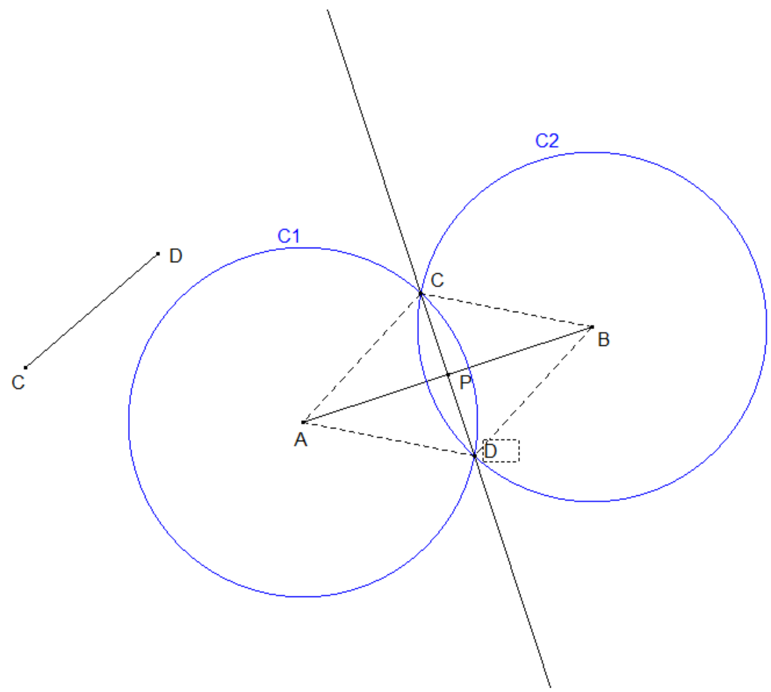


***Gráfico 19*. Construcción de la mediatriz de un segmento realizada con Cabri II**

La otra actividad dirigida analizada consistía en la división de un segmento de recta en n partes iguales, lo cual requiere - como se muestra en el Cuadro 25 - de la aplicación del método de la figura semejante, ya que, los triángulos Aii’, con i: 1, 2, 3, 4, 5 y A6B son semejantes (ver Gráfico 20).

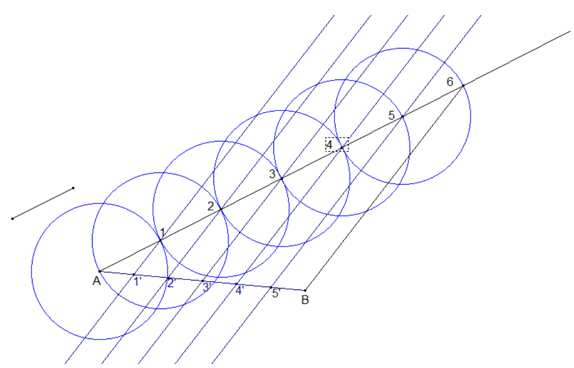


***Gráfico 20*. División de un segmento en n partes iguales (en este caso, n = 6).**

Al revisar las construcciones realizadas por los cinco grupos de trabajo, se observó que siguieron el procedimiento dado y las herramientas utilizadas se corresponden con lo requerido en cada uno de los pasos como se muestra en el Cuadro 47; sólo hubo variaciones en el número de partes en las que dividieron el segmento AB.

Cuadro 47
Correspondencia entre el procedimiento dado y las herramientas empleadas

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
1. Trace el segmento AB.	A Punto B Punto Segmento: A, B
2. Trace una semirrecta con origen en el punto A y que no esté contenida en el segmento AB.	Semirrecta: A Punto Punto Segmento: _, _
3. Con el compás, haga centro en A y con una abertura arbitraria, trace un arco de circunferencia que corte a tal semirrecta en el punto 1. Utilizando la misma abertura de compás, haga centro en 1 y trace un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en el punto 2. Así, sucesivamente, hasta trazar n divisiones en tal semirrecta.	C_1 Círculo (Compás): A, _ 1 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_2 Círculo (Compás): 1, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 2 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_3 Círculo (Compás): 2, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 3 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_4 Círculo (Compás): 3, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 4 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_5 Círculo (Compás): 4, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 5 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C_6 Círculo (Compás): 5, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 6 Punto (Punto(s) de intersección): _, _
4. Enumere los puntos de corte del 1 al n.	
5. Une el punto n con el punto B.	Segmento: B, 6
6. Trace rectas paralelas al segmento nB que pasen por los puntos n – 1, n – 2, ..., 2, 1.	L_5 Recta (Recta paralela): 5, _ L_4 Recta (Recta paralela): 4, _ L_3 Recta (Recta paralela): 3, _ L_2 Recta (Recta paralela): 2, _ L_1 Recta (Recta paralela): 1, _
7. Determina los puntos de corte de estas rectas paralelas con el segmento AB.	5' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 4' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 3' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 2' Punto (Punto(s) de intersección): _, _ 1' Punto (Punto(s) de intersección): _, _

En cuanto a las respuestas dadas a la pregunta: ¿En cuáles definiciones y propiedades geométricas se sustenta esta construcción?, pudiera decirse que el grupo nº 1 hace referencia a la aplicación de la generalización del teorema de Thales, aunque no lo aplican en forma explícita; previamente realizan un resumen del procedimiento empleado (entre corchetes), lo cual es un rasgo atribuido a los esquemas de argumentación fáctico: "[Cuando la semirrecta que tiene origen en A y no contiene el segmento AB, es dividida en (n) partes iguales con la longitud del segmento auxilia PQ y luego se traza el segmento Bn, procedemos a trazar rectas paralelas a Bn que pasen por todos y cada uno de los puntos en lo que hemos dividido la semirrecta An]. Entonces el teorema de Thales nos permite asegurar que los puntos de intersección entre las paralelas al segmento Bn están dividiendo en n partes iguales al segmento AB". Cabe recordar que la generalización del teorema de Thales establece que: Si dos rectas r y s en un plano se cortan por varias rectas paralelas, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los segmentos correspondientes en la otra. Los segmentos que se determinan en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra recta.

El grupo nº 2 trabajó con la división del segmento AB en tres partes iguales (ver Gráfico 21), siguiendo el procedimiento indicado como se observa en el Cuadro 48.

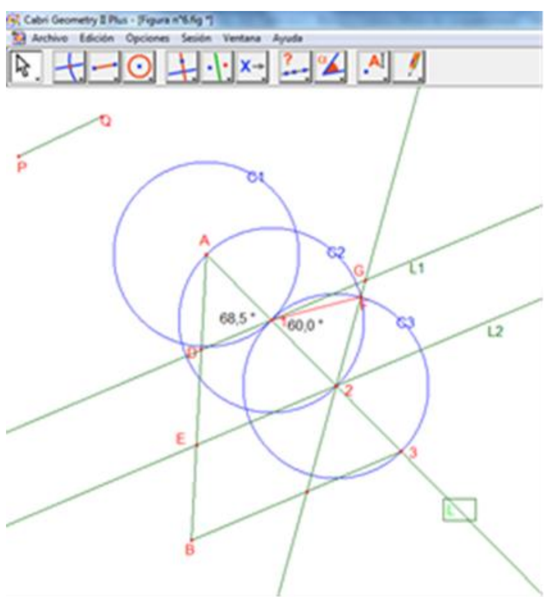


***Gráfico 21*. División de un segmento en tres partes iguales (grupo nº 2)**

Cuadro 48
Herramientas empleadas por el grupo nº 2 para dividir un segmento en tres partes iguales

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
1. Trace el segmento AB.	A Punto B Punto Segmento: A, B
2. Trace una semirrecta con origen en el punto A y que no esté contenida en el segmento AB.	L Semirrecta: A P Punto Q Punto Segmento: P, Q
3. Con el compás, haga centro en A y con una abertura arbitraria, trace un arco de circunferencia que corte a tal semirrecta en el punto 1. Utilizando la misma abertura de compás, haga centro en 1 y trace un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en el punto 2. Así, sucesivamente, hasta trazar n divisiones en tal semirrecta.	C_1 Círculo (Compás): A, PQ 1 Punto (Punto(s) de intersección): L, C_1 C_2 Círculo (Compás): 1, PQ Punto (Punto(s) de intersección): L, C_2 2 Punto (Punto(s) de intersección): L, C_2 C_3 Círculo (Compás): 2, PQ Punto (Punto(s) de intersección): L, C_3 3 Punto (Punto(s) de intersección): L, C_3
4. Enumere los puntos de corte del 1 al n.	
5. Une el punto n con el punto B.	Segmento: B, 3
6. Trace rectas paralelas al segmento nB que pasen por los puntos n – 1, n – 2, ..., 2, 1.	L_2 Recta (Recta paralela): 2, _ L_3 Recta (Recta paralela): 1, _
7. Determina los puntos de corte de estas rectas paralelas con el segmento AB.	D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, AB E Punto (Punto(s) de intersección): L_2, AB F Punto (Punto(s) de intersección): C_2, C_3 Recta: F, 2 Punto (Punto(s) de intersección): F2, B3

Nótese que los puntos D, 1 y F no están alineados y, por ello, los ángulos < D1A y < F12 no son ángulos opuestos por el vértice, aunque en ciertos casos pareciera que sí lo son. Por ende, como se comenta en el Cuadro 49, donde se da a conocer la justificación dada por el grupo nº 2, se basan en premisas falsas, posiblemente dejándose llevar por su percepción visual, en vez de las relaciones existentes entre los objetos geométricos que intervienen en la construcción realizada. Además, sirve para ilustrar cómo es posible establecer conclusiones válidas a partir de premisas falsas, permitiendo probar lo que se pide (en este caso que AD = DE = EB).

Cuadro 49
Justificación dada por el grupo nº 2 en la actividad dirigida nº 6

Grupo nº	Justificación dada	Observaciones
2	1. Los segmentos A1 y 12 son congruentes; por hipótesis (por construcción ambos segmentos tienen longitud PQ) 2. El segmento 1F es congruente con el segmento D1; por hipótesis "segmento auxiliar" 3. El ángulo D1A es congruente con el ángulo F12; por ser ángulos opuestos por el vértice **4. Los triángulos A1D y 21F son congruentes; criterio de congruencia LAL, afirmaciones 1,2 y 3** 5. Los ángulos AD1 y 2F1 son congruentes; por Partes correspondientes de triángulos congruentes, afirmación 4 6. La recta DF es una secante del segmento AB y la recta GF; por hipótesis 7. El segmento AB y la recta GF son paralelos; Si una recta es secante de otras dos y sus ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas, afirmaciones 5 y 6 8. Los segmentos ED y F2 están contenidos en el segmento AB y la recta GF respectivamente, por información de la figura 9. Los segmentos AD y F2 son congruentes; afirmación 4. 10. Los segmentos ED y F2 son paralelos; afirmaciones 7 y 8 11. Los segmentos D1 y E2 son paralelos; por hipótesis 12. Los segmentos los segmentos DF y E2 son paralelos; afirmaciones 2 y 11	El segmento 1F es radio de la circunferencia C2 (1, PQ) y D1 no es radio de circunferencia alguna; aunque, en la figura (ver Gráfico 16), pareciera que la circunferencia C1 (A, PQ) pasa por D. Además, los puntos D, 1 y F no están alineados y, por ello, los ángulos < D1A y < F12 no son ángulos opuestos por el vértice. Por lo tanto, no es posible garantizar que los triángulos AD1 y 2F1 son congruentes por el postulado LAL y que, por PCTC, los ángulos AD1 y 2F1 lo sean. Por lo cual, no están dadas las condiciones para aplicar el teorema AIP en 7 y garantizar que los segmentos ED y F2 son paralelos en 10. Por lo tanto, se van estableciendo conclusiones validas a partir de premisas falsas, siendo posible llegar a lo que se pide demostrar: AD = DE = EB

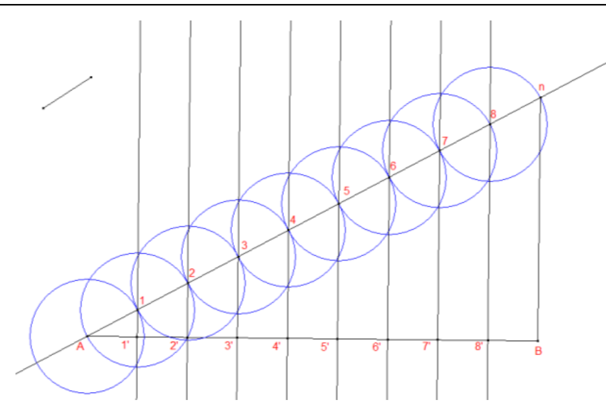
Cuadro 49 (cont.)

Grupo nº	Justificación dada	Observaciones
2	**13. El cuadrilátero DF2E es un paralelogramo; afirmaciones 10 y 12** 14. Los segmentos DE y F2 son congruentes; propiedad de paralelogramo, afirmación 13 15. El segmento DE es congruente con el segmento AD; afirmaciones 9 y 14 16. La recta DF es paralela al segmento B3; por hipótesis 17. El ángulo D1A es congruente con el ángulo B3A; definición de ángulos correspondientes 18. El ángulo G32 es congruente con el ángulo B3A; son el mismo ángulo 19. El ángulo G32 es congruente con el ángulo F12; afirmaciones 3, 17 y 18 20. Los ángulos 12F y 32G son congruentes; ángulos opuestos por el vértice 21. Los segmentos 12 y 23 son congruentes; hipótesis **22. El triángulo 23G es congruente con el triángulo 12F; afirmaciones 19, 20 y 21; criterio de congruencia LAL** 23. Los segmentos G2 y 2F son congruentes; afirmación 22 24. los segmentos G2 y BE están contenidos en el segmentos AB y la recta GF respectivamente; por información de la figura 25. Los segmentos G2 y BE son paralelos; afirmaciones 7 y 24 26. Los segmentos E2 y BG son paralelos; hipótesis **27. El cuadrilátero BE2G es un paralelogramo; afirmaciones 25 y 26** 28. Los segmentos BE y G2 son congruentes; propiedad de los paralelogramos, afirmación 27 29. Los segmentos BE y DE son congruentes; afirmaciones 14 y 22 30. Los segmentos AD, DE y EB son congruentes; afirmaciones 15 y 29	Nótese que la demostración estuvo centrada en probar que los triángulos AD1, 2F1 y 2G3 son congruentes y que los cuadriláteros DF2E y BE2G son paralelogramos, lo cual hubiera sido valido, si por el punto 2 hubiesen trazado una paralela al segmento AB (ver afirmaciones nº 13, 22 y 27 y Gráfico 16). Sin embargo, la autora considera que utilizan un esquema de argumentación analítico, ya que, construyen una cadena lógico – deductiva sustentada en definiciones y propiedades geométricas conocidas.

Los integrantes del grupo nº 3 siguieron las instrucciones y emplearon las herramientas de construcción adecuadas, pero no respondieron la pregunta formulada, con lo cual no es posible la identificación de esquema de argumentación alguno.

El grupo nº 4 procedió a dividir al segmento AB en nueve partes iguales, observándose, al revisar la construcción, que existe correspondencia entre los pasos del procedimiento de construcción y las herramientas empleadas (ver Cuadro 50). A partir de la construcción y aplicando el teorema PAC garantizan por el criterio de semejanza AA que los triángulos indicados son semejantes y, por partes correspondientes de triángulos semejantes, que los pares de lados correspondientes son proporcionales.

Cuadro 50
Justificación dada por el grupo nº 4 en la actividad dirigida nº 6

Grupo nº	Justificación dada
4	Por el teorema de Tales, sean $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{An}$ dos rectas que se intersecan en el punto A, asimismo dichas rectas cortan a un conjunto n de rectas paralelas, formando así Δ A1’1, Δ A2’2, Δ A3’3, Δ A4’4, Δ A5’5, Δ A6’6, Δ A7’7, Δ A8’8, Δ ABn, estos triángulos tiene un ángulo común A, además los ángulos con vértice en los puntos 1’, 2’, 3’, 4’, 5’, 6’, 7’, 8’, B son <u>iguales</u> por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas cortadas por una secante. Por el segundo criterio de semejanza (A.A), se tiene A1’1 ~ Δ A2’2 ~ Δ A3’3~ Δ A4’4 ~ Δ A5’5 ~Δ A6’6 ~Δ A7’7 ~ Δ A8’8 ~ Δ ABn, en consecuencia: $\frac{A1}{A1'}=\frac{12}{1'2'}=\frac{23}{2'3'}=\frac{34}{3'4'}=\frac{45}{4'5'}=\frac{56}{5'6'}=\frac{67}{6'7'}=\frac{78}{7'8'}=\frac{8n}{8'B}$ Por ende, queda determinando así la división del $\overline{AB}$ en n partes <u>proporcionales</u>.
	

Sin embargo, no demuestran que A1’ = 1’2’ = 2’3’ = 3’4’ = 4’5’ = 5’6’ = 6’7’ = 7’8’ = 8’B (ver Cuadro 50). Se considera que sería sencillo hacerlo conociendo que, por ser radios de circunferencias congruentes, los segmentos A1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 y 8n son congruentes y operando aritméticamente se llega a lo que se quiere demostrar. También, se observan ciertas imprecisiones en el uso del lenguaje porque hablan de ángulos iguales en vez de ángulos congruentes, así como la división del segmento AB en n partes proporcionales en vez de su división en n partes iguales. Se observa el uso de un esquema de argumentación analítico, asumiendo como hipótesis las condiciones que se deducen de la construcción realizada. Cabe señalar que el *teorema PAC* establece que: Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, cada dos ángulos correspondientes son congruentes; el *criterio de semejanza AA* señala que: si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces ambos triángulos son semejantes y, por partes correspondientes de triángulos semejantes, los tres pares de lados correspondientes son proporcionales.

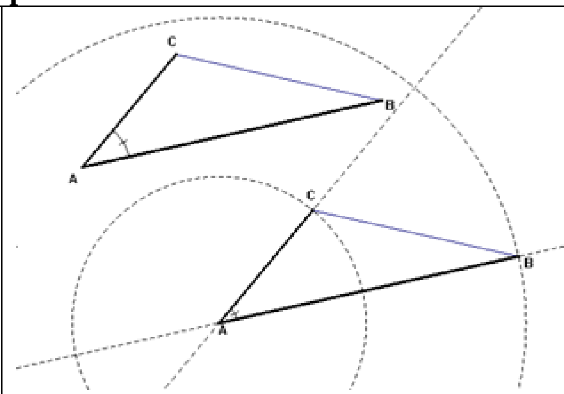
El grupo nº 5 dividió el segmento AB en cuatro partes iguales, siguiendo el procedimiento indicado; en cuanto a la justificación dada, ésta es similar a la presentada por el grupo nº 4; por ende, se estaría en presencia de un esquema de argumentación analítico sustentado en las relaciones entre los objetos que intervienen en la construcción (radios de circunferencias congruentes y rectas paralelas cortadas por una secante).

Cuatro de los cinco grupos reconocieron que la división de un segmento en n partes iguales se sustenta en la generalización del teorema de Thales. Este tema junto con la semejanza de triángulos fue estudiado por los participantes en el curso de Geometría II.

En las actividades libres correspondientes al taller nº 1, como se muestra en el Cuadro 22 (ver Capítulo IV), los participantes en el curso de RPG_AC tenían que establecer (aplicar y describir) un procedimiento que les permitiera construir con regla y compás cierto objeto, a partir de las condiciones dadas.

Cuadro 51

Actividad libre nº 2: Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos

Observa la siguiente figura (*) y describe el procedimiento para construir un triángulo conocidas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos. ¿Cómo construir el triángulo ABC conocidas las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC? (*) Δ ABC	

En el Cuadro 51, se presenta la actividad libre nº 2, la cual se realiza por el método de la figura auxiliar, ya que, la idea principal es construir un triángulo A'B'C' congruente con el triángulo ABC (dado como figura auxiliar), destacando la información conocida: las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC. Al revisar los insumos disponibles (informes y archivos .fig), se observó que:

1. En la descripción del procedimiento empleado para construir el triángulo A'B'C' (independientemente de la consistencia de la construcción realizada), se considera que los cinco grupos usaron un vocabulario apropiado y acorde con los contenidos geométricos como se ilustra en el Cuadro 52.

Cuadro 52

Descripción del procedimiento empleado en la actividad libre nº 2

Grupo nº 1	Grupo nº 2
Deseamos copiar un triángulo conociendo la longitud de dos lados y el ángulo que forman dichos lados. Para ello debemos tomar un punto A' por el cual trazamos una paralela al segmento AB del triángulo original. Luego, con el compás tomamos la longitud del segmento AB y haciendo centro en A' trazamos el arco de circunferencia que corta a la recta determinado en B'. Seguidamente, trazamos una recta paralela al segmento AC que pase por el punto A', con el compás, tomando la longitud AC y haciendo centro	1. Se forma el ángulo con vértice en A, Llamaremos L1 y L2 a las semirrectas para diferenciarlas. 2. Utilizando el compás, con abertura AB y haciendo centro en A se traza la circunferencia que corta a la semirrecta L1 en el punto B. 3. Utilizando nuevamente el compás ahora con abertura AC y haciendo centro en A se traza la circunferencia que corta a la semirrecta L2 en el punto C. 4. Por último se trazan los segmentos AC, AB y CB para obtener el triángulo.

Cuadro 52 (cont.)

Grupo nº 1	**Grupo nº 2**
en A' trazamos el arco de circunferencia donde se intersecte con la recta A'C'. Por último, trazamos el segmento B'C', y así hemos logrado construir el triángulo A'B'C' que es congruente con el triángulo ABC	
Grupo nº 3	**Grupo nº 4**
1. Marcar un punto A cualquiera y trazar una recta paralela de cada uno de los segmentos dado interceptándose en dicho punto A obteniéndose así la misma abertura del ángulo dado 2. A continuación con el compás marca en cada uno de los lados del ángulo dado las medidas de los dos lados conocidos (uno en cada lado) y traza las circunferencias respectivamente haciendo centro en A, hallándose los puntos C y B. 3. Luego une los puntos de intersección de la circunferencia con la recta y se obtiene el ΔABC	Para esta construcción, tomemos primeramente la longitud de cualquier segmento, en este caso tomaremos la longitud del AB y trazaremos la circunferencia determinada por este segmento, ahora determinemos la recta paralela al AB que pase por el centro de la circunferencia, luego denote el radio AB coincidente con la recta paralela; traslade la longitud del AC para realizar una circunferencia con centro en el punto A, ahora determine la recta paralela al AC y denote el radio AC coincidente con la recta paralela al AC. Por último al unir los puntos B y C, se tiene el triángulo ABC construido dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.

2. Los grupos nº 1, 3, 4 y 5, inician la construcción construyendo la figura auxiliar (Δ ABC) y resaltan las condiciones lado – ángulo – lado (ver Cuadro 53); sin embargo, el grupo nº 2 no toman en cuenta la figura auxiliar, ya que, trazan los segmentos AB y AC, pero no toman en cuenta la medida del < BAC. Al seguir el procedimiento abajo indicado fue posible construir un triángulo A'B'C' que satisfacía sólo dos de las tres condiciones requeridas: AB = A'B' y AC = A'C'. Cabe preguntarse ¿cómo se garantiza que < B'A'C' es congruente con < BAC? Por ende, esta construcción con regla y compás es inconsistente, porque no permite "copiar" al ángulo comprendido entre los lados AB y AC.

A *Punto*
B *Punto*
Segmento: A, B

A	*Punto*
C	*Punto*
	Segmento: A, C
A'	Punto
L1	Semirrecta: A'
L2	Semirrecta: A'
	Círculo (Compás): A', _
B'	Punto (Punto(s) de intersección): L1, _
	Círculo (Compás): A', _
C'	Punto (Punto(s) de intersección): L2, _
	Segmento: A', C'
	Segmento: A', B'
	Segmento: B', C'

3. Los grupos nº 1, 3 y 4 realizaron construcciones consistentes con regla y compás, debido a que copiaron el ángulo dado (< BAC), trazando, por el punto A’, rectas paralelas a los segmentos AB y AC. Cabe señalar que, durante el desarrollo de este taller, se había discutido cómo copiar un ángulo haciendo uso de las propiedades de las rectas paralelas cortadas por una secante.

Cuadro 53
Descripción de la construcción realizada con el Cabri II

Grupo nº 1		**Grupo nº 3**	
A	*Punto*	*C*	*Punto*
B	*Punto*	*A*	*Punto*
C	*Punto*		*Segmento: C, A*
	Triángulo: A, B, C	*B*	*Punto*
	Segmento: A, B		*Segmento: A, B*
	Segmento: A, C		*ángulo: B, A, C*
	ángulo: B, A, C	A	Punto
A'	Punto		Recta (Recta paralela): A, _
	Recta (Recta paralela): A', _		Recta (Recta paralela): A, _
	Recta (Recta paralela): A', _		Círculo (Compás): A, _
C'	Punto (compas II): _, _		Círculo (Compás): A, _
	Círculo (compas II): A', C'	C	Punto (Punto(s) de intersección): _,
B'	Punto (compas II): _, _	_	
	Círculo (compas II): A', B'	B	Punto (Punto(s) de intersección): _,
	Segmento: B', C'	_	
	ángulo: B', A', C'		Segmento: A, C
			Segmento: A, B
			ángulo: B, A, C
			Segmento: B, C

Cuadro 53 (cont.)

Grupo nº 4		**Grupo nº 5**	
A	*Punto*	*C*	*Punto*
B	*Punto*	*A*	*Punto*
	Segmento: A, B		*Segmento: C, A*
C	*Punto*	*B*	*Punto*
	Segmento: A, C		*Segmento: A, B*
	ángulo: B, A, C		*ángulo: C, A, B*
A	Punto		Círculo: A, B
	Círculo (Compás): A, _	A´	Punto
	Círculo (Compás): A, _	P	Punto
C	Recta (Recta paralela): A, _	L2	Segmento: A´, P
	Recta (Recta paralela): A, _	C1	Círculo (Compás): A´, AB
B	Punto (Punto(s) de intersección): _, _	O	Punto (Punto(s) de intersección): L2, C1
	Segmento: A, B	C2	Círculo (Compás): O, AC
	Punto (Punto(s) de intersección): C, _	D	Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2
	Segmento: A, _		Segmento: A´, D
	Segmento: _, B		ángulo: D, A´, O
	ángulo: _, A, B	A´	Punto
		C´	Punto
			Segmento: A´, C´
		A´	Punto
		B´	Punto
			Segmento: A´, B´
		C3	Círculo (Compás): A´, _
		C´	Punto (Punto(s) de intersección): C3, C2
		C4	Círculo (Compás): A´, _
		B´	Punto (Punto(s) de intersección): L2, C4
			Segmento: C´, A´
			Segmento: A´, B´
			Segmento: C´, B´
			Triángulo: C´, A´, B´

El grupo nº 5 realizó una construcción inconsistente, a pesar que la inició tomando en cuenta la figura auxiliar (ver Cuadro 53 y Gráfico 22): ubican un punto A’ y un punto P y trazan el segmento AP y trazan una circunferencia con centro en A’ y radio AB que corta al segmento A’P en un punto O. Así, A’O = AB. Luego trazan una circunferencia con centro en O y radio arbitrario r y determinan el punto D de intersección de ambas circunferencias. De esta manera, se cumple que: A’D = A’O =

AB y OD = r. Proceden a marcar al ángulo DA’O. ¿Cómo con está construcción garantizan que el ángulo DA’O es congruente con el ángulo CAB? Trazan otros segmentos A’C’ y A’B’ no necesariamente congruentes con AC y AB respectivamente y proceden a copiarlos sobre los lados del ángulo DA’O.

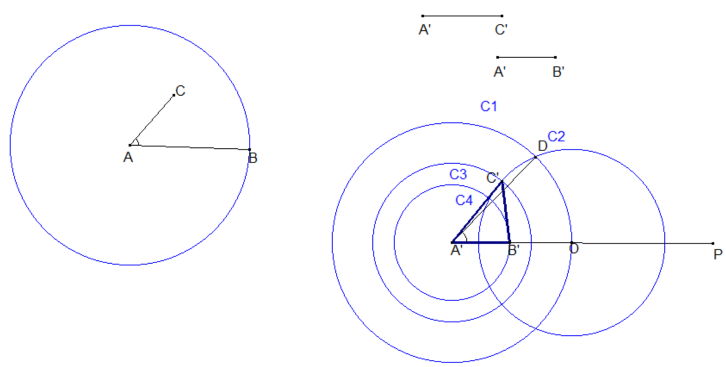


Gráfico 22. **Construcción inconsistente realizada por el grupo nº 5**

4. Los cinco grupos describen el procedimiento de construcción empleado y utilizan el Cabri II Plus, pero no dan justificación alguna del por qué el triángulo A’B’C’ es congruente con el triángulo ABC; para la autora – en su rol de diseñadora y facilitadora del curso de RPG_AC – posiblemente los estudiantes se limitaron a efectuar lo establecido en el enunciado de la actividad:

> Observa la siguiente figura y *describe el procedimiento para construir un triángulo conocidas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos*. ¿Cómo construir el triángulo ABC conocidas las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC?

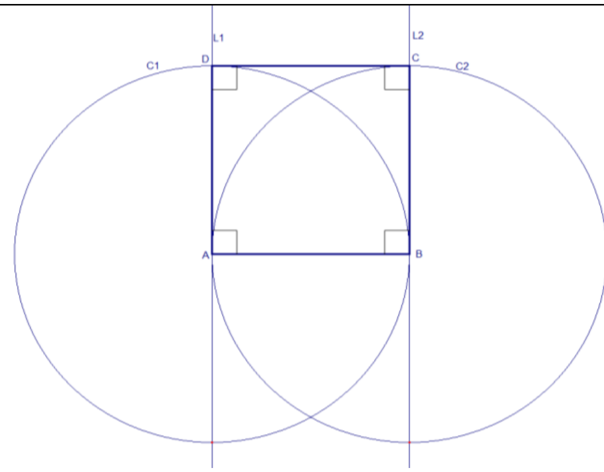
Es preciso tener en consideración que en las actividades dirigidas, se formulaban ciertas preguntas que exigían a los profesores en formación establecer relaciones entre los objetos geométricos que intervenían en cada uno de las construcciones y dar algún tipo de justificación: ¿Cómo garantizar que el objeto construido, a partir de las condiciones iniciales y el procedimiento de construcción empleado, es el esperado? Pareciera que esta manera de entender las construcciones con regla y compás – como medio para sustentar la demostración de propiedades geométricas – no fue asumida en cualquier caso por los participantes en el curso de RPG_AC o, por lo menos, cuando no fue requerido en forma explícita por la facilitadora. También es posible que siguieran un esquema de argumentación fáctico, limitándose a describir lo realizado por ellos.

La actividad libre nº 4 consistía en construir un cuadrado ABCD, dado uno de sus lados y la misma admite diversas maneras de hacerlo, dependiendo en torno a cuáles atributos relevantes del cuadrado se organice la construcción (ver Cuadro 23 en el Capítulo IV y Anexos F-1, F-2 y F-3). Al revisar los informes escritos y los correspondientes archivos .fig (con la opción "mostrar la descripción"), se notó lo siguiente: (a) Cada uno de los grupos de trabajo inicia la construcción, teniendo en cuenta el objeto inicial: un lado del cuadrado; (b) además, en la descripción del procedimiento empleado para construir el cuadrado, dado uno de sus lados, emplean un vocabulario apropiado; (c) las herramientas empleadas se corresponde con lo establecido en cada uno de los pasos que conforman el procedimiento de construcción; (d) no justifican que la construcción realizada sea consistente; en algunos casos, se limitan a verificar empíricamente que el cuadrilátero construido es un cuadrado, ya sea, midiendo la longitud de cada uno de sus lados o marcando a cada uno de sus ángulos internos. Cabe decir que, en el Cabri II, cuando se marca un ángulo que resulta ser un ángulo recto, se coloca la marca acostumbrada (ver Cuadros 54, 55, 56 y 57 con comentarios incorporados por la autora).

Cuadro 54
Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 1

Procedimiento de construcción	Herramientas empleadas	
1. Dado el segmento AB que es uno de los lados de un cuadrado que se desea construir.	*A* *B*	*Punto* *Punto* *Segmento: A, B*
2. Comenzamos por trazar dos perpendiculares al segmento AB por los puntos A y B respectivamente.	L_1 L_2	Recta (Recta perpendicular): A, AB Recta (Recta perpendicular): B, AB

Cuadro 54 (cont.)

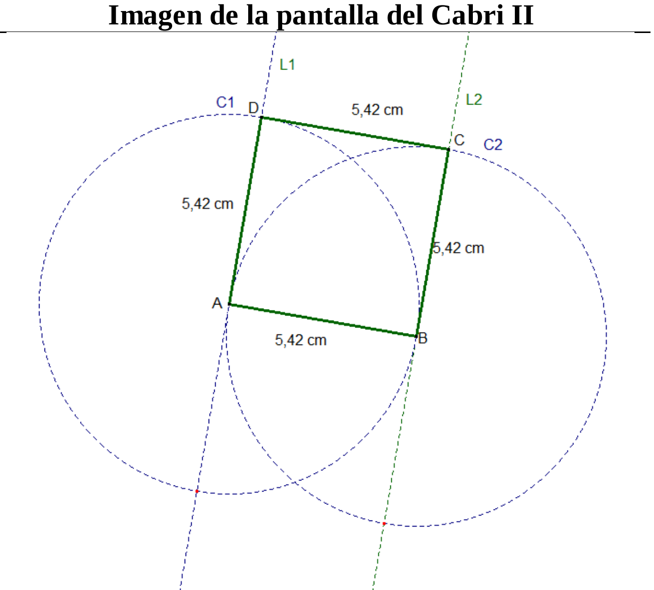
Procedimiento de construcción	Herramientas empleadas
3. Luego con el compás construimos un circulo con centro en A y radio AB el cual corta a la perpendicular AB en A. De igual forma con el compás construimos un circulo con centro en B y radio AB el cual corta a al perpendicular AB en B. Así habremos conseguido los puntos C y D que al unir los cuatro puntos obtenemos el cuadrado deseado.	C_1 Círculo: A, B C_2 Círculo: B, A D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1 Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1 C Punto (Punto(s) de intersección): L_2, C_2 Punto (Punto(s) de intersección): L_2, C_2 Polígono: D, C, B, A ángulo: D, A, B ángulo: C, B, A ángulo: C, D, A ángulo: D, C, B
Comentario	**Imagen de la pantalla del Cabri II**
Dado que L_1 es perpendicular al lado AB en A y L_2 es perpendicular al lado AB en B, se tiene que < A y > B son rectos. Además, AB = AD, por ser radios de la circunferencia C_1 y AB = BC, por ser radios de la circunferencia C_2; es decir; AB = AD = BC. A partir de estas condiciones ¿cómo garantizar que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado? ¿Cómo probar que < C y < D son rectos y AB = BC = CD = DA? Nótese que la construcción realizada por el grupo nº 1 se corresponde con la construcción nº 2 (ver Anexo F-1).	

Cuadro 55

Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 2

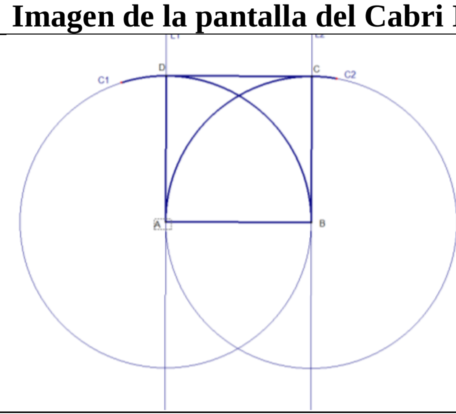
<table>
<tr><th>Procedimiento de construcción</th><th colspan="2">Herramientas empleadas</th></tr>
<tr><td>1. Trazando dos rectas perpendiculares sobre el segmento AB, una en el punto A y la otra en el punto B.</td><td>A
B

L_1
L_2</td><td>Punto
Punto
Segmento: A, B
Recta (Recta perpendicular): A, AB
Recta (Recta perpendicular): B, AB</td></tr>
<tr><td>2. Haciendo centro en A marque un arco de circunferencia con abertura AB.</td><td>C_1</td><td>Círculo: A, B</td></tr>
<tr><td>3. Haciendo centro en B marque un arco de circunferencia con abertura AB.</td><td>C_2</td><td>Círculo: B, A</td></tr>
<tr><td>4. Marque los puntos de corte C y D.</td><td>
D

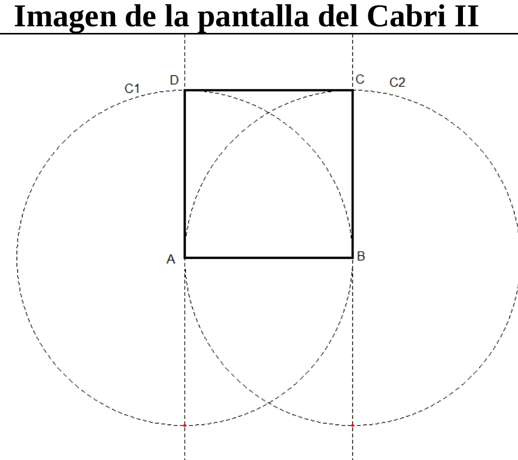
C</td><td>Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1
Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1
Punto (Punto(s) de intersección): L_2, C_2
Punto (Punto(s) de intersección): L_2, C_2</td></tr>
<tr><td>5. Marque el segmento el segmento CD.</td><td></td><td>Segmento: D, C
Segmento: A, D
Segmento: B, C</td></tr>
<tr><td>6. Mida los segmentos AB, BC, CD y DA</td><td>5,42 cm
5,42 cm
5,42 cm
5,42 cm</td><td>Texto (Distancia o longitud): _
Texto (Distancia o longitud): _
Texto (Distancia o longitud): _
Texto (Distancia o longitud): _</td></tr>
<tr><th>Comentario</th><th colspan="2">Imagen de la pantalla del Cabri II</th></tr>
<tr><td>La construcción realizada por el grupo nº 2 también se corresponde con la nº 2 (ver Anexo F-1); en el último paso descrito, miden las longitudes de cada uno de los lados del cuadrilátero ABCD.</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Nótese que el grupo nº 1 verifica (marcándolos) que los ángulos internos del cuadrilátero ABCD son rectos, mientras que el grupo nº 2 verifica que los lados de tal cuadrilátero son congruentes entre sí; ambos grupos, según el caso, no verifican que se satisfaga el otro atributo relevante para que el cuadrilátero ABCD sea un cuadrado [los lados de un cuadrado son congruentes entre sí (grupo nº 1) y sus cuatro ángulos internos son rectos (grupo nº 2)].

Cuadro 56
Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 4

Procedimiento de construcción	Herramientas empleadas
1. Para iniciar esta construcción, trazamos nuestro AB, el cual está dado como objeto inicial.	A Punto B Punto Segmento: A, B
2. Luego delimitamos rectas perpendiculares al AB por los puntos A y B respectivamente.	L_1 Recta (Recta perpendicular): A, AB L_2 Recta (Recta perpendicular): B, AB
3. Después con el compás y considerando una abertura igual a la longitud del AB, haga centro en los puntos A y B sucesivamente y trace arcos que corten a las rectas perpendiculares, denote estos puntos de intersección con las letras C y D correspondientemente.	C_1 Círculo: A, B C_2 Círculo: B, A D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1 C Punto (Punto(s) de intersección): L_2, C_2
4. Por último una los puntos C y D, y así se tiene el cuadrado ABCD. Nota: Obsérvese que una vez realizada la construcción, trazan los arcos de circunferencia sobre C_1 y C_2.	Segmento: D, C Segmento: D, A Segmento: B, C *Punto (Punto sobre un objeto): _* *Punto (Punto sobre un objeto): _* *Arco: _, _, B* *Punto (Punto sobre un objeto): _* *Punto (Punto sobre un objeto): _* *Arco: _, _, A*
Comentario	**Imagen de la pantalla del Cabri II**
La construcción realizada por el grupo nº 4 también se corresponde con la nº 2 (ver Anexo F-1); pero en este caso, no realizan verificación alguna (ni de la longitud de cada uno de los lados del cuadrilátero ABCD, ni de la medida de cada uno de sus ángulos internos.	

Cuadro 57
Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 5

Procedimiento de construcción	Herramientas empleadas
1. Se coloca el lado **AB** (lado del cuadrado que se da como dato) en la posición de la base.	A Punto B Punto Segmento: A, B
2. Por los extremos del segmento AB se trazan dos rectas perpendiculares al segmento.	L_1 Recta (Recta perpendicular): A, AB L_2 Recta (Recta perpendicular): B, AB
3. Mediante dos arcos de circunferencia con el radio de la longitud del segmento dado, se traza una por el punto A y la otra por el punto B, cortando las rectas perpendiculares.	C_1 Círculo (Compás): A, AB C_2 Círculo (Compás): B, AB Punto (Punto(s) de intersección): _, _ D Punto (Punto(s) de intersección): C_1, L_1 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C Punto (Punto(s) de intersección): C_2, L_2 Segmento: D, C
4. Se unen los cuatro puntos y se obtiene el cuadrado pedido.	Polígono: D, A, B, C
Comentario	**Imagen de la pantalla del Cabri II**
¿Qué significa que "se coloca el segmento AB en la posición de la base"? ¿Esto significa que lo colocan en posición horizontal? Pareciera que la presentación de las figuras geométricas en posiciones clásicas es una idea arraigada en la mente de los profesores en formación, a pesar de lo discutido en clases. La construcción realizada por el grupo nº 5 también se corresponde con la nº 2 (ver Anexo F-1); no realizan verificación alguna.	

Sin embargo, en el informe escrito, el grupo nº 5 agregan a la descripción el siguiente comentario (así lo denominan): "Nótese que la figura construida es un cuadrado, ya que, al partir de un lado para construir los otros tres, trazamos rectas perpendiculares a dicho segmento dado y luego sobre ellas copiamos la medida del segmento inicial AB con el compás, los segmentos AD y BC son congruentes entre sí por ser *(***radios de***)* circunferencias de un mismo radio, y que su vez son congruentes con el segmento AB. Luego unimos los puntos D y C que (**y el segmento DC**) es congruente con el segmento AB, en conclusión al ser todos sus lados iguales y poseer cuatro ángulos rectos por ser los segmentos DA perpendicular con el segmento AB, CB perpendicular con AB y los segmentos DA perpendicular con el segmento DC, CB perpendicular con DC, con lo que por definición el paralelogramo es un cuadrado". Lo colocado entre paréntesis y en negritas ha sido agregado para mejor seguimiento de las ideas aquí planteadas. En el comentario, dan por cierto que los ángulos con vértice en los puntos C y D son rectos y CD = AB (lo que falta por demostrar); pero no lo demuestran como una consecuencia lógica de las relaciones establecidas entre los objetos que conforman esta construcción. Pudiera decirse que los integrantes del grupo nº 5 manifiestan un esquema de argumentación fáctico, al centrar su comentario en un recuento del procedimiento de construcción del cuadrado ABCD.

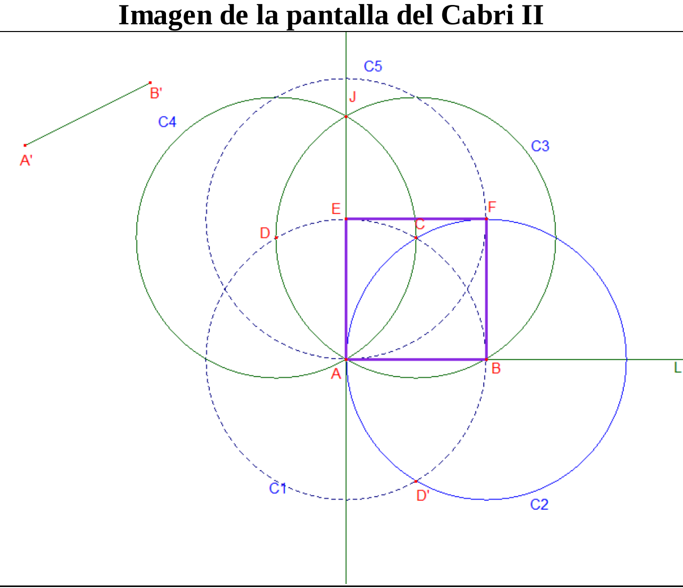
El grupo nº 3, como se ilustra en el Cuadro 58, siguió una construcción distintas a las mostradas en el Cuadro 22 y los Anexos F-1, F-2 y F-3, ya que se limitó a trabajar con las herramientas que les permitieran trazar líneas rectas y circunferencias (tal como si estuvieran trabajando con regla y compás en un entorno de lápiz y papel); no se puede olvidar que en el Cabri II se dispone de botones de herramientas que permiten trazar de manera inmediata, por ejemplo, rectas perpendiculares o rectas paralelas, lo cual no es posible si se está trabajando sólo con una regla y un compás (sin emplear las escuadras disponibles en un juego geométrico). Este grupo no realizó verificación empírica alguna, ni justificó la validez de esta construcción. En el Anexo G, se presentan esta construcción con comentarios, en función de cada uno de los pasos realizados.

Cuadro 58

Construcción de un cuadrado, dado uno de sus lados, realizada por el grupo nº 3

Procedimiento de construcción	Herramientas empleadas	
1. Se traza el segmento A'B' conocido.	A	Punto
		Semirrecta: A
	A'	Punto
	B'	Punto
		Segmento: A, B
2. Con el compás se traza una circunferencia de radio A'B' desde el punto A y luego desde el punto B de manera de hallar los puntos C y D'.	C_1	Círculo (Compás): A, A'B'
	B	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	C_2	Círculo: B, A
	C	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	D'	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
3. Desde el punto C trazar una circunferencia de radio AC obteniéndose el punto D, inmediatamente se sitúa en dicho punto (D) y trazar otra circunferencia de radio DC formándose el punto J.	C_3	Círculo: C, A
	D	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	C_4	Círculo: D, C
	J	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Recta: J, A
4. Trazar el segmento que forman los puntos J y A y hallar el punto E en la intersección del círculo y el segmento JA.	E	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	C_5	Círculo: E, A
5. Trazar una circunferencia de centro en E con radio EA y conseguir el punto F de intersección entre las dos circunferencias. Unir los puntos y formar los segmentos BF y EF respectivamente, obteniéndose así un cuadrado ABFE.	F	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Segmento: E, F
		Segmento: F, B
		Segmento: E, A
		Segmento: A, B

Imagen de la pantalla del Cabri II



Una vez realizadas las actividades dirigidas y libres que conformaban el taller nº 1, cada uno de los grupos – a solicitud de la facilitadora – seleccionó dos construcciones, las cuales deberían elaborar, describir y presentar en una próxima sesión de clases (actividad extra). En el Cuadro 59, se dan a conocer las construcciones con regla y compás seleccionadas por cada uno de los grupos de trabajo. Con esta actividad, se pretendía que los profesores en formación gestionaran una actividad dirigida a la construcción consistente con regla y compás de una figura geométrica, lo cual significaba describir el procedimiento empleado, utilizar las herramientas disponibles en el Cabri II y dar una justificación que convenciera a la audiencia sobre la consistencia de la construcción seleccionada; para los fines investigativos, se decidió analizar una sola construcción por equipo de trabajo. Además, cabía la posibilidad que, en el proceso de búsqueda de información sobre las construcciones con regla y compás, indagaran sobre el procedimiento a seguir para construir la figura seleccionada; por ello, en esta actividad se valoró la justificación dada en forma escrita u oral.

Cuadro 59
Actividades extras realizadas por los grupos de trabajo en el taller nº 1

Grupo nº 1	Construcción de un óvalo
	Construcción de un trapecio isósceles
Grupo nº 2	Construcción de un trapecio isósceles
	Construcción de un octógono
Grupo nº 3	Construcción de un rectángulo áureo, partiendo de un lado de un cuadrado
	Construcción de un polígono estrellado de cinco puntas partiendo de una circunferencia de radio AB
Grupo nº 4	Construcción de la circunferencia circunscrita a un triángulo dado
	Construcción de un polígono regular inscrito en una circunferencia
Grupo nº 5	Construcción de un cuadrado conociendo una de sus diagonales
	Construcción de la circunferencia inscrita a un triángulo dado

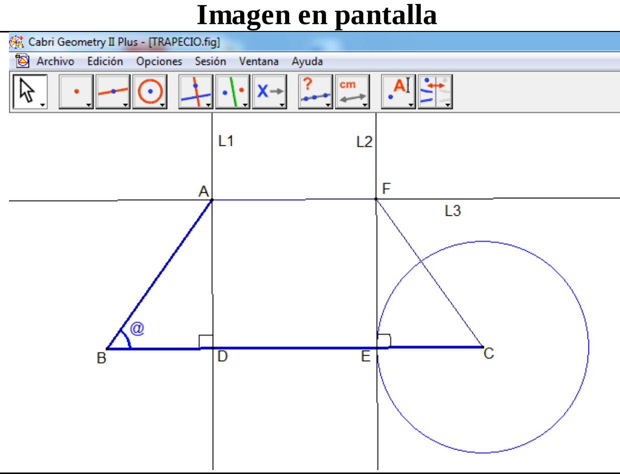
Los equipos nº 1 y 2 seleccionaron la construcción de un trapecio isósceles, lo cual permite contrastar el procedimiento empleado, las herramientas empleadas y las justificaciones dadas (Ver Cuadros 60 y 61).

Cuadro nº 60

Actividad extra realizada por el grupo nº 1: Construcción de un trapecio isósceles

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
1. A, B y C son tres puntos distintos no alineados. Se trazan los segmentos AB y BC y luego se marca el ángulo ABC.	A Punto B Punto Segmento: A, B C Punto Segmento: B, C @ ángulo: A, B, C
2. Desde el punto A se traza una recta perpendicular al segmento BC que lo corta en el punto D. Se traza el segmento BD.	L_1 Recta (Recta perpendicular): A, BC D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, BC Segmento: B, D
3. Con el compás, se traza una circunferencia con centro en C y radio BD que corta al segmento BC en el punto E.	C_1 Círculo (Compás): C, BD E Punto (Punto(s) de intersección): C_1, BC
4. Por E se traza una perpendicular al segmento BC	L_2 Recta (Recta perpendicular): E, BC
5. Por el punto A se traza una paralela al segmento BC que corta a L_2 en F	L_3 Recta (Recta paralela): A, BC F Punto (Punto(s) de intersección): L_2, L_3
6. Se traza el segmento FC y se marcan los ángulos ADB y FEC. El cuadrilátero AFCB es un trapecio.	Segmento: F, C ángulo: A, D, B ángulo: F, E, C Polígono: A, F, C, B

Imagen en pantalla



El grupo nº 1 no presentó por escrito la justificación; durante la exposición, teniendo ya construida la figura, utilizando la opción “revisar la construcción”, mostró, paso por paso, el procedimiento empleado; sin embargo, en forma oral y ante la pregunta ¿cómo garantizas que el cuadrilátero AFCB es un trapecio isósceles? Reconocieron que, por construcción, el segmento AF está contenido en la recta L_3 y está es paralela al segmento BC y, por ello, los lados opuestos AF y BC del cuadrilátero AFCB son paralelos y, por definición, es un trapecio. Faltaba probar que los lados no paralelos AB y FC eran congruentes. Para probarlo establecieron por el criterio de congruencia de triángulos LAL que los triángulos ABD y FCE son congruentes, ya que, por construcción, se tiene que BD = CE y < ADB y < FEC son rectos; además, AD = FE (distancia entre rectas paralelas). Y, por PCTC, establecieron que AB = FC.

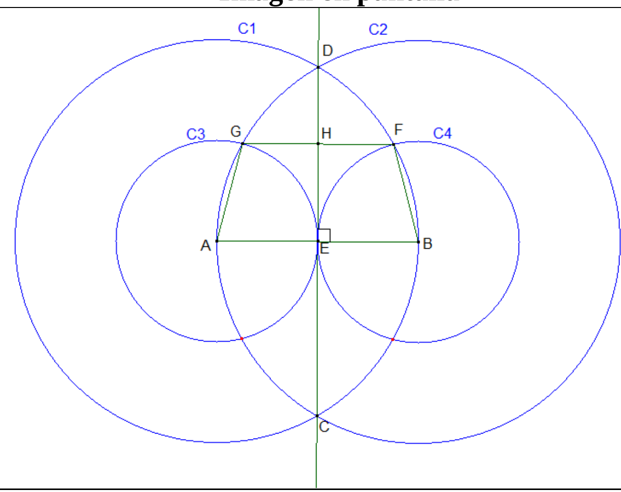
Cuadro nº 61
Actividad extra realizada por el grupo nº 2: Construcción de un trapecio isósceles

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas	
1. Se traza el segmento AB	A B	Punto Punto Segmento: A, B
2. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura AB (C1)	C1	Círculo: A, B
3. Trazar una circunferencia con centro en B y abertura AB (C2)	C2	Círculo: B, A
4. Marcar los puntos de intersección entre C1 y C2 (puntos C y D)	D C	Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2
5. Se traza la recta que pasa por los puntos C y D (mediatriz del segmento AB)		Recta: D, C
6. Marcar el punto de corte entre la recta y el segmento AB (PUNTO MEDIO “E”)	E	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
7. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura AE (C3)	C3	Círculo: A, E
8. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura BE (C4)	C4	Círculo: B, E
9. Marcar los puntos de corte de C3 con C2 y de C4 con C1 respectivamente (superiores en este caso) punto G y F	G F	Punto (Punto(s) de intersección): C2, C3 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C4

Cuadro 61 (cont.)

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
10. Trazar los segmentos GF, FB, AG y de esta manera se obtiene el trapecio isósceles ABFG.	Segmento: G, F Segmento: F, B Segmento: A, G H Punto (Punto(s) de intersección): CD, GF ángulo: H, E, B Punto (Punto(s) de intersección): C2, C3 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C4

Imagen en pantalla



El grupo nº 2 utilizó la opción "revisar la construcción" para dar a conocer, paso por paso, el procedimiento empleado; seguidamente, usando el esquema de afirmaciones y razones, presentó la siguiente justificación (tomada del informe escrito):

1. Los segmentos AE y EB son congruentes; por ser E punto medio.
2. C3 y C4 son congruentes; por ser circunferencias de radios congruentes, afirmación 1.
3. AG y AE son congruentes; por ser radios de C3.
4. BF y EB son congruentes; por ser radios de C4.
5. AG y BF son congruentes; afirmaciones 2, 3 y 4.
6. El ángulo HEB es recto (mide 90º); por ser la recta la mediatriz del segmento AB

7. **El ángulo DHF es recto (mide 90º); por ser la recta la mediatriz del segmento GF.**
8. Los segmentos GF Y AB son paralelos; si en dos rectas cortadas por una secante los ángulos alternos externos son congruentes, entonces las rectas son paralelas, afirmación 6 y 7.
9. El cuadrilátero ABFG es un trapecio isósceles; afirmaciones 5 y 8.

Nótese que, dada una de las bases del trapecio (el segmento AB), aplican lo visto en la construcción dirigida nº 2 y trazan su correspondiente mediatriz (la recta CD) y ubican su punto medio (el punto E) y, partiendo de este hecho, inician la demostración (ver afirmación nº 1). Además, utilizan relaciones existentes entre los objetos que conforman esta construcción: dos segmentos son congruentes por ser radios de una misma circunferencia o dos segmentos son congruentes por ser radios de circunferencias congruentes (afirmaciones 2, 3 y 4); esto les permite asegurar que AG = BF en (5). Seguidamente, afirman en (7) que la recta CD también es la mediatriz del segmento GF y, por ello, < DHF es recto. Sin embargo, cabe preguntarse lo siguiente: dado que H es el punto de intersección de la recta CD con el segmento GF, H pertenece a la recta CD y, por tanto, aplicando el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento, H equidista de los puntos A y B ¿cómo garantizan que el punto H también equidista de G y F? Esto no ha sido demostrado, pero sirve de sustento para aplicar el teorema ACP y demostrar que los lados AB y GF son paralelos: "Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces dos ángulos alternos externos son congruentes y las rectas son paralelas". Posiblemente la convicción que la recta CD es también mediatriz del segmento GF los lleva a asumir esta proposición y seguir la demostración.

Se considera que los grupos nº 1 y 2 describen el procedimiento con un vocabulario apropiado y emplean las herramientas que se corresponden con cada uno de los pasos indicados; dado que elaboran una cadena lógico-deductiva, a partir de las relaciones existentes entre los objetos geométricos que intervienen en la construcción, pudiera decirse que los integrantes de ambos grupos siguen un esquema de argumentación analítico, apoyado en un esquema de argumentación fáctico.

El grupo nº 3 construyó un rectángulo áureo, partiendo de un lado de un cuadrado (segmento AB); se observa que para construir el cuadrado ABFE siguieron el procedimiento descrito en el Cuadro 58 (comparar con las instrucciones dadas en el Cuadro 62). En la descripción del procedimiento, usan apropiadamente el vocabulario geométrico y demuestran dominio técnico del Cabri II. Una vez finalizada la construcción, miden dos lados consecutivos del rectángulo EAHI y con la calculadora calculan su cociente, obteniendo una aproximación racional al número de oro. Además, si arrastran el punto B (punto sobre la semirrecta L que tiene origen en A), se modifica la longitud del segmento AB y, por ende, las longitudes de los segmentos que dependen de éste (entre ellos los lados del rectángulo EAHI), pero el cociente no varía. Esto pareciera ser asumido como evidencia suficiente para garantizar que es un rectángulo áureo.

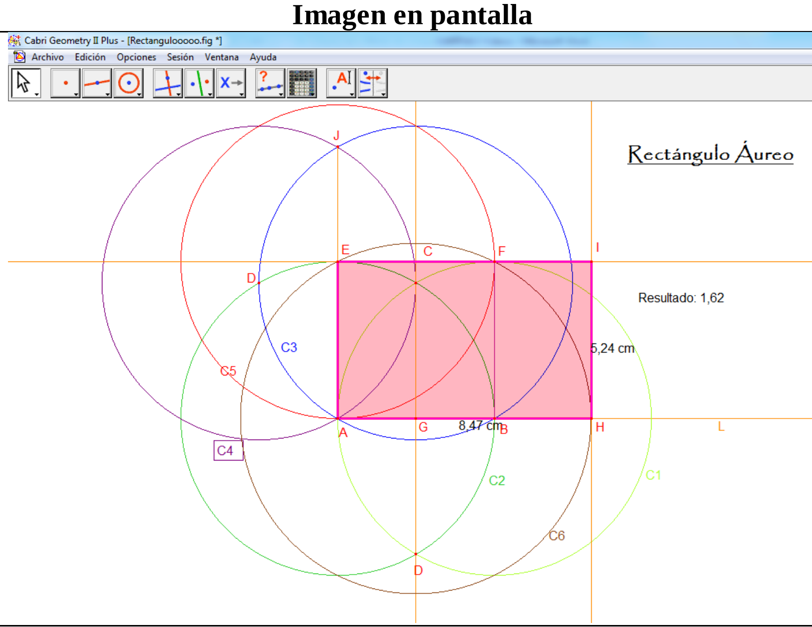
Cuadro nº 62
Actividad extra realizada por el grupo nº 3: Construcción de un rectángulo áureo partiendo de un lado de un cuadrado.

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas	
1. Se traza una semirrecta AB.	A L B	Punto Semirrecta: A Punto (Punto sobre un objeto): L
2. Con el compás se traza una circunferencia de radio AB desde el punto A y luego desde el punto B de manera de hallar los puntos C y D.	C1 C2 C D	Círculo: B, A Círculo: A, B Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2
3. Desde el punto C trazar una circunferencia de radio AC obteniéndose el punto D, inmediatamente se sitúa en dicho punto (D) y trazar otra circunferencia de radio DC formándose el punto J.	C3 D C4 J	Círculo: C, A Punto (Punto(s) de intersección): C2, C3 Círculo: D, C Punto (Punto(s) de intersección): C3, C4
4. Trazar el segmento que forman los puntos J y A y hallar el punto E en la intersección del círculo y el segmento JA.	 E	Segmento: J, A Punto (Punto(s) de intersección): JA, C2

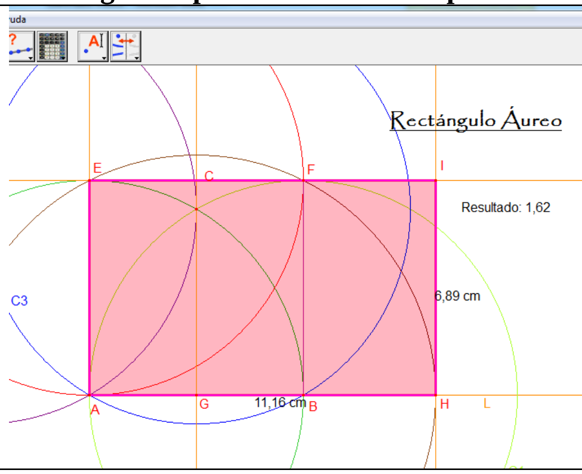
Cuadro nº 62 (cont.)

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
5. Trazar una circunferencia de centro en E con radio EA y conseguir el punto F de intersección entre las dos circunferencias. Unir los puntos y formar los segmentos BF y EF respectivamente, **obteniéndose así un cuadrado ABFE.**	C5 Círculo: E, A F Punto (Punto(s) de intersección): C1, C5 Segmento: F, B Segmento: E, F Segmento: E, A Segmento: A, B
6. Trazar el segmento que une los puntos C y D hallándose el punto medio G y con centro en éste trazar una circunferencia de radio GE formando el punto de intersección H. Unir los puntos A y H para obtener el segmento AH.	Recta: C, D G Punto (Punto(s) de intersección): CD, AB C6 Círculo: G, E H Punto (Punto(s) de intersección): L, C6 Segmento: A, H
7. Trazar las perpendiculares a los segmentos AJ y AH respectivamente, obteniéndose el punto I y formándose los segmentos EI y HI.	L_1 Recta (Recta perpendicular): E, AE L_2 Recta (Recta perpendicular): H, L I Punto (Punto(s) de intersección): L_1, L_2 Segmento: E, I Segmento: I, H
8. Quedando como resultado el Rectángulo siendo Áureo ya que sus lados EA y EI están en la proporción del número áureo.	Polígono: E, A, H, I Rectángulo Áureo Texto 5,24 cm Texto (Distancia o longitud): _ 8,47 cm Texto (Distancia o longitud): _

Imagen en pantalla



Cuadro 62 (cont)

Imagen después de arrastrar el punto B


Dado que las integrantes del grupo nº 3, se limitaron a la verificación empírica para justificar que el cuadrilátero EAHI es un rectángulo áureo; la facilitadora les planteó que si el segmento AB (objeto inicial) medía x, ¿cuánto medían los lados del rectángulo? Se percataron que, por ser el cuadrilátero ABFE un cuadrado, se tiene que AB = AE = BF = EF = x; además, que AH = AB + BH (B está entre A y H), pero ¿cuánto mide BH? Aquí también se dieron cuenta que AH = AG + GH, donde G es el punto medio del segmento AB y, por ende, AG = AB / 2 = x / 2 y que GH = GE por ser radios de la circunferencia con centro en G y que pasa por E (ver Gráfico 23). Para determinar la longitud del segmento GE, aplicaron el teorema de Pitágoras, conociendo que el triángulo AEG es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en A, tal que AG = x/2 y AE = x.

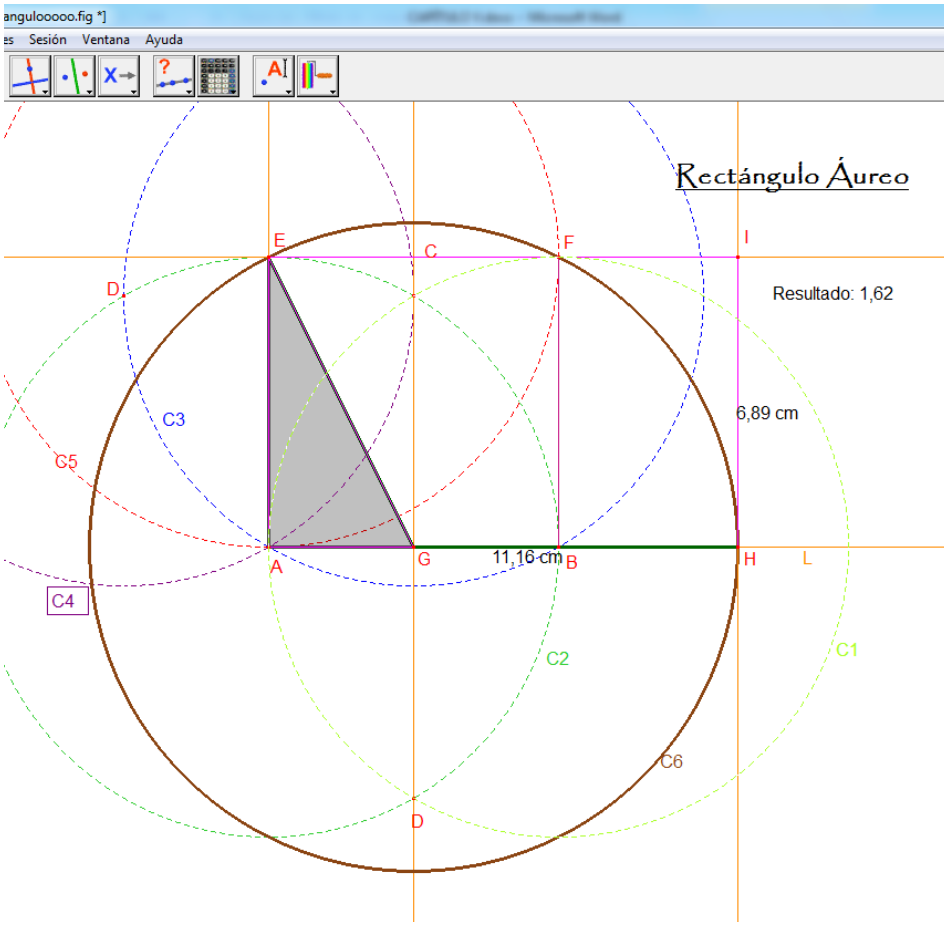


Gráfico 23. ¿Cómo determinar la longitud del segmento AH?

De esta manera, durante la exposición, el grupo nº 3 demostró que las longitudes de dos lados consecutivos del rectángulo EAHI satisfacen la razón áurea, partiendo de un lado del cuadrado ABFE con AB = x.

Cuadro 63

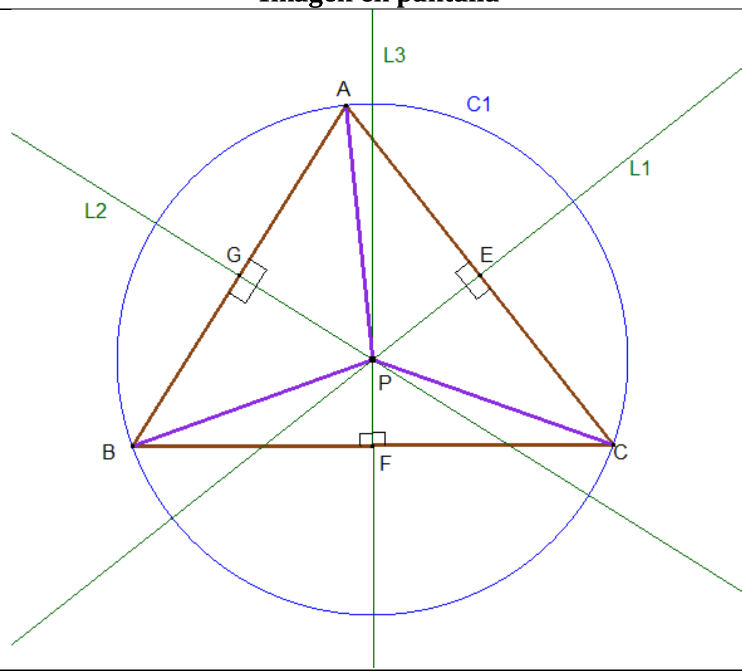
Actividad extra realizada por el grupo nº 4: Construcción de la circunferencia circunscrita a un triángulo dado

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
1. Inserte tres puntos cualesquiera A, B y C, no alineados.	A Punto B Punto C Punto
2. Una los puntos A, B y C, así se tiene AB, BC y CA, de esta manera se genera Δ ABC, por definición de triángulo.	Segmento: A, B Segmento: B, C Segmento: C, A

Cuadro 63 (cont.)

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
3. Trace la mediatrices a cada uno de los lados Δ ABC; es decir, mediatrices a AB, BC y CA.	L_1 Recta (Mediatriz): _ L_2 Recta (Mediatriz): _ L_3 Recta (Mediatriz): _
4. Determine el circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita, además es el punto donde se cortan las mediatrices de los lados de un triángulo), y denote dicho punto con la letra P.	P Punto (Punto(s) de intersección): L_1, L_2
5. Con el compás realice centro en el circuncentro, y con abertura a uno de los vértices Δ ABC trace la circunferencia C1.	C_1 Círculo: P, A
6. Trace los segmentos desde el centro de la circunferencia; es decir, desde el punto P hasta los vértices ΔABC, así se tienen PA, PB y PC. Ahora considere los puntos de intersección de AC, BC y AB con sus mediatrices correspondientes, y denótelos con las letras E, F y G correspondientemente.	Segmento: A, P Segmento: P, B Segmento: P, C Punto (Punto(s) de intersección): L_3, L_2 E Punto (Punto(s) de intersección): AC, L_1 F Punto (Punto(s) de intersección): BC, L_3 G Punto (Punto(s) de intersección): AB, L_2
7. En consecuencia se generan Δ APE, Δ EPC, Δ CPF, Δ FPB, Δ BPG y Δ GPA, además si consideramos, AC y la mediatriz PE, se tiene por propiedad de las mediatrices que AE ≅ EC y PE es perpendicular a AC, también se tiene que Δ APE y Δ EPC, poseen PE común en ambos triángulos, AE ≅ EC y además PE es perpendicular a AC. Por criterio de congruencia de triángulos (L.A.L), Δ **APE** ≅ Δ **EPC**, Ahora por (P.C.T.C), se tiene que AP ≅ PC.	ángulo: P, E, A ángulo: P, E, C ángulo: C, F, P ángulo: B, F, P ángulo: B, G, P ángulo: P, G, A

Cuadro 63 (cont.)

<table>
<tr><th>Instrucciones dadas</th><th>Herramientas empleadas</th></tr>
<tr><td colspan="2">De manera Análoga sucede el mismo procedimiento con Δ CPF y Δ FPB (ΔBPF), quedando como consecuencia por (P.C.T.C), que CP $\cong$ PB. Con respecto Δ BPG y Δ GPA (Δ APG) también de manera análoga ocurre el mismo procedimiento teniendo como resultado por (P.C.T.C), que BP $\cong$ PA.
Así, queda determinado que PA $\cong$ PB $\cong$ PC, además estos segmentos poseen el punto común P, que actúa como el centro de la circunferencia y los puntos A, B y C pertenecientes a la circunferencia, no obstante por definición de radio PA, PB y PC son radios de la circunferencia C1, por tanto los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia C1 y al mismo tiempo estos tres puntos cualesquiera no están alineados.
Asimismo se establece que tres puntos cualesquiera no alineados determinan una circunferencia.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Imagen en pantalla</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Como se mostró en el Cuadro 63, el grupo nº 4 considera tres puntos distintos cualesquiera no alineados como objetos iniciales, ya que, la construcción de la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por tales puntos les permitió demostrar que “tres puntos distintos no alineados determinan una única circunferencia”. En los primeros cinco pasos, realizan la construcción de tal circunferencia C_1 con centro en P – punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo – y que pasa por el punto A. Para llevar a cabo la demostración, en el paso 6, trazan algunos objetos auxiliares como los segmentos AP, BP y CP, los cuales son radios de la circunferencia C_1. Seguidamente, determinan los puntos de intersección de los lados del triángulo con sus correspondientes mediatrices; esto les sirvió para identificar y probar pares de triángulos congruentes. Por ejemplo, en el paso 7, conociendo que, AE = CE (E es punto medio del lado AC, < AEP y CEP son rectos (L_1 es perpendicular al segmento AC en el punto E) y PE = PE (todo segmento es congruente consigo mismo), aplican el criterio de congruencia de triángulos LAL, para asegurar que **Δ APE ≅ Δ EPC;** pero la correspondencia Δ APE ↔ Δ EPC no es una congruencia. Este es un error muy común cuando se trabaja con triángulos congruentes. Lo correcto hubiera sido establecer que **Δ APE ≅ Δ CPE**; de lo cual se deduce, por PCTC, que AP = CP. Un procedimiento análogo siguen para demostrar que BP = AP y cometen el mismo error. A pesar del error cometido, la base de esta demostración son las relaciones existentes entre los objetos que conforman la construcción de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y los objetos auxiliares que trazaron y, por una cadena de razonamiento lógico-deductiva llegan a la tesis (ver Cuadro 63).

El grupo nº 5 seleccionó la construcción de un cuadrado conociendo una de sus diagonales; para ello, tomaron en cuenta que un cuadrado es un rombo y un rectángulo y, por ende, sus diagonales se bisecan (paralelogramo), son congruentes (rectángulo) y perpendiculares entre sí (rombo). Al revisar los primeros cinco pasos mencionados en el Cuadro 64, se nota que trazan la diagonal AC de un cuadrado ABCD y determinan su punto medio P; de modo que: P está entre A y C y AP = CP (1). Luego, por el punto P, trazan una recta L_1 perpendicular al segmento AC y, seguidamente, construyen una circunferencia C_1 con centro en P y que pasa por el punto A. Tal circunferencia corta a la recta L_1 en los puntos B y D; por lo cual, BP = DP = AP = CP (por ser radios de una misma circunferencia). Hasta aquí, se tiene que las diagonales AC y BD se bisecan en P, formando cuatro ángulos rectos y AC = AP + CP = BP + DP = BD. Esto garantiza que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Cuadro 64

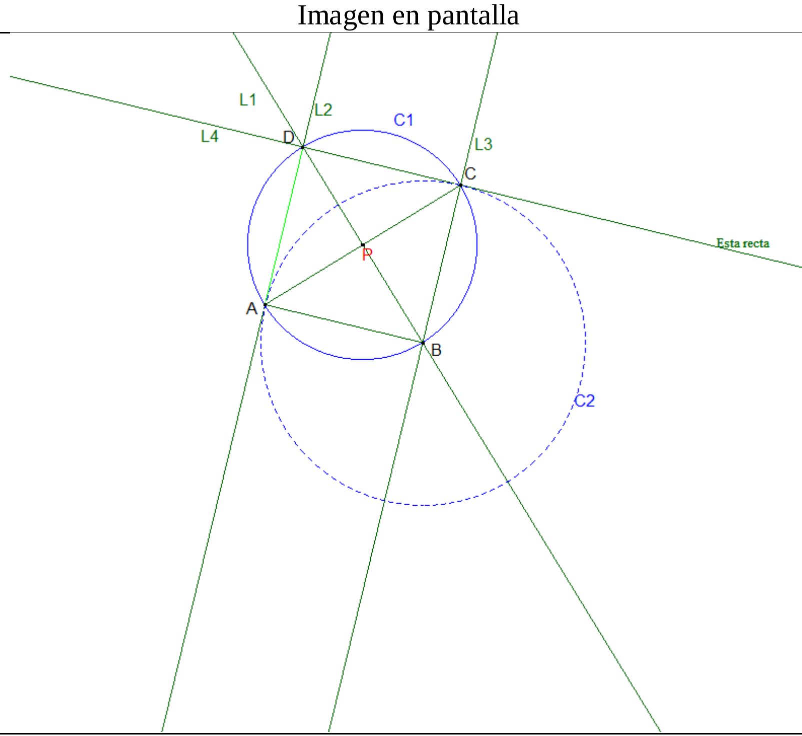
Actividad extra realizada por el grupo nº 5: Construcción de un cuadrado dada una de sus diagonales

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
1. Conocemos el segmento AC que es una diagonal. Determinamos el punto medio del segmento AC que llamaremos P, luego por definición de punto medio tenemos que el segmento AP = PC.	A Punto C Punto Segmento: A, C P Punto (Punto medio): C, A
2. Por el punto P trazamos una recta perpendicular al segmento AC que llamaremos L_1.	L_1 Recta (Recta perpendicular): P, AC
3. Con el compás y el radio del segmento AP y centro en P trazamos una circunferencia que interseca a la recta en dos puntos al cual llamaremos B y D.	P Punto (Punto(s) de intersección): AC, L_1 C_1 Círculo (Compás): P, AP B Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C1 D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C1
4. Al trazar la circunferencia con radio del segmento AP, tenemos que AP = PC = BP = PD al ser todos radios de una misma circunferencia, con lo que tenemos que AC = BD.	
5. Unimos los puntos A y B, y tenemos el segmento AB.	Segmento: A, B
6. Por el punto A trazamos una recta perpendicular al segmento AB que llamaremos L_2, luego por el punto B trazamos una recta L_3 paralela a la recta L_2. Nótese que ambas rectas se intersecan con los puntos D y C.	L_2 Recta (Recta perpendicular): A, AB L_3 Recta (Recta paralela): B, L_2 ¿Cómo garantizan que la recta L_2 pasa por el punto D? ¿Cómo garantizan que la recta L3 pasa por el punto C?
7. Por el punto D trazamos una recta paralela al segmento AB, que a su vez interseca al punto C.	L_4 Recta (Recta paralela): D, AB
8. Los segmentos $AD \perp AB$ en el punto A, y los segmentos $BC \parallel AD$, entonces por propiedades de rectas paralelas cortadas por una secante los segmentos $BC \perp AB$ en el punto B.	
9. Al ser los segmentos $AD \parallel BC$ y $AB \parallel DC$ el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.	

Cuadro 64 (cont.)

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
10. El m(<A) = 90° por ser los segmentos $AD \perp AB$, y m(<B) = 90° por ser los segmentos $AB \perp BC$.	
11. Por propiedades de los paralelogramos entonces tenemos que <A ≈ <C y <B ≈ <D al ser ángulos opuestos.	
12. Con el compás, con radio del segmento AD y centro en B trazamos una circunferencia, nótese que la circunferencia interseca al segmento AC en el punto C exactamente, por lo que los segmento AD = AC por ser radios de una misma circunferencia.	Polígono: D, A, B, C C_2 Circulo (compas) B,_ Trazan una circunferencia con centro en B y radio AD, con AD = BC, la cual pasa por el punto C. Afirman que AD = AC, lo cual es imposible por ser AC la diagonal de un cuadrado de lado AD.
13. Por propiedades de los paralelogramos los segmentos AB = DC y AD = BC al ser lados opuestos, luego AB = BC = CD = DA.	
14. El paralelogramo ABCD es un cuadrado por definición.	

Imagen en pantalla



Sin embargo, teniendo en cuenta estos atributos de las diagonales AC y BD del cuadrilátero ABCD no proceden a realizar la demostración que éste es un cuadrado. Más bien, partiendo del lado AB, a partir del paso 6, tratan de construir un cuadrado dado uno de sus lados (ésta sería otra construcción). Por ello, la demostración realizada no toma en consideración las condiciones iniciales, sino las que surgen a partir del paso 6.

Durante la exposición, se percataron que los triángulos ABP, CBP, CDP y ADP son isorrectángulos con ángulo recto en P y, que por el criterio de congruencia LAL, se establece que son congruentes entre sí y, por PCTC, llegan a que AB = CB = CD = AD. Además, como los ángulos en la base de un triángulo isorrectángulo miden 45º, aplicando el postulado de adición de ángulos establecen que los ángulos con vértice en los puntos A, B, C y D son ángulos rectos.

También, se percataron que en el paso 12, lo que quisieron hacer es trazar una circunferencia con centro en B y radio AD, con AD = BC, la cual pasa por los puntos A y C y así verificar que AB = BC = AD.

Considerando las producciones de los equipos en el Taller nº 1 sobre construcciones con regla y compás en AGD y los objetivos específicos de esta investigación, seguidamente se presentarán algunos hallazgos preliminares; así, como se presenta en el Cuadro 65, en cuanto al uso técnico del Cabri II, los profesores en formación emplearon las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás (**UT.1**), así como para mejorar la apariencia de la figura en pantalla (**UT.3**). En cuanto al empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman una construcción (**UT.2**), se limitaron a medir ángulos o la longitud de un segmento; el menú propiedades (ver Cuadro 35) no fue empleado. Posiblemente, esto se haya debido a que, en las actividades planteadas en el Taller nº 1, en el procedimiento dado por la facilitadora (actividades dirigidas) o el descrito por los participantes (actividades libres y actividad extra) quedaban establecidas estas relaciones o estaban garantizadas por las herramientas de construcción empleadas. Se ha empleado una escala cualitativa de alto (3), medio (2) y bajo (1) para valorar el uso técnico del Cabri II en función de los tres indicadores establecidos.

En relación con el uso heurístico, los cinco grupos lograron construir la figura solicitada, a partir de las condiciones iniciales (**UH.1**), así como reconocer relaciones entre los objetos que la conformaban, especialmente establecieron relaciones de congruencia entre radios de una misma circunferencia o entre radios de circunferencias congruentes (**UH.2**). No formularon de forma explícita conjetura alguna (**UH.3**), aunque se considera que sí lo hicieron en forma implícita porque asumieron ciertas propiedades que satisfacían las figuras, sin aún haber sido validadas, para avanzar en las justificaciones dadas (**UH.4**).

Cuadro 65
Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller nº 1

Usos del Cabri II	**Indicadores**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**(*)**
Uso Técnico (UT)	1. Empleo de las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás.	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	2. Empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman tal construcción.	1	2	1	1	1	AD
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AL
		2	2	1	1	1	
		2	2	3	2	1	AE
	3. Empleo de herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla.	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
Uso Heurístico (UH) (ver Cuadro 36)	1. Construcción	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	2. Exploración	3	3	3	3	3	AD
		3	1	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE

Cuadro 65 (cont.)

Usos del Cabri II	Indicadores	G1	G2	G3	G4	G5	(*)
Uso Heurístico (UH) (ver Cuadro 36)	3. Formulación de conjeturas	1	1	1	1	1	AD
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AL
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AE
	4. Validación	2	3	2	3	2	AD
		2	2	1	3	3	
		1	1	1	1	1	AL
		2	2	1	1	3	
		3	3	3	3	2	AE

Nota: (*) AD: Actividad dirigida; AL: Actividad libre; AE: Actividad extra

Como se observa en el Cuadro 66, para clasificar las justificaciones dadas por cada uno de los grupos en las actividades analizadas, se ha tenido en consideración las producciones en las actividades dirigidas y extras, ya que, como ya se mencionó en las actividades libres se limitaron a describir el procedimiento empleado, sin presentar justificación alguna.

En las actividades dirigidas, los grupos nº 1, 3 y 5 dieron *explicaciones*, partiendo del reconocimiento de las relaciones existentes entre los diferentes objetos que conformaban tales construcciones (la mediatriz de un segmento y la división de un segmento en n partes iguales), procurando hacer mención de definiciones y propiedades conocidas como las diagonales de un rombo se bisecan y son perpendiculares entre sí, el teorema de caracterización de la mediatriz, criterios de congruencia y semejanza de triángulos, el teorema de Thales, etc., pero sin llegar a establecer una cadena lógico-deductiva en forma rigurosa (ver Cuadros 43 y 45). Esto último sí lo lograron hacer los grupos nº 2 y 4 (ver Cuadros 44 y 46), por lo cual se considera que presentaron una *prueba*, siguiendo el esquema de afirmaciones y razones. Además, se ha notada el predominio de los *esquemas de argumentación analíticos*, apoyados en esquemas de *argumentación fácticos*, ya que, las relaciones geométricas que se iban estableciendo en la medida que se realizaba la construcción fueron tomadas como premisas para dar una justificación (explicación o prueba).

Cuadro 66
Clasificación de las justificaciones dadas por los profesores en formación

Criterio de clasificación	Indicadores	G1	G2	G3	G4	G5	(*)
La justificación como producto final de un proceso de validación matemática (ver Cuadro 38)	Explicación	x		x		x	AD
		x		-			
					-		AE
	Prueba		x		x		AD
			x	-	x	x	
		x	x	x	x	x	AE
	Demostración						AD
				-			
							AE
La justificación como práctica argumentativa (ver Cuadro 39)	Esquema de argumentación autoritario						AD
				-			
							AE
	Esquema de argumentación simbólico						AD
				-			
							AE
	Esquema de argumentación fáctico	x	x	x	x	x	AD
		x	x	-			
		x	x	x	x	x	AE
	Esquema de argumentación empírico		x	x			AD
							AE
	Esquema de argumentación analítico	x	x	x	x	x	AD
		x	x	-	x	x	
		x	x	x	x	x	AE

Nota: (*) AD: Actividad dirigida; AE: Actividad extra

En cuánto a las actividades extras, al inicio se observó que, dado que recurrían a la opción "revisar la construcción", para describir – paso por paso – el procedimiento empleado, en los cinco grupos prevalecían los *esquemas de argumentación fácticos* (hacían un recuento de lo hecho por ellos); sólo los grupos nº 2 y 4, prosiguieron con la presentación de justificaciones tipo prueba (esquema de afirmaciones y razones), manifestándose así esquemas de argumentación analíticos. Sin embargo, en el intercambio de ideas con la facilitadora y sus compañeros, los integrantes de los grupos nº 1, 3 y 5 fueron capaces de elaborar una cadena lógico-deductiva y presentar las correspondientes pruebas, apoyándose en las relaciones geométricas previamente reconocidas y sus conocimientos previos. Esto permite reflexionar sobre la necesidad de propiciar este tipo de intercambios entre profesor – estudiantes y estudiantes entre sí, con el propósito de crear un ambiente que incentive las prácticas argumentativas en las clases de Matemática.

Construcciones geométricas con doblado de papel y en un AGD

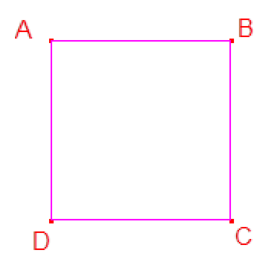
En el Capítulo IV, en el apartado *equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura geométrica*, se describieron las actividades correspondientes al Taller nº 2; por ello, en el análisis de las producciones de los participantes del curso de RPG_AC, se han tenido en consideración solamente lo realizado en las actividades libres, ya que, las actividades dirigidas - centradas en la lectura activa del artículo elaborado por Arrieche e Iglesias (2010) – se considera que permitieron ejemplificar la manera esperada de llevar a cabo la tarea: seleccionar una figura geométrica y realizar su construcción con doblado de papel y con el Cabri II, tratando de establecer la equivalencia entre ambas construcciones y presentar la debida justificación. En el Cuadro 67, se mencionan las construcciones realizadas por los cinco grupos de trabajo.

Cuadro 67
Construcciones seleccionadas por los grupos de trabajo

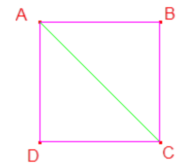
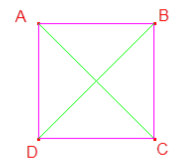
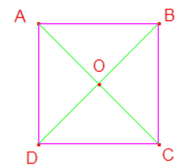
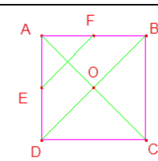
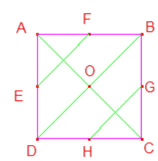
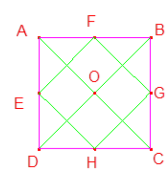
Grupo nº 1	Construir un cuadrado, partiendo de otro cuadrado.
Grupo nº 2	Construcción de un triángulo equilátero a partir de un rectángulo.
Grupo nº 3	Construcción de un pentágono regular.
Grupo nº 4	Construcción de un hexágono, a partir un triángulo equilátero.
Grupo nº 5	Construcción de un triángulo isorrectángulo, partiendo de un cuadrado

El grupo nº 1 decidió trabajar con la construcción de un cuadrado a partir de otro cuadrado; en cuanto a la construcción con doblado de papel siguieron el procedimiento descrito en el siguiente cuadro:

Cuadro 68
Construcción de un cuadrado, a partir de otro cuadrado, con doblado de papel

Procedimiento	Figura ilustrativa
1. Se tiene el cuadrado ABCD.	

Cuadro 68 (cont.)

Procedimiento	Figura ilustrativa
2. Se hace coincidir el vértice D con el vértice B, obteniendo así la diagonal.	
3. Se hace coincidir el vértice A con el vértice C, obteniendo así la diagonal.	
4. Se halla el punto de intersección de las diagonales, siendo este O.	
5. Se hace coincidir el vértice A con O, determinando así los puntos medios de los lados AD y AB siendo estos E y F respectivamente, constituyendo el segmento EF..	
6. Se hace coincidir el vértice C con O, Determinando así los puntos medios de los lados BC y CD siendo estos G y H respectivamente, constituyendo el segmento GH.	
7. Se hace coincidir los vértices B y D (**con el punto O**) para lograr conseguir los segmentos FG y EH. De esta manera se obtiene el cuadrilátero EFGH. *Ahora bien, probemos que este cuadrilátero es un cuadrado.*	

Nota: Cuadro elaborado con información del informe escrito elaborado por el grupo nº 1, incluyendo las figuras ilustrativas del procedimiento empleado.

Una vez realizada la construcción con doblado de papel (descrita en el Cuadro 68), el grupo nº 1 probó que el cuadrilátero EFGH (determinado por los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD) es un cuadrado, teniendo como referencia la siguiente figura:

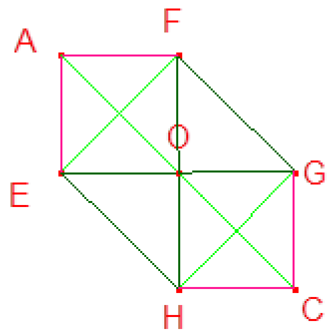


***Gráfico 24*. Figura empleada por el grupo nº 1 para probar que el cuadrilátero EFGH es un cuadrado.**

Hagamos coincidir los puntos B y D con el punto O (**1**); *así FO = OH y EO = OG, siendo FH y EG las diagonales de EFHG* (**2**). $\overline{OF} \perp \overline{EG}$, *ya que, el ángulo* $\measuredangle FOE\ es\ recto$ (**3**) *y, por ángulos opuestos por el vértice y ángulos suplementarios, sabemos que las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares entre si y son congruentes ya que la longitud de las mismas es igual a la de los lados del cuadrado ABCD (***4***) entonces por propiedades (atributos) del cuadrado podemos decir que EFGH es un cuadrado* **(Justificación dada por el Grupo nº 1).**

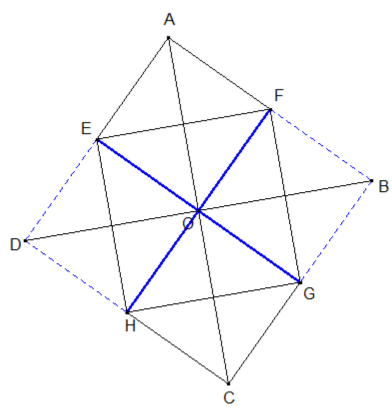


***Gráfico 25*. Figura auxiliar elaborada por la facilitadora para ilustrar la justificación dada por el grupo nº 1.**

Nótese que el grupo nº 1 inicia la prueba (ver Gráficos 24 y 25), haciendo coincidir los vértices B y D del cuadrado original con el punto O (**1**); de este modo, el segmento DE se superpone con el segmento OE y el segmento DH con el segmento OH (DE = OE y DH = OH). De manera similar, el segmento BF se superpone con el segmento OF y el segmento BG con el segmento OG (BF = OF y BG = OG). Además, los segmentos OE, OH, OF y OG son congruentes entre sí, ya que, su longitud es L/2, donde L es la longitud de los lados del cuadrado ABCD; esto es lo que le permite afirmar en (**2**) que las diagonales EG y FH del cuadrilátero EFGH se bisecan en O. Asimismo, afirman, en (**3**), que < FOE es recto (lo cual es cierto), pero teniendo en cuenta que parten del coincidir los puntos B y D con el punto O, debieron primero establecer que < FOG es recto, ya que, se superpone con el ángulo recto < FBG y, por ello, también son ángulos rectos: < FOE (por ser el suplemento de un ángulo recto) y < EOH (por ángulos opuestos por el vértice). Hasta aquí han probado que las diagonales del cuadrilátero EFGH se bisecan y son perpendiculares entre sí; luego afirman en (**4**) que son congruentes, ya que tienen la misma longitud de los lados del cuadrado ABCD. Pudiera decirse, como se ha tratado de ilustrar en este comentario, que al trabajar con el doblado de papel, asumieron – aunque no lo hayan mencionado explícitamente – las relaciones existentes entre segmentos y ángulos al hacer coincidir un punto con otro, porque disponían de evidencias suficientes.

En el Cuadro 69, se presenta el procedimiento descrito por el grupo nº 1 y las herramientas empleadas para construir un cuadrado, a partir de otro cuadrado, en un AGD; en el cual, el hallar la imagen simétrica de una figura con respecto a un eje equivale a doblar el papel a través de ese eje de simetría.

Cuadro 69

Construcción de un cuadrado, a partir de otro cuadrado, en un AGD

Instrucciones	Herramientas empleadas	Observaciones
1. Se traza el segmento DC	Punto Sistema de coordenadas: _ Punto B Punto C Punto (Vértice de un polígono regular): _, B D Punto (Vértice de un polígono regular): C A Punto (Vértice de un polígono regular): C Polígono regular (Polígono regular): B, C, D, A	Con el Cabri II, construyeron el cuadrado BCDA, haciendo uso de la herramienta polígono regular de n lados (en este caso, n = 4); sin embargo, en la descripción de los pasos a seguir, parten del trazado del segmento DC (construcción nº 2 de un cuadrado a partir de uno de sus lados; ver taller nº 1; pasos del 1 al 5)
2. Se traza una perpendicular al punto C y al punto D respectivamente.		
3. Con centro en C y radio en CD se traza un arco de circunferencia. Con centro en D y radio CD se traza un arco de circunferencia.		
4. Se hallan los puntos de int5erseccion de C_1 y C; C_2 y D, encontrando así los puntos A y B.		
5. Se traza el segmento AB, BC y AD; obteniendo así un cuadrado.		
6. Se traza el segmento AC y BD; siendo estas las diagonales del cuadrado.		

Cuadro 69 (cont.)

Instrucciones	Herramientas empleadas	Observaciones
7. Se halla el punto de intersección entre las diagonales, denominándolo O.		
8. Se halla el punto medio de los segmentos AD, AB, BC y CD siendo los mismos E, F, G y H respectivamente.	F Punto (Punto medio): _ E Punto (Punto medio): _ H Punto (Punto medio): _ G Punto (Punto medio): _	A partir de aquí, hay correspondencia entre lo descrito y la construcción realizada con el Cabri II. Ubican el punto medio de cada uno de los lados del cuadrado BCDA.
9. Se trazan los segmentos FG, GH, HE y EF.	Segmento: E, F Segmento: F, G Segmento: G, H Segmento: H, E	Trazan los segmentos determinados por los puntos medios de los lados del cuadrado BCDA.
10. Se considera la recta FG se realiza la simetría axial del triángulo FBG con respecto a la recta.	Triángulo: E, H, D Triángulo: G, H, C Triángulo: G, B, F Triángulo: F, E, A Recta: F, G Recta: G, H Recta: H, E Recta: E, F Punto (Simetría axial): F, _ Punto (Simetría axial): E, _ Punto (Simetría axial): A, _ Triángulo: _, _, _	Construyen los triángulos EHD, GHC, GBF y FEA y trazan las rectas FG, GH, HE y EF. Luego, buscan la imagen simétrica del triángulo FEA con respecto a la recta FE. Obsérvese que, a pesar que, construyeron el triángulo FEA, no le aplicaron la herramienta simetría axial, sino que se la aplicaron a cada uno de los vértices (como lo harían si estuvieran trabajando manualmente).

Cuadro 69 (cont.)

Instrucciones	Herramientas empleadas	Observaciones
11. De igual forma se considera la recta GH y el triángulo GCH, la recta EH y el triángulo EDA, la recta FE y el triángulo EAF, realizando la simetría axial.	Punto (Simetría axial): E, _ Punto (Simetría axial): H, _ Punto (Simetría axial): D, _ Triángulo: _, _, _ Punto (Simetría axial): G, _ Punto (Simetría axial): H, _ Punto (Simetría axial): C, _ Triángulo: _, _, _ Punto (Simetría axial): G, _ Punto (Simetría axial): B, _ Punto (Simetría axial): F, _ Triángulo: _, _, _	De manera análoga, determinan la imagen simétrica de los triángulos EHD, GHC y GBF con respecto a las rectas ED, GH y FG (ver Gráfico 26). Nótese que la descripción no coincide con el orden seguido en la construcción, aunque esto no alteraría lo realizado.

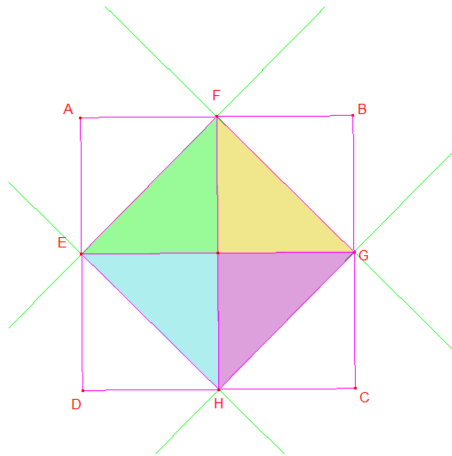


***Gráfico 26*. Cuadrado elaborado por el Grupo nº 1, a partir de otro cuadrado, en un AGD.**

Seguidamente, se da a conocer la justificación dada por el Grupo nº 1: *De esta manera se obtiene el polígono FEHG, el cual es un cuadrado por GO = OE y FO = OH; Y ellos son congruentes entre sí, ya que ellos corresponden a* $\frac{1}{2}$ *del lado del cuadrado ABCD (**1**). FH y EG son las diagonales del polígono, las mismas son congruentes y ortogonales entre sí. Son ortogonales porque forman un ángulo de 90º, ya que, el ángulo FOE se corresponde con el ángulo EAF por la simetría axial. De esta forma se ha demostrado que el polígono EFGH es un cuadrado (**2**).*

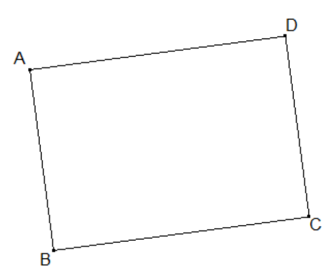
Se observa en la afirmación (1) que demuestran que las diagonales del cuadrilátero EFGH se bisecan en el punto O, teniendo en cuenta que los segmentos EO, FO, GO y HO son congruentes entre sí, porque su longitud es igual a la mitad de la longitud de los lados del cuadrado original; sin embargo, no lo señalan de forma explícita. Esto es clave porque las diagonales de un cuadrilátero pueden ser congruentes y perpendiculares, sin llegar a bisecarse y el cuadrilátero no sería un cuadrado. En (2), aplican que un triángulo y su imagen simetría son congruentes entre sí; y, por PCTC, garantizan que el < FOE es un ángulo recto como lo es < FAE.

Al revisar las justificaciones dadas por el Grupo nº 1, con el propósito de garantizar que el cuadrilátero EFGH es un cuadrado, se nota que siguieron una idea central: demostrar que sus diagonales EG y FH se bisecan en el punto O y, además, son congruentes y perpendiculares entre sí; aquí se estarían basando en ciertas propiedades estudiadas en el curso de Geometría I: (a) Un cuadrado es un rombo y un rectángulo; (b) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un rombo; (c) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son congruentes, entonces el cuadrilátero es un rectángulo. En función de la construcción realizada y los datos disponibles, se considera que pudo probar que los triángulos EHD, GHC, GBF y FEA son congruentes entre sí y que los lados EH, GH, GF y FE son congruentes, con lo cual pueden llegar a establecer que el cuadrilátero EFHG es un paralelogramo con lados congruentes entre sí (un rombo); luego tendrían que probar que posee un ángulo recto.

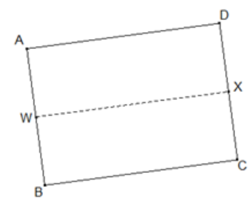
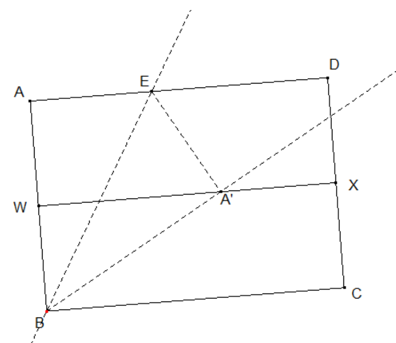
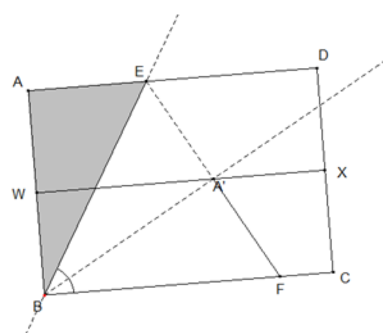
El Grupo nº 2 seleccionó la construcción de un triángulo equilátero, partiendo de una hoja DINA4, mediante el doblado de papel. Cabe señalar que, para reconstruir el procedimiento empleado, se revisó el archivo de audio y video disponible, el cual fue grabado durante el desarrollo de la actividad.

En el Cuadro 70, se ha transcrito el procedimiento empleado por el Grupo nº 2 y se ha acompañado de una figura ilustrativa para facilitar su seguimiento por parte de los lectores y algunas notas realizadas por la autora.

Cuadro 70
Procedimiento empleado para construir un triángulo equilátero con doblado de papel, partiendo de una hoja DINA4

Procedimiento	Figuras ilustrativas
HB: Vamos a construir un triángulo equilátero con doblado de papel, partiendo de una hoja conocida como DINA4.	
Nota: En una hoja DINA4, la razón entre las longitudes de dos lados consecutivos es raíz cuadrada de 2.	

Cuadro 70 (cont.)

<table>
<tr><th>Procedimiento</th><th>Figuras ilustrativas</th></tr>
<tr><td>HB: El primer paso que vamos hacer es unir dos vértices los más cercanos, de modo que encontremos los puntos medios de esos lados paralelos; vemos que se forma una línea, que nos representaría un segmento, que en este nos daría un eje de simetría, por formar dos rectángulos congruentes.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Nota: En el rectángulo ABCD, se hace coincidir el vértice A con el B y el vértice D con el C, obteniendo los puntos medios W y X de los lados AB y DC respectivamente.</td></tr>
<tr><td>HB: Ahora bien colocamos la hoja en forma horizontal. El vértice superior izquierdo lo vamos a trasladar de manera tal que el vértice quede sobre el eje de simetría hallado y a su vez que biseque el vértice inferior izquierdo.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Nota: Se hace coincidir el vértice A con un punto A’ del segmento WX, de modo tal que el segmento BE biseque al < ABA’. En la descripción se nota ciertas imprecisiones en el uso del lenguaje.</td></tr>
<tr><td>HB: Luego de tener este doblado vamos hacer un doblez tomando en cuenta la parte que nos queda en el interior del rectángulo, hacemos un doblez del ángulo contrario a través de esa línea, tratando de prolongarla y que nos quede de forma recta; puede ser hacia dentro o hacia fuera (se puede trabajar cualquiera de los dos vértices). El vértice tiene que coincidir con el lado</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Nota: Teniendo plegado el triángulo ABE sobre el triángulo A’BE, se hace coincidir el vértice E con un punto F del lado BC; de esta manera, BE = BF.</td></tr>
<tr><td>HB: Luego en este punto en la parte inferior, <u>nos tuvo que sobrar un triángulo pequeño</u>, este lo vamos a doblar hacia arriba; y de esta manera conseguimos el triángulo equilátero.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Nota: Esto posiblemente sucedió porque la construcción no la realizaron con una hoja DINA4, sino con una hoja tamaño carta.</td></tr>
</table>

Una vez que HB realizó la construcción con doblado de papel de un triángulo equilátero, otro integrante del grupo WR preguntó: *Ahora ¿cómo sabemos que es un triángulo equilátero?* Seguidamente dijo: *Buscamos las medianas de cada lado del triángulo,* procediendo – de inmediato - a efectuar los correspondientes dobleces; es decir, hace coincidir el vértice B con F, obteniendo la mediana EE', siendo E' el punto medio del segmento BF y, en forma análoga, construye las medianas FF' y BB' como se ilustra en el siguiente gráfico:

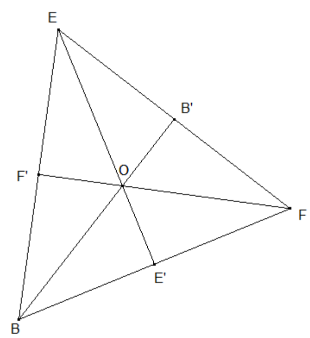


***Gráfico 27*. Figura ilustrativa de las medianas de un triángulo equilátero**.

WR, una vez realizados los dobleces, afirma: *Encontrando así el punto de intersección de todas las medianas. ¿Qué se quiere demostrar con esto? Que todos los triángulos que se forman son congruentes*.

Resulta interesante que la explicación dada por el Grupo nº 2 esté basada en el hecho que dos figuras son congruentes si al superponerse coinciden y, además que, si las medianas de un triángulo lo descomponen en seis triángulos congruentes, entonces el triángulo es equilátero. En la figura y, por superposición, WR llegó a que los triángulos Δ OBE', Δ OFE', Δ OFB', Δ OEB', ΔOEF' y Δ OBF' son congruentes entre sí; dejando implícito que, de esta manera, los segmentos BE', FE', FB', EB', EF' y BF' son congruentes entre sí (PCTC) y, en consecuencia, BF = FE = EB.

Cabe señalar que, aparentemente al hacer la construcción del triángulo BEF con doblado de papel, los integrantes del Grupo nº 2, no se percataron que, por superposición, los ángulos ABE, A'BE y A'BF son congruentes y, por ende, se ha trisecado el ángulo recto ABC y, por el postulado de adición de ángulos, el ángulo

EBF mide 60º con BE = BF; con estas premisas, es posible probar que el triángulo BEF es equilátero (probando que Δ BEF es equiángulo). Se conoce que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes (y hasta aquí se conoce que el triángulo BEF es isósceles) y, por ello, los ángulos BEF y BFE son congruentes y, además, m (< BEF) + m (< BFE) = 120º, ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º y el ángulo restante mide 60º. Esta situación fue aprovechada por la facilitadora para propiciar la participación de los profesores en formación y el intercambio de ideas.

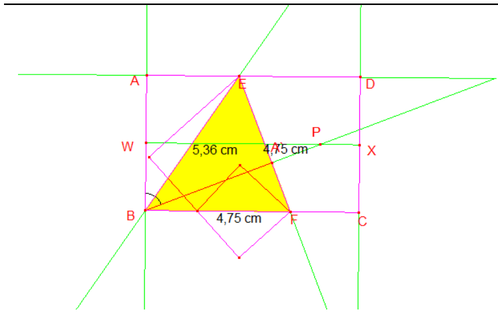
Para finalizar su intervención, los participantes del Grupo nº 2, usando la opción "revisar la construcción", describieron el procedimiento utilizado para construir un triángulo equilátero BEF, a partir de un rectángulo ABCD, en el cual la razón entre las longitudes de dos lados consecutivos es raíz cuadrada de 2. Se observa, en el Cuadro 71, que procuraron establecer relaciones con el procedimiento utilizado con el doblado de papel; sin embargo, al iniciar la construcción con el Cabri II, no construyen un rectángulo que satisfaga las condiciones exigidas. Además, expresan que la clave está en la trisección de un ángulo recto; sin embargo, la manera de hacerlo es inconsistente (ver paso 3 en el mencionado cuadro). Cabe decir que la manera de trisecar - con regla y compás - un ángulo recto lo trataron Arrieche e Iglesias (2010) y la misma fue utilizada por los participantes en las actividades dirigidas. En el Cuadro 71, se han incorporado una serie de observaciones como parte del análisis de esta actividad.

Es necesario señalar que los integrantes del Grupo nº 2, en función a las observaciones realizadas durante el desarrollo de la exposición, asumieron los errores cometidos (inconsistencia de la trisección de un ángulo recto y el haber partido de cualquier rectángulo). Quedándole planteada una tarea: ¿Cómo construir un rectángulo en el cual la razón entre las longitudes de dos lados consecutivos es raíz cuadrada de 2?

Cuadro 71
Construcción de un triángulo equilátero, a partir de un rectángulo, en un AGD

Instrucciones	Herramientas empleadas	Observaciones
HB: (1) Ahora realizaremos la misma construcción, pero esta vez utilizando el Cabri. Esta primera parte es para construir el rectángulo cuya razón es raíz de dos.	Punto Sistema de coordenadas: _ B Punto C Punto Segmento: B, C Recta (Recta perpendicular): B, _ Recta (Recta perpendicular): C, _ A Punto (Punto sobre un objeto): _ Recta (Recta paralela): A, _ D Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Polígono: A, D, C, B	Se dispuso del archivo .fig, con lo cual fue posible mostrar y copiar la descripción de la construcción realizada; sin embargo, el procedimiento empleado no fue descrito en el informe escrito, sino de forma oral y, fue posible seguirlo a partir de la revisión del audio video disponible (SMOV0024). Comienzan construyendo el rectángulo ADCB, a partir del lado BC; sin embargo, no tienen en consideración que, con doblado de papel parten de una hoja DINA4; es decir, una hoja en el cual la razón entre ancho y largo es raíz cuadrada de 2.
*YC: (2) Tenemos los puntos A, B, C y D, los unimos determinando el rectángulo. Luego determinamos los puntos medios de (***los lados***) AB y CD y unimos ambos puntos, determinado el segmento WX.* *HB: De manera de asemejar los pasos que realizamos con doblado de papel al uso del software. Así este segmento WX es la línea que se ve cuando hacemos el doblado de papel, lo mismo que el eje de simetría.*	W Punto (Punto medio): A, B Punto (Punto sobre un objeto): _ Punto (Punto medio): D, _ X Punto (Punto medio): D, C Segmento: W, X	Ubican los puntos W y X, puntos medios de los lados AB y DC respectivamente. Y luego trazan el segmento WX. De manera explícita expresan que procuraron "asemejar los pasos que realizaron con el doblado de papel".

Cuadro 71 (cont.)

Instrucciones	Herramientas empleadas	Observaciones
 *HB: (3) Ahora como sabemos que un ángulo recto lo podemos trisecar, nos basaremos en esto para tratar de hacer la construcción. Por lo que trisecaremos el ángulo recto ∠ABC. De esta manera se nota que la semirrecta B1 interseca al WX en un punto A´. Trazamos la semirrecta B2 e interseca al AD en un punto E.*	P Punto (Punto sobre un objeto): WX ángulo: A, B, P Semirrecta: B, P Recta (Bisectriz): W, B, P E Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Triángulo: A, B, E A` Punto (Simetría axial): A, _ Punto (Simetría axial): B, _ Punto (Simetría axial): E, _ Triángulo: A`, _, _	Ubican un punto P sobre el segmento WX y marcan el ángulo ABP y trazan la semirrecta BP. Nótese que esto no garantiza que la m (<ABP) = 60º. Luego trazan la bisectriz del < WBP, la cual interseca al lado AD en el punto E. Trazan el triángulo ABE y buscan su imagen simétrica con respecto a la recta BE. Así, hayan un punto A' imagen simétrica de A con respecto a la recta BE, el cual no necesariamente pertenece al segmento WX. No obstante arrastrando el punto P, puede lograrse que el punto A' esté sobre el segmento WX; esto sucede cuándo el ángulo ABP mide 60º. Ver imagen en la primera columna; en ella el punto A' no coincide con el punto P y el triángulo BEF no es equilátero. **Aquí se observa una trisección inconsistente de un ángulo recto**.

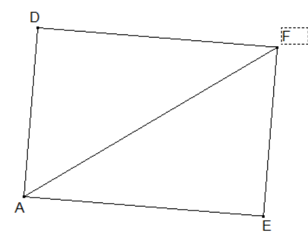
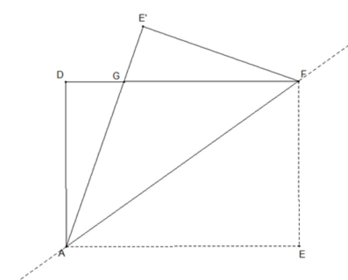
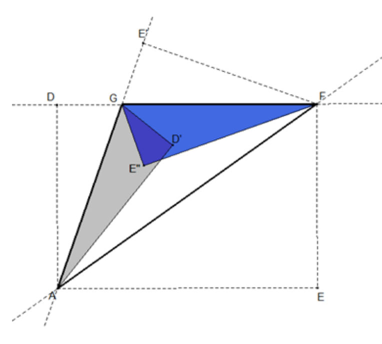
Cuadro 71 (cont.)

Instrucciones	Herramientas empleadas	Observaciones
HB: Lo próximo que se hace es marcar el triángulo ABE y aplicamos simetría axial con respecto a esa semirrecta (que sería el segundo doblado que trabajamos), como se puede notar el vértice A coincide con el (lado) WX. Ahora trazamos una semirrecta que parte del punto E y pasa por el punto A´, intersecando al (segmento) AC en un punto F. ¿Para qué hacemos esto? Para hacer que en este polígono EDCF a través de simetría axial con respecto a esa semirrecta EA que acabamos de trazar nos pueda representar como el próximo doblado de papel que trabajamos. *Por lo que la punta que sobra en la pantalla es la punta que sobra en el doblado de papel. Ese triángulo como lo hicimos anteriormente lo doblamos, en este caso vamos a marcar el triángulo y por simetría axial con respecto al segmento CD tenemos todos los doblados y nos quedaría un triángulo equilátero ∆BEF.*	Semirrecta: E, A` F Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Polígono: E, D, C, F Punto (Simetría axial): E, _ Punto (Simetría axial): D, _ Punto (Simetría axial): C, _ Punto (Simetría axial): F, _ Polígono: _, _, _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Triángulo: _, F, _ Punto (Simetría axial): _, _ Punto (Simetría axial): F, _ Punto (Simetría axial): _, _ Triángulo: _, _, _ Triángulo: B, E, F 5,11 cm Texto (Distancia o longitud): E, B 5,11 cm Texto (Distancia o longitud): B, F 5,11 cm Texto (Distancia o longitud): F, E	Luego trazan la semirrecta EA’ que corta al lado BC en un punto F. Tal semirrecta servirá como eje de simetría del polígono EDCF; así como el lado BC servirá como eje de simetría del triángulo C’FQ, siendo Q el punto donde el segmento C’D’ corta al lado BC. Con esto simulan el doblado de papel. La clave de la construcción está en la trisección de un ángulo recto; en este caso, el ángulo ABC, ya que así el triángulo ABE es un triángulo 30º-60º-90º y también lo será su imagen simétrica: ∆ A’BE, con lo cual <A’EB mide 60º. De esta manera, el triángulo BEF tendrá dos ángulos de 60º, con lo cual el ángulo EFB también mide 60º. Por ende, si el triángulo BEF es equiángulo también es equilátero. Nótese que se pudiera conjeturar que, siguiendo la construcción si el < ABP no mide 60º, el triángulo BEF seria isósceles con BF = EF. ¿Por qué?

El Grupo nº 3 eligió trabajar con la construcción de un pentágono regular; en el Cuadro 72 se describe el procedimiento utilizado con doblado de papel.

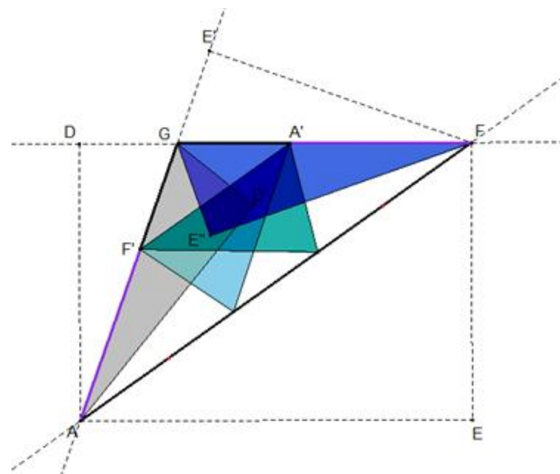
Cuadro 72
Construcción de un pentágono regular, usando una hoja DinA4

Dado un rectángulo de papel que cumpla con la condición de que la base entre la altura sea √2 (hoja DIN A4). Construir un pentágono, mediante el doblado de papel.

Instrucciones	Figuras ilustrativas
1. Se inicia la construcción a partir de un rectángulo de papel que cumpla la condición de que la base entre la altura sea √2 (hoja Din A4).	
2. Trace una de las diagonales del rectángulo y asígnele letras a todos los vértices.	
Nota: A los vértices le asignaron las letras ADFE	
3. Doble el papel por la diagonal.	
Nota: Doblaron la hoja de papel, marcando el pliegue que pasa por los puntos A y F.	
4. Tome los dos vértices sobrantes del doblez (D y E) respectivamente, y dóblelo de tal manera que se amolden a los lados del rectángulo formal.	
Nota: En el Δ AFE', hallaron el simétrico del punto E' con respecto al lado DF; obteniendo Δ E''FG, don G es el punto de intersección de los segmentos DF y AE'. Análogamente, hallaron la imagen simétrica del punto D con respecto al segmento AE'. El vocabulario empleado es impreciso; sin embargo, la realización de la construcción en la medida que se explicaba el procedimiento permitió seguirla.	

Cuadro 72 (cont.)

Dado un rectángulo de papel que cumpla con la condición de que la base entre la altura sea √2 (hoja DIN A4). Construir un pentágono, mediante el doblado de papel.

Instrucciones	Figuras ilustrativas
5. Doble el vértice E al lado opuesto.	
6. Finalmente tome el vértice A y dóblelo, de tal manera, que el vértice toque un punto del lado opuesto en el punto de doblado superior realizado anteriormente. Obteniéndose así EL PENTÁGONO.	
Nota: En el paso (5) se refieren al vértice F. En Δ AFG, A' está en el lado opuesto al vértice A y F' en el lado opuesto al vértice F. Se observa que AF'= A'F', así como A'F = A'F'.	

Nota: Procedimiento tomado de la presentación en PowerPoint que utilizaron durante la exposición y figuras ilustrativas elaboradas por la autora

Cabe señalar que las notas y figuras ilustrativas incorporadas en el Cuadro 72 fue posible realizarlas mediante la observación del correspondiente audio – video; a continuación se transcribe el apartado considerado:

AO: Ahora luego de trazar una de sus diagonales se le va a asignar letras a cada uno de los vértices. En este caso, A (vértice inferior izquierdo) E (vértice inferior derecho) F (vértice superior derecho) D (vértice superior izquierdo) **(Paso 2)**. *Luego, doblar el papel por la diagonal* **(Paso 3)**. *Seguidamente vamos a tomar los vértices sobrantes, en este caso E y D, doblarlos hacia cualquiera de los dos lados pero los dos hacia la misma cara* **(Paso 4).** *Me explico, los triángulos que sobran se van a doblar hacia adentro quedándome los dos triángulos pequeños* **(Δ E'FG y Δ ADG)** *sobre el triángulo mayor* **(Δ AFG)**. *Esto, de tal manera que se amolden a los lados del triángulo original. Luego, el vértice F se va a llevar al lado opuesto que sería el segmento AG* **(en el Δ AFG) (Pasos 5 y 6).**

ZT: ¿Cómo? ¡No entiendo! ¿Cómo lo coloco?

AO: Cuando nosotros tenemos el triángulo que lo superpusimos. Lo que van a hacer es lo siguiente, cualquiera de los dos vértices (de la base del triángulo) lo van a llevar al lado opuesto de manera que toque un punto del lado opuesto.

OB: ¿Cualquiera?

AO: Sí, <u>pero de manera de que el otro vértice cuando lo doblen quede también a la misma distancia</u> (**es decir que, AF'= A'F' y A'F = A'F'**). *¿Qué pasa? Yo voy a llevar el vértice al lado opuesto de manera de que sea la diagonal o que sea la base del triángulo pequeño (lo señala en el video). Y se va a llevar, finalmente, el otro vértice que toque el punto que se realizó anteriormente en el doblez anterior, formándome así el pentágono.*

Para garantizar que el pentágono A'GF'BC es un pentágono regular, procedieron a trazar la mediatriz de cada uno de los lados (mediante doblado de papel) para ir verificando que los lados son congruentes entre sí, ya que, al superponerse, coinciden (ver Gráfico 28); así, si se considera la mediatriz M_1 – mediatriz del lado BC – se tiene que GF = GA' y F'B = A'C y así sucesivamente.

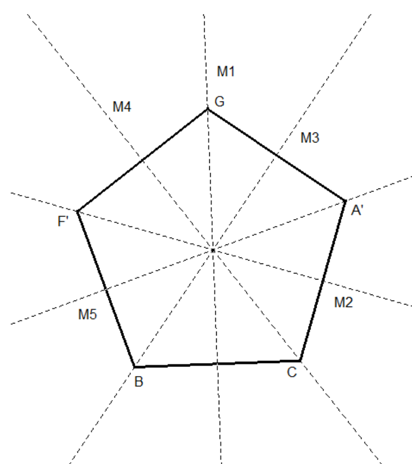
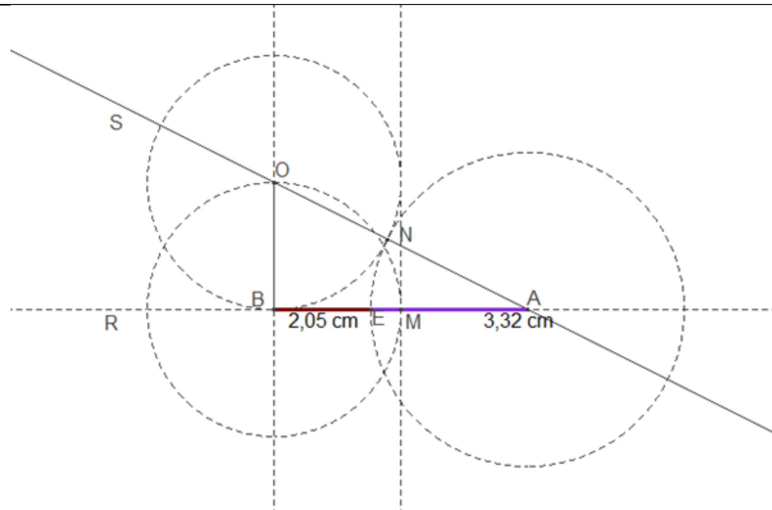


Gráfico 28. **Construcción de las mediatrices de los lados de un pentágono, para verificar, con doblado de papel, que los lados son congruentes entre sí.**

En el Cuadro 74, se presenta y comenta la construcción de un pentágono regular, a partir de un rectángulo en el cual la razón entre las longitudes de dos lados consecutivos es raíz cuadrada de 2 (hoja DINA4). Además, como parte de las exigencias del procedimiento empleado, se vieron en la necesidad de revisar cómo dividir un segmento, de modo que las longitudes de los dos segmentos resultantes satisfagan la razón áurea, como se muestra en el Cuadro 73 (construcción auxiliar). Esto es lo que les permitió con regla y compás dividir los segmentos AG y FG, hallando los puntos A’ y F’ en los lados FG y AG respectivamente.

Cuadro 73
División de un segmento en dos segmentos cuyas longitudes están en razón áurea.



Herramientas empleadas	Comentarios
B Punto R Recta: B A Punto (Punto sobre un objeto): R Segmento: B, A Recta (Mediatriz): _ M Punto (Punto(s) de intersección): R, _	Por un punto B, trazan una recta R y, luego ubican un punto A, distinto de B, sobre dicha recta y trazan el segmento AB. Seguidamente, trazan la mediatriz del segmento AB, siendo M el punto de intersección del segmento AB con su mediatriz.
Recta (Recta perpendicular): B, R	Por B trazan una perpendicular L a la recta R.
Segmento: M, A C1 Círculo (Compás): B, _ O Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Segmento: B, O C2 Círculo: O, B	Trazan el segmento MA y la circunferencia C1 con centro en B y radio MA, donde MA = MB = AB/2. O es el punto de intersección de C1 con L. Luego trazan el segmento BO y una circunferencia C2 con centro en O y radio OB.
S Recta: A, O N Punto (Punto(s) de intersección): S, _	Trazan la recta S que pasa por A y O, donde N es el punto de intersección de C2 y S.

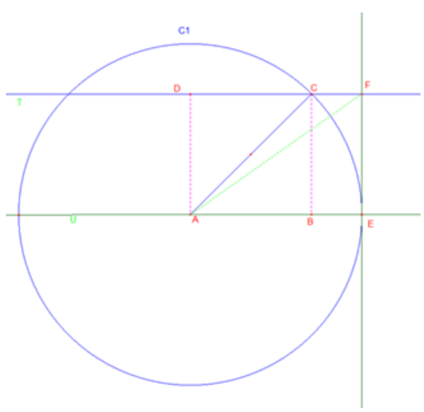
Cuadro 73 (cont.)

Herramientas empleadas	Comentarios
C3 Círculo: A, N E Punto (Punto(s) de intersección): R, _	Trazan la circunferencia C3 con centro en A y radio AN. Siendo E el punto de intersección de la recta R y la circunferencia C3
Segmento: A, E Segmento: E, B 2,05 cm Texto (Distancia o longitud): _ 3,32 cm Texto (Distancia o longitud): _	Trazan los segmentos AE y EB, determinan sus longitudes. La razón, en la que E divide al segmento AB, viene dada por BE / EA o por AE / EB

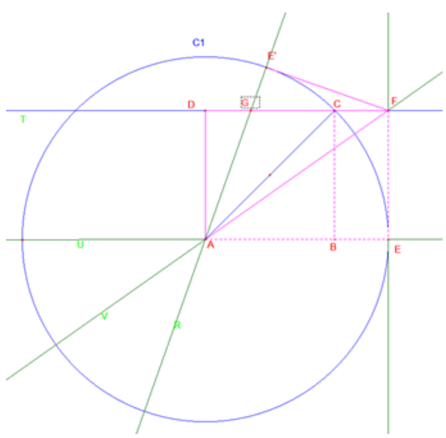
Cabe destacar que, el grupo nº 2 siguió una estrategia que usualmente se emplea cuando se trabaja con una construcción geométrica con regla y compás: introducir una construcción auxiliar, la cual, consistió en ubicar un punto E sobre el segmento de extremos A y B tal que $\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EB}$; en este caso, se dice el punto E dividió al segmento AB en razón áurea. Asimismo, este tipo de problemas permite trabajar con la construcción del rectángulo áureo, en la cual las longitudes de dos lados consecutivos del mismo están en razón áurea. Además, desde la antigua Grecia, la sección áurea ha estado vinculada con la belleza y, por ende, con el valor estético de pinturas, esculturas y construcciones; así como también con el estudio de otros temas matemáticos como los números de Fibonacci (Posamentier, 2002).

En ese sentido, la construcción seleccionada por el grupo nº 2 posee un potencial didáctico que pudiera ser desarrollado en una propuesta formativa, ya que, establece vínculos que la evolución histórica de la Geometría y con otros temas matemáticos.

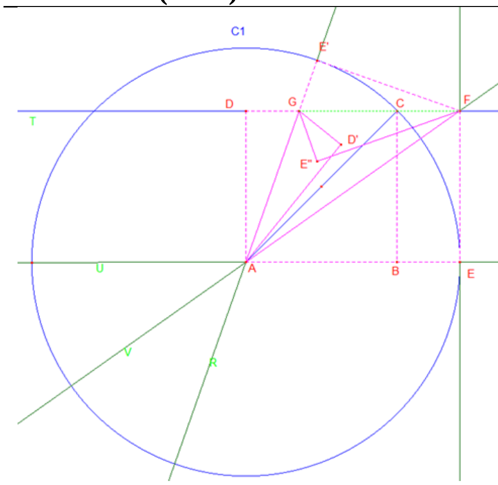
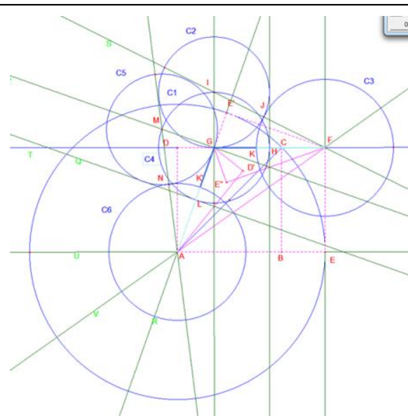
Cuadro 74
Construcción de un pentágono regular en un AGD

Procedimiento	Herramientas empleadas
Partiendo de un cuadrado ABCD se construye el rectángulo AEFD cuya diagonal mide $\sqrt{2}$ (AF=$\sqrt{2}$); por hipótesis. Por propiedad del rectángulo: - DF‖AE y DF = AE - AD‖EF y AD = EF - m (<FDA) = m (<DAE) = m (<AEF) = m (<EFD); por ser todos ángulos rectos.	Punto Sistema de coordenadas: _ Punto C Punto B Punto (Vértice de un polígono regular): _, C A Punto (Vértice de un polígono regular): B D Punto (Vértice de un polígono regular): B Polígono regular (Polígono regular): C, B, A, D U Recta: A, B T Recta (Recta paralela): C, U Segmento: A, C C1 Círculo: A, C Punto (Punto(s) de intersección): U, C1 E Punto (Punto(s) de intersección): U, C1 Y Recta (Recta perpendicular): E, U F Punto (Punto(s) de intersección): T, Y Segmento: A, F Triángulo: D, A, F Triángulo: F, E, A V Recta: A, F
 Tomada con la opción imprimir pantalla	**Nota:** Construyen un polígono regular de 4 lados; es decir, un cuadrado ABCD. Trazan la recta U que pasa por los puntos A y B y la recta T que pasa por C y es paralela a la recta U. Trazan el segmento AC (diagonal del cuadrado ABCD) y la circunferencia C1 con centro en A y radio AC. E es el punto de intersección de la recta U y la circunferencia C1 y, por tal punto, se traza una perpendicular a la recta U F es el punto de intersección de las rectas T y Y. Trazan el segmento AF, diagonal del rectángulo AEFD; nótese que AE = AC y AC = √2.L, L = longitud de los lados del cuadrado ABCD. **De este modo garantizan que el rectángulo AEFD satisface la condición inicial.**

Cuadro 74 (cont.)

Procedimiento	Herramientas empleadas	
Haciendo uso de la simetría axial con respecto al ΔAEF y usando a la recta V como eje de simetría, se obtiene un punto G que viene dado por la intersección entre DF y AE'. Determinando así el ΔGDA y ΔGE'F.	 E' R G	Punto (Simetría axial): F, V Punto (Simetría axial): E, V Punto (Simetría axial): A, V Triángulo: _, E', _ Punto (Punto(s) de intersección): _, C1 Recta: _, A Punto (Punto(s) de intersección): _, R Triángulo: E', G, F Triángulo: G, D, A
 Tomada con la opción imprimir pantalla	**Nota**: Δ FE'A es la imagen simétrica del Δ FEA con respecto a la recta AF. Nótese que E' pertenece a la circunferencia C1 (A, AC), ya que, AE = AE' (por isometría) y AE = AC. Traza la recta R que pasa por AE', la cual interseca al segmento DF en el punto G. Trazan los triángulos E'GF y GDA.	
Procedimiento	**Herramientas empleadas**	
Se realiza la simetría axial del ΔGDA con respecto a la recta R (eje de simetría). De la misma forma se realiza la simetría axial del ΔGE'F con respecto a la recta T. Determinando así el ΔAGF.	E" D'	Punto (Simetría axial): E', T Punto (Simetría axial): G, T Punto (Simetría axial): F, T Triángulo: E", _, _ Punto (Simetría axial): G, R Punto (Simetría axial): D, R Punto (Simetría axial): A, R Triángulo: _, D', _ Triángulo: G, A, F

Cuadro 74 (cont.)

 Tomada con la opción imprimir pantalla	**Nota:** Determinan la imagen simétrica del Δ E'GF con respecto a la recta T que pasa por los puntos D y F; así como la imagen simétrica del Δ GDA con respecto a la recta R que pasa por los puntos A y E'. Luego, trazan los triángulos E''FG y GAF
Procedimiento	**Herramientas empleadas**
Se procede a realizar la división áurea de los segmentos GF y GA, para determinar dos de los vértices que forman el pentágono, así el segmento GF=GK+KF; siendo KF/GK=Φ, por otro lado el segmento GA=GK' + K'A siendo K'A/GK'= Φ. Determinando así dos lados del polígono GK' y GK	Segmento: G, F X Recta (Mediatriz): _ H Punto (Punto(s) de intersección): X, T W Recta (Recta perpendicular): G, _ Segmento: H, F C4 Círculo (Compás): G, _ Punto (Punto(s) de intersección): W, C4 I Punto (Punto(s) de intersección): W, C4 C2 Círculo: I, G S Recta: I, F Punto (Punto(s) de intersección): S, C2 J Punto (Punto(s) de intersección): S, C2
	**Nota**: Trazan el segmento GF y su mediatriz X. H es el punto de intersección de las rectas X y T. Por el punto G trazan una recta W perpendicular al segmento GF. Trazan el segmento HF y la circunferencia C4 con centro en G y radio GH. I es el punto de intersección de la recta W y la circunferencia C4. Se trazan la circunferencia C2 con centro en I y radio IG, así como la recta S que pasa por I y F. J es el punto de intersección de S y C2.

Cuadro 74 (cont.)

Procedimiento	Herramientas empleadas	
Haciendo centro en F con abertura **FK**, se traza la circunferencia C3 que corta al segmento AF en P. De manera análoga haciendo centro en A y abertura AK' se traza la circunferencia C6 cortando al segmento AF en O. P y O son vértices del pentágono	C3	Círculo: F, J
	K	Punto (Punto(s) de intersección): T, C3
		Punto (Punto(s) de intersección): T, C3
		Segmento: G, K
		Segmento: K, F
		Segmento: G, A
	Q	Recta (Mediatriz): _
	L	Punto (Punto(s) de intersección): _, Q
		Segmento: L, A
		Círculo (Compás): G, _
	Z	Recta (Recta perpendicular): G, _
	M	Punto (Punto(s) de intersección): Z, C4
		Punto (Punto(s) de intersección): Z, C4
	C5	Círculo: M, G
		Recta: M, A
		Punto (Punto(s) de intersección): _, C5
	N	Punto (Punto(s) de intersección): _, C5
	C6	Círculo: A, N
	K'	Punto (Punto(s) de intersección): _, C6
		Segmento: G, K'
		Segmento: K', A
	O	Punto (Punto(s) de intersección): _, C6
		Punto (Punto(s) de intersección): _, C6
		Punto (Punto(s) de intersección): _, C3
	P	Punto (Punto(s) de intersección): _, C3

Nota:

Trazan una circunferencia C3 con centro en F y radio FJ. (¿FJ = FK?), la cual corta al segmento AF en K. **(Hasta aquí han dividido en razón aurea al segmento GF)**

Trazan los segmentos GK, KF y GA y la mediatriz Q del segmento GA, donde L es el punto de intersección del segmento GA con su mediatriz Q.

Trazan el segmento LA y trazan por G una perpendicular Z al segmento GA, donde M es el punto de intersección de la recta Z con la circunferencia C4.

Trazan la circunferencia C5 con centro en M y radio MG y la recta MA, donde N es el punto de intersección de la recta MA con la circunferencia C5.

Se traza la circunferencia C6 con centro en A y radio AN.

K' es el punto de intersección de la circunferencia C6 con el segmento GA.

Trazan los segmentos GK' y K'A. **(Hasta aquí han dividido en razón aurea al segmento GA)**

O es el punto de intersección de la recta AF con la circunferencia C6 y P es el punto de intersección de la circunferencia C3 con la recta AF.

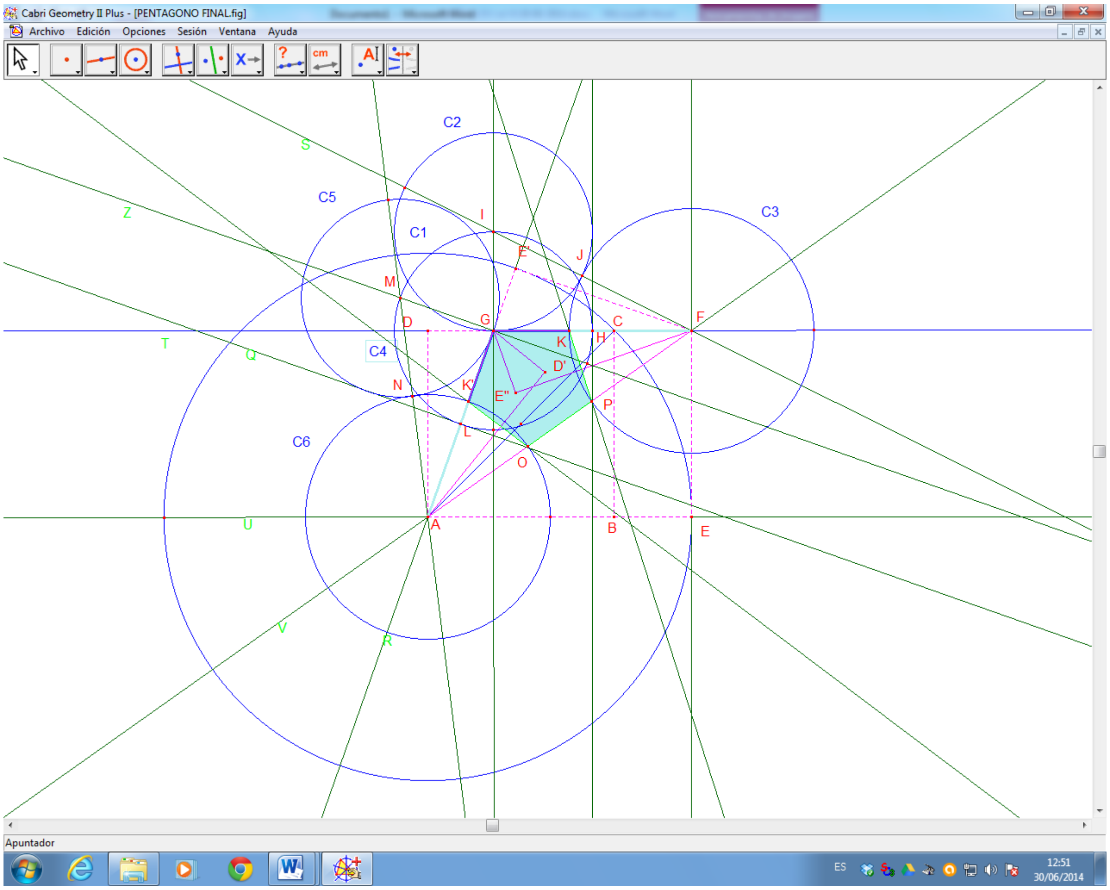


***Gráfico 29*. Construcción de un pentágono áureo, a partir de un rectángulo en el cual la razón de las longitudes de dos lados consecutivos es raíz cuadrada de 2.**

A continuación se transcribe la presentación de esta construcción, incluyendo las intervenciones de la facilitadora (MI) y algunos de los participantes en el curso de RPG_AC:

MI: ¿Ahora a quien le toca la construcción?

CG: A mí. (Abre el archivo y aparece en pantalla la imagen mostrada en el Gráfico 29).

CG: (Ante la cara de asombro de sus compañeros y los murmullos) *No se asusten, esto es muy bonito.*

MI: Si ustedes la hicieron y la vieron en papel, entonces ahora ustedes traten de ir entendiendo "Ah pero esto fue lo que hicimos cuando..." (con esto procuraba que los profesores en formación trataran de ir estableciendo relaciones entre ambas mareras de construir un pentágono regular).

CG: (Ver Gráfico 30) *Para comenzar con la construcción del pentágono regular por medio del software de Geometría Dinámica, en este caso el Cabri, partimos de un cuadrado y trazamos su diagonal, en este caso la diagonal AC, de tal manera que, a partir de este cuadrado que cumple con que la diagonal mida raíz de dos* (por L, donde L es la longitud de los lados del cuadrado), *construyamos el rectángulo necesario para poder construir el pentágono regular. Entonces, tomamos la medida del segmento de la diagonal AC y haciendo centro en C trazamos la circunferencia* C_1 *que me corta a la recta U en un punto dado.*

MI: ¿Centro en C? (Esperando que CG se percatara del error cometido)

CG: Centro en A con abertura AC.

MI: Es que dijiste centro en C

CG: Con abertura AC con centro en A, determinando así el punto E. De tal manera, se traza una perpendicular con respecto a la recta U por el punto E y así mismo esta perpendicular me corta a la recta T en el punto F, quedando así el cuadrilátero AEFD que es el rectángulo que cumple con la razón de raíz de dos. Así mismo, se traza la diagonal AF que en este caso es una de las diagonales del rectángulo cuya razón es igual a raíz de dos. Así mismo, se puede observar que la diagonal me divide al rectángulo en dos triángulos, el triángulo ADF y el triángulo AEF. Luego, se traza una recta por cuestión de comodidad que pase por los puntos A y F, la determinamos la recta B, de tal manera que utilizando simetría axial con respecto al triángulo AEF cuyo eje de simetría es AF se hace la simetría axial y llegamos al triángulo AE'F teniendo en cuenta que E' es el mismo vértice E.

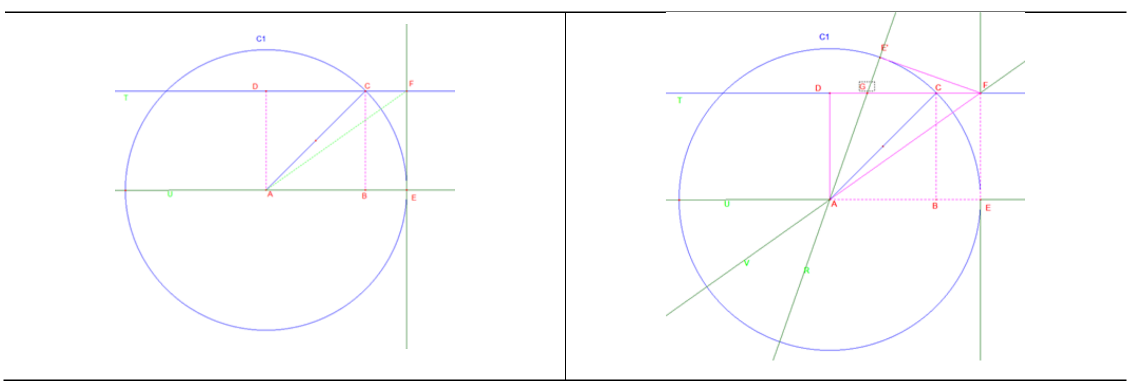


***Grafico 30*. Construcción del rectángulo y simetría del Δ AEF con respecto a la recta AF.**

MI: (Tomando la construcción con doblado de papel, la despliega y muestra el rectángulo original; ver Gráfico 31) *Entonces tenían el rectángulo AEFD y ustedes hicieron esto* (procediendo a doblar el papel a través de la diagonal AF) *¿verdad? Eso es lo que estamos viendo ahorita. El doblez, ese primer doblez que hicieron.*

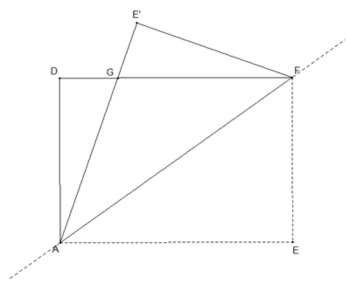


Gráfico 31. Doblez a través de la diagonal AF, donde G es el punto de intersección de los segmentos AE' y DF, siendo E' la imagen simétrica del punto E.

CG: Determinando así esta superposición un punto G, que es donde se intersecan el segmento AE' y el segmento DF. Luego, se vuelve a trazar una recta que pase por los puntos A y E,' denominada R, como pueden observar se forman los triángulos E'GF y DGA de tal manera que se seleccionan para poder hacer uso de la simetría axial y se vuelve a hacer uso, en este caso, del triángulo E'FG con respecto a la recta T y del triángulo DGA con respecto a la recta R (ver Gráfico 32).

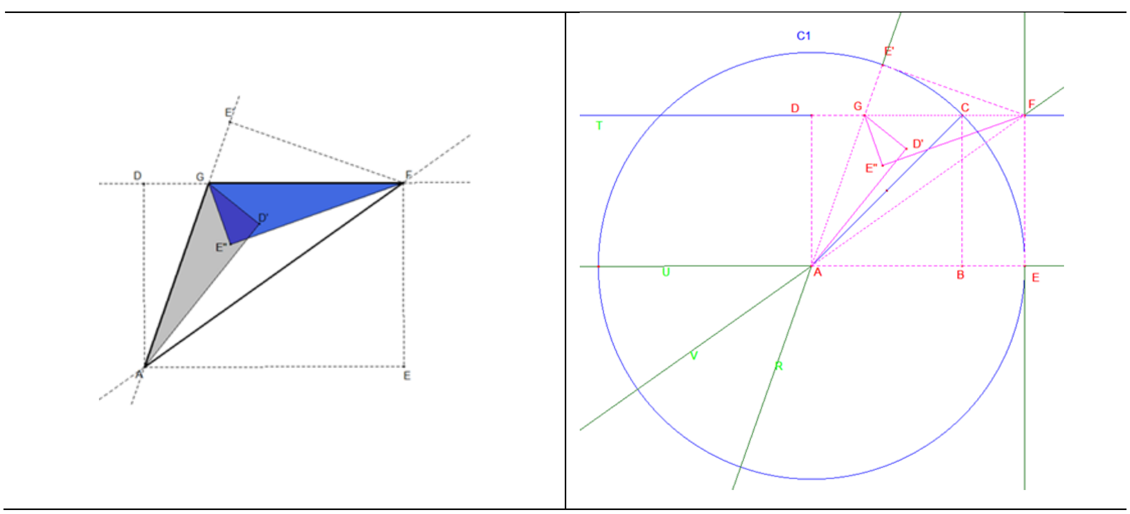


Gráfico 32. **Aplicación de la simetría axial a los triángulos E'FG y DGA con respecto a las rectas DF y AG respectivamente.**

CG: Si tienen su doblado de papel se puede observar que el procedimiento que se hizo fue amoldar esos dos triángulos sobrantes quedándonos así el triángulo AGF en este caso (ver Gráfico 33). *En este caso se presenta un problema, como decía la profesora Martha podemos tomar uno de los vértices del triángulo y llevarlo al lado opuesto y así conseguir el punto para doblar el otro lado y conseguir el pentágono regular, cuando utilizamos el Cabri no hayamos cómo encontrar ese punto porque no podemos hacer lo mismo ya que necesitamos ese eje de simetría.* (Cabe señalar que esta dificultad fue la que llevó a las integrantes del grupo nº 3 a indagar en relación con la división de un segmento en razón áurea). *¿Qué ocurre? Que en un pentágono viene implicado lo que sería la razón del número de oro …… donde explican o denominan que el número de oro, en el caso del pentágono, es aquella razón donde la diagonal entre cualquiera de los lados del pentágono es igual a 1,62 que es el valor aproximado del número Phi. Entonces la pregunta sería ¿cómo yo divido un segmento en razón áurea? En este caso, vamos a dividir los segmentos GF y AG en razón áurea. Fijen su mirada un momento en el segmento GF, trazamos la mediatriz con respecto a ese segmento determinando así el punto medio, en este caso H, luego se traza una perpendicular con respecto al segmento GF por el punto G.*

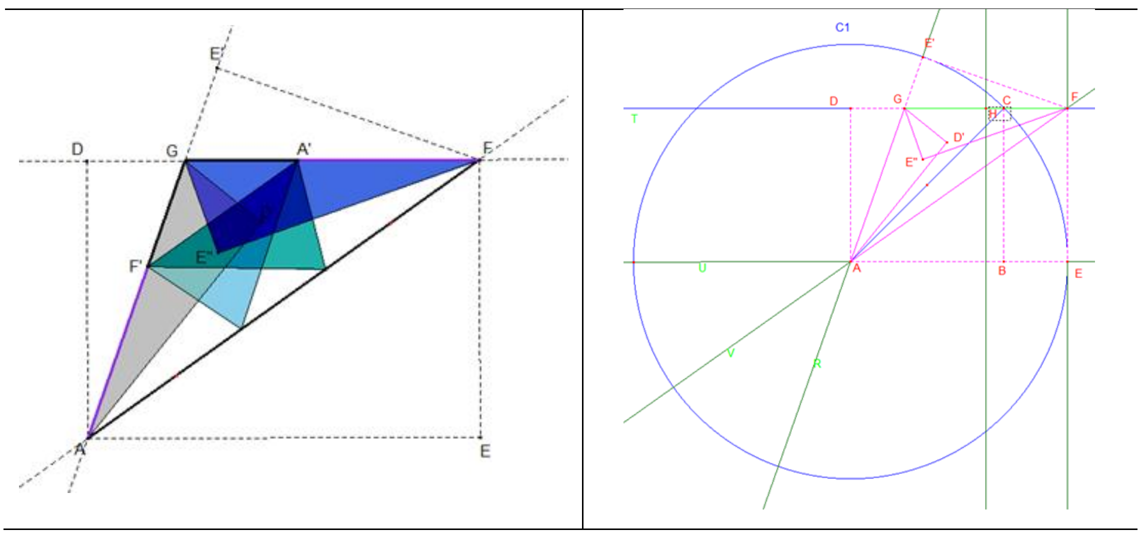


***Gráfico 33.* Obtención de un pentágono regular con doblado de papel y trazado de la mediatriz del segmento GF.**

MI: Voy a hacer una observación, esta construcción que está haciendo ahorita Carmen lo pudo haber hecho tomando un segmento y aplicar esa construcción (refiriéndose a la macro-construcción elaborada por el grupo nº 3, a partir de la construcción auxiliar dada a conocer en el Cuadro 73), *pero está explicando cómo se divide un segmento en razón áurea aplicándoselo al que necesita que sería este lado (señalando en el video el lado GF del* Δ *AGF).*

CG: Entonces, trazamos la perpendicular con respecto a la recta GF por el punto G. Luego de esto, tomando abertura GH y haciendo centro en G se traza la circunferencia C_4 *determinando así un punto de intersección denominado I con respecto a la perpendicular trazada anteriormente. Luego, tomando la abertura GI y haciendo centro en ese punto de intersección de la circunferencia* C_4 *con respecto a esta perpendicular y se traza la circunferencia* C_1 (ver Gráfico 31).

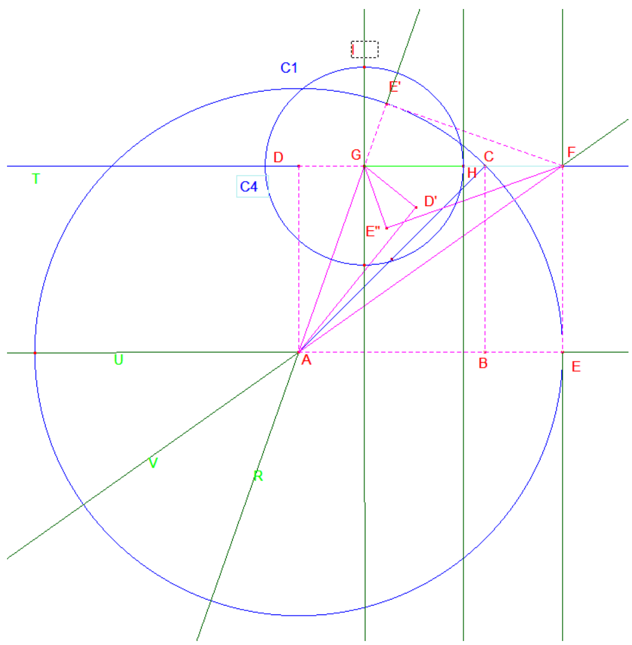


Gráfico 34. **Construcción parcial del pentágono regular.**

AO: Bueno, c sub algo.

CG: A partir de ahí trazamos una recta que pase por el punto I, ya va disculpen, la circunferencia trazada me interseca a la recta….

MI: Sigue la construcción

CG: Se traza una recta por, eh, a partir…

MI: Dale todo, porque tienes dos puntos de intersección lo que pasa es que no lo marcaste por eso es que no lo ves (se presenta un momento de confusión, ya que, no dieron nombre a un par de puntos y esto les dificultaba continuar con la descripción de la construcción del pentágono regular en un AGD).

CG: Se traza una recta que pase por el centro de la circunferencia, en este caso I, y por el punto F, intersecando la circunferencia en un punto J, de tal manera…

AO: ….la construcción del segmento solo, para que no….

CG: Si por eso…

MI: Ibas bien

CG: Es que nosotras lo teníamos aparte, por separado (refiriéndose a la construcción auxiliar descrita en el Cuadro 73).

MI: No, pero síguelo, Andrea ahí se ve, lo que pasa es que le faltaban los puntos y no tenía cómo llamarlos.

AO: Porque ahí está la construcción…

MI: Ahí lo tienes, ya lo tienes ahí. Lo que pasa es que le faltaban nombrar los puntos.

CG: (Ver Gráfico 35) *Teniendo así el punto de intersección J. así mismo, con abertura FJ y haciendo centro en F se traza la circunferencia C_3 que me corta al segmento GF en un punto denominado K.*

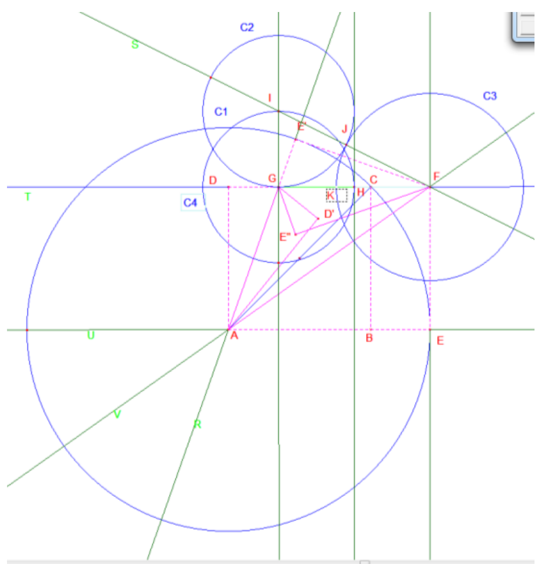


***Gráfico 35*. División del segmento GF en razón áurea.**

MI: Todo eso que hizo ahorita, es para conseguir este punto. Este punto divide a este segmento en dos segmentos que satisfacen la razón áurea o que está en razón áurea. Eso es lo que está diciendo, el mayor con respecto al menor.

CG: De todas maneras si da tiempo tenemos la construcción aparte de cómo dividir el segmento en razón áurea. Creándose así el punto H, siendo GH un segmento (ver Gráfico 36)

MI: Miren, este que tienen aquí, el GH (mostrando la construcción con doblado de papel y la construcción con el Cabri).

CG: Y el otro segmento que sería HF. ¿Qué es lo que explica la razón áurea? Que el segmento HF entre el segmento menor que en este caso en GH es igual a 1,62. Luego, se realiza el mismo procedimiento con el otro lado del triángulo en este caso GA, el mismo procedimiento primero la mediatriz, luego la perpendicular con respecto a ese segmento, se determinan los puntos de intersección y así encontramos el segmento GK' y el segmento AK' que cumple con la razón áurea, en este caso sería AK' entre K'G.

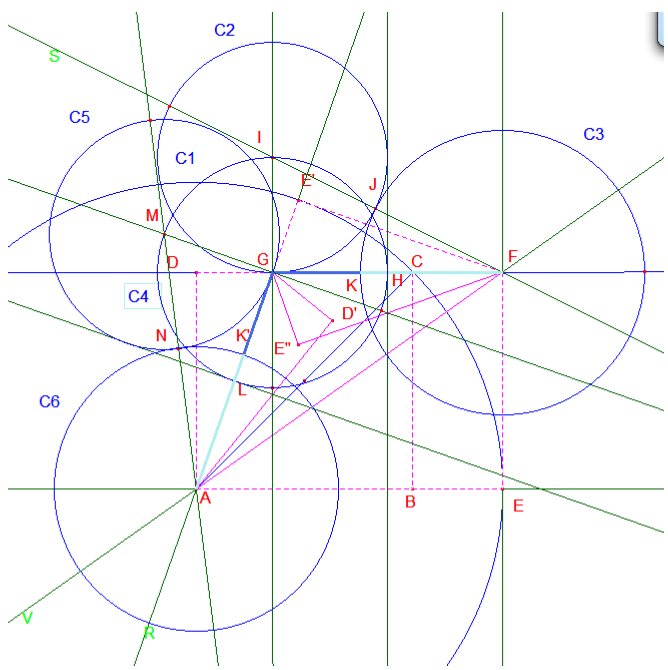


***Gráfico 36*. División del segmento AG en razón áurea.**

CG: Luego de esto, como se pueden dar cuenta, la circunferencia C_6 y C_3 a pesar de determinar el punto que en este caso me determinan los dos segmentos con razón áurea también me intersecan a la diagonal AF, en este caso el otro lado del triángulo que sería la base (ver Gráfico 37). *Esos puntos de intersección representan los otros puntos faltantes del pentágono, es decir, los vértices; por lo tanto, ya se haya que G, K', O, P y K representan los vértices del pentágono, se trazan los segmentos y se obtiene el pentágono regular. Así se determina el pentágono regular* (ver Gráfico 29).

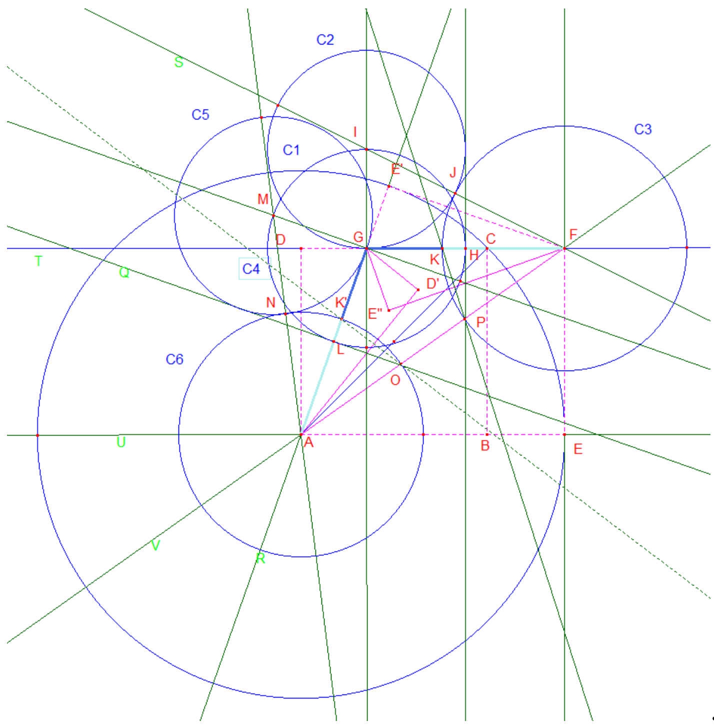


Gráfico 37. **Obtención de los vértices O y P del pentágono regular GK'OPK.**

MI: ¡Miren dónde corta! Corta aquí (señalando en la pantalla el punto P, punto de intersección de la mediatriz del segmento GF con la diagonal AF del rectángulo AEFD), *¿qué es esto?* (Señalando nuevamente en la pantalla).

CG: La mediatriz.

AO: Esto es el cuadrado.

MI: Esta es la diagonal del rectángulo original. Con respecto a esto, es la mediatriz …

CG: Del segmento GF

MI: Es decir que ya sé cómo lo puedo hallar sin trazar tantas circunferencias

CG: Si, pero eso fue después de bastantes circunferencias. Entonces, ¿qué ocurre con esta construcción? (Pausa) *¿Qué ocurre con esta construcción? Como lo explicó la profesora Martha, como se está trabajando, en este caso, con números que son decimales se llega es a una aproximación. Lo único que se puede verificar es que el segmento GK' y el segmento GH son congruentes ya que se dividió por medio de la razón áurea. Y así mismo, los segmentos K'O, IH, IP son congruentes entre sí porque fueron determinados por radios de iguales circunferencias* (Aquí comienzan a justificar teniendo en cuenta las relaciones existentes entre los objetos que conforman la construcción que los lados del pentágono son congruentes entre sí).

OB: ¿Ahora qué?

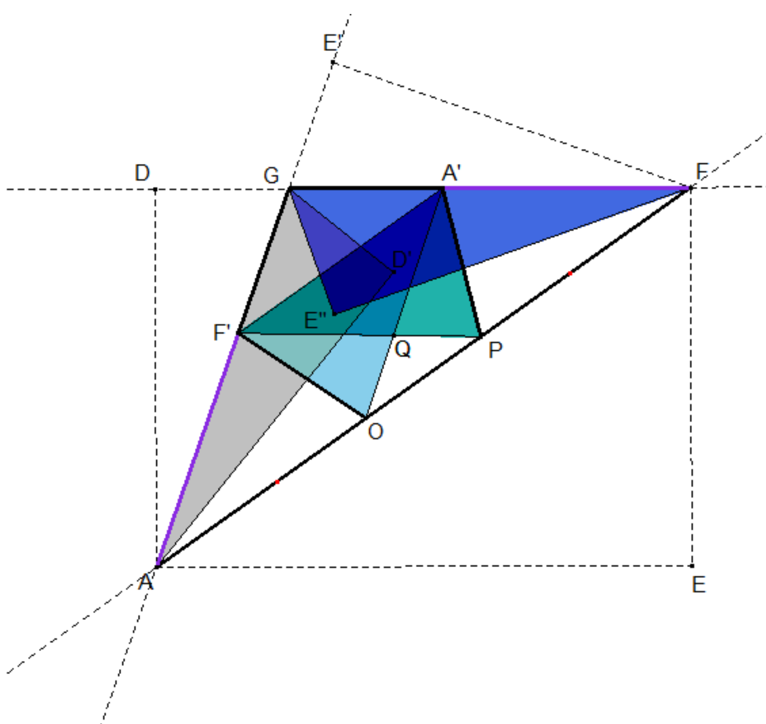


Gráfico 38. **Construcción del pentágono regular con doblado de papel.**

CG: Si me prestan un momento el papel (ver Gráfico 38)*, cuando se halló… En el caso del papel cuando se construye el pentágono, si se pueden dar cuenta, <u>uno de los lados del triángulo</u>* (señalando el Δ AFG en el video) *¿va a formar parte de qué? De una de las diagonales del pentágono* (indicando el segmento F'A'). *Por esto, es necesario para la construcción en el Cabri, la división del segmento en razón áurea* *porque uno de los lados del triángulo va a tener la misma medida que la diagonal del pentágono construido* (hay cierta imprecisión en la información, lo que sucede es que AF' contenido en el lado AG tiene la misma medida de una de las diagonales del pentágono; en este caso, F'A').

*Haciendo más cosas que se pueden hacer por medio de la construcción en cuanto a los dobleces se determina un paralelogramo si se dan cuenta después de realizar todos los dobleces, en este caso, este así (*muestra el cuadrilátero A'GF'Q*) se determinan paralelogramos* (aquí muestra los trapecios A'GF'P y A'GFO). *Entonces, se podría decir que este triángulo está formado por un paralelogramo A'GF'Q, dos triángulos (Δ F'OQ y Δ A'PQ) y un triángulo que me queda en la base que sería uno pequeño que es este que está aquí (*y lo señala en la figura realizada en el Cabri, Δ OPQ). *Si lo pueden ver en el doblez, tienen primero este triángulo pequeño ¿cierto? (señalado en el video). Luego, si se hace simetría con respecto a la diagonal del pentágono se dobla, resulta y acontece que la punta del pentágono me va a tocar exactamente la punta del triángulo pequeño que hallamos. Quiere decir que el triángulo está formado además de eso por dos triángulos congruentes. Si lo ven de esta manera, olvidándonos un momento de este pedazo, ¿tienen un qué?* (Se observa que con el doblado de papel comienzan a identificar otras figuras geométricas que intervienen en la construcción del pentágono, aunque no las hayan construido en forma explícita).

SR: Un paralelogramo.

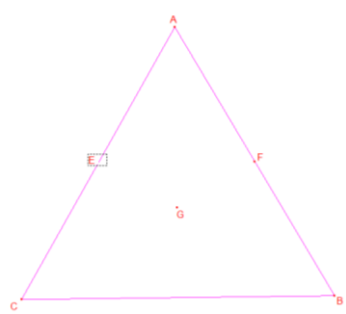
CG:Un paralelogramo exactamente. Es decir, que se nos forman dos paralelogramos, cada uno de los triángulos y me quedaría el triángulo original con el que se realiza el pentágono.

En esta interacción entre la facilitadora y los integrantes del grupo nº 3 y de ellos con sus compañeros, se observa la intención de ir relacionando ambas maneras de construir un pentágono y, de esta manera, ir visualizando ciertas relaciones geométricas entre los objetos que intervienen, hasta llegar a entender que se pudiera simplificar la construcción con regla y compás, cuando se percataron que los puntos

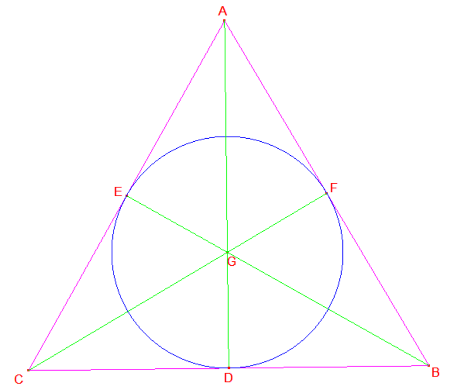
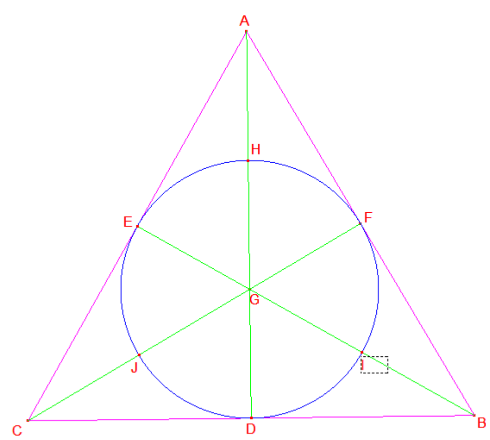
O y P se obtienen con la intersección de las mediatrices de los segmentos AG y FG respectivamente con la diagonal AF del rectángulo AEFD.

El grupo nº 4 decidió construir un hexágono regular, a partir de un triángulo equilátero; en el Cuadro 75, se describe el procedimiento empleado.

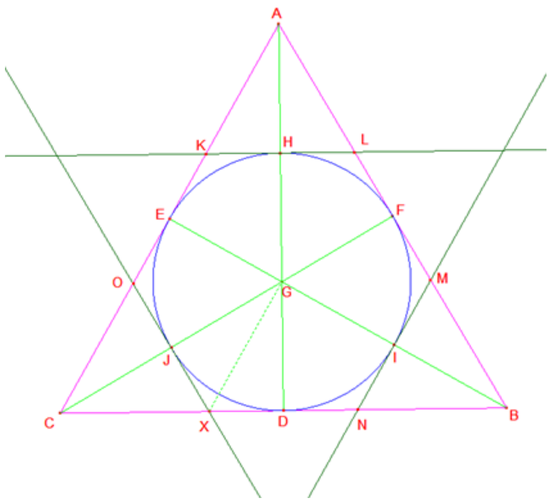
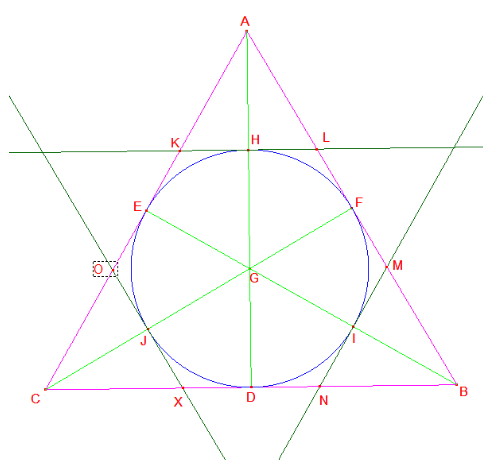
Cuadro 75
Construcción de un hexágono por parte del grupo nº 4

Procedimiento	Herramientas empleadas
Sea Δ equilátero ABC, luego se ubica el punto medio de los lados AB, BC y CA, y se denominan F, D y E correspondientemente	Punto Sistema de coordenadas: _ G Punto A Punto B Punto (Vértice de un polígono regular): G, A C Punto (Vértice de un polígono regular): B Polígono regular (Polígono regular): A, B, C F Punto (Punto medio): _ E Punto (Punto medio): _ D Punto (Punto medio): _
	**Nota:** Trazan el triángulo equilátero ABC, haciendo uso de la herramienta polígono regular de n lados, con n = 3. Luego, determinan los puntos medios F, E y D de los lados AB, AC y BC respectivamente.
Ahora se traza un segmento desde los ángulos con vértices A, B y C, hasta el punto medio de su lado opuesto, teniendo así las medianas AD, BE y CF, además dichas medianas concurren en un punto denominado Baricentro, el cual denotaremos con la letra G. Se traza una circunferencia con radio GD, y con centro en el punto G.	Segmento: A, D Segmento: B, E Segmento: F, C Círculo: G, F

Cuadro 75 (cont.)

	**Nota:** Seguidamente trazan las medianas AD, BE y CF del Δ ABC y destacan que las medianas del Δ ABC concurren en un punto G llamado baricentro, el cual en función de la construcción inicial coincide con el centro del polígono regular de tres lados. Luego, trazan la circunferencia con centro en G y que pasa por F, punto medio del lado AB.
Procedimiento	**Herramientas empleadas**
Se ubican los puntos de corte de dicha circunferencia con las medianas, los cuales llamaremos H, I y J	Punto (Punto(s) de intersección): _, _ H Punto (Punto(s) de intersección): _, _ J Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ I Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	**Nota:** Determinan los puntos de intersección H, I y J de las medianas AD, BE y CF con la circunferencia C (G, GF).
Procedimiento	**Herramientas empleadas**
Trazar una recta paralela al CB, por el punto H. Se ubica el punto I y por este se traza una recta paralela al CA, por último por el punto J se traza una recta paralela al AB.	Recta (Recta perpendicular): J, _ Recta (Recta perpendicular): H, _ Recta (Recta perpendicular): I, _

Cuadro 75 (cont.)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nota: Por I, trazan una recta perpendicular a CF; por H, una recta perpendicular a AD y por I, una perpendicular a BE. Sin embargo, en la descripción, señalan que por H, trazan una paralela a CB; por I, una paralela a CA y por J, una paralela a AB. Pudiera demostrarse, por ejemplo, que la recta perpendicular a AD en H, es paralela al segmento CB. Y así en los otros dos casos.</td>
</tr>
<tr>
<th>Procedimiento</th>
<th>Herramientas empleadas</th>
</tr>
<tr>
<td>Se ubican los puntos de corte entre las rectas paralelas y los lados del triángulo, y los denominaremos K, L, M, N, X y O</td>
<td>L Punto (Punto(s) de intersección): _, _
K Punto (Punto(s) de intersección): _, _
M Punto (Punto(s) de intersección): _, _
N Punto (Punto(s) de intersección): _, _
X Punto (Punto(s) de intersección): _, _
O Punto (Punto(s) de intersección): _, _
Segmento: X, G
Segmento: G, N
Segmento: M, G
Segmento: G, L
Segmento: G, K
Segmento: G, O</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nota: Determinan los puntos de intersección de las rectas trazadas con los lados del triángulo ABC, los cuales serán los vértices del hexágono. Hasta aquí ya construyeron el hexágono LKMNXO. Sin embargo, tratan de mostrar la relación con la construcción realizada con doblado de papel, empleando la simetría axial. Así, por ejemplo, señalan que los triángulos KLG, GOX y NMG son las correspondientes imágenes simétricas de los triángulos KLA, COX y NMB con respecto a las rectas KL, OX y NM.</td>
</tr>
</table>

Cuadro 75 (cont.)

Procedimiento	Herramientas empleadas
Por simetría axial considerando Δ AKL con respecto KL, se genera Δ GLK, nuevamente por simetría axial consideremos Δ BMN con respecto MN, estableciéndose Δ GMN, con simetría axial tomando Δ CXG con respecto XO, se crea Δ GOX. Una los puntos K, L, M, N, X y O, así se tienen los segmentos: KL, LM, MN, NX, XO y OK, formándose un hexágono regular KLMNXO, de esta manera se establecen también Δ GLM, ΔGNX y Δ GOK.	Triángulo: K, L, G Triángulo: G, K, O Triángulo: G, O, X Triángulo: G, X, N Triángulo: N, M, G Triángulo: G, M, L Triángulo: K, L, A Triángulo: O, C, X Triángulo: M, B, N Polígono: K, L, M, N, X, O Recta: O, M Recta: L, X Recta: K, N Polígono: M, O, K, L Punto (Simetría axial): M, _ Punto (Simetría axial): O, _ Punto (Simetría axial): K, _ Punto (Simetría axial): L, _ Polígono: _, _, _, _ Polígono: K, N, M, L Punto (Simetría axial): K, _ Punto (Simetría axial): N, _ Punto (Simetría axial): M, _ Punto (Simetría axial): L, _ Polígono: _, _, _, _ Polígono: L, X, O, K Punto (Simetría axial): L, _ Punto (Simetría axial): X, _ Punto (Simetría axial): O, _ Punto (Simetría axial): K, _ Polígono: _, _, _, _ Punto (Simetría axial): _, _ Punto (Simetría axial): _, _ Punto (Simetría axial): _, _ Punto (Simetría axial): _, _ Polígono: _, _, _, _ Punto (Simetría axial): _, _

Nota:

Trazan las rectas OM, LX y KN y el polígono MOKL y hallan su imagen simétrica con respecto a la recta OM, la cual es el polígono MOXN.

Trazan el polígono KNML y hallan su imagen simétrica con respecto a la recta KN, la cual es el polígono KMXO.

Trazan el polígono LXOK y hallan su imagen simétrica con respecto a la recta LX, la cual es el polígono LXNM.

Ver Gráfico 34.

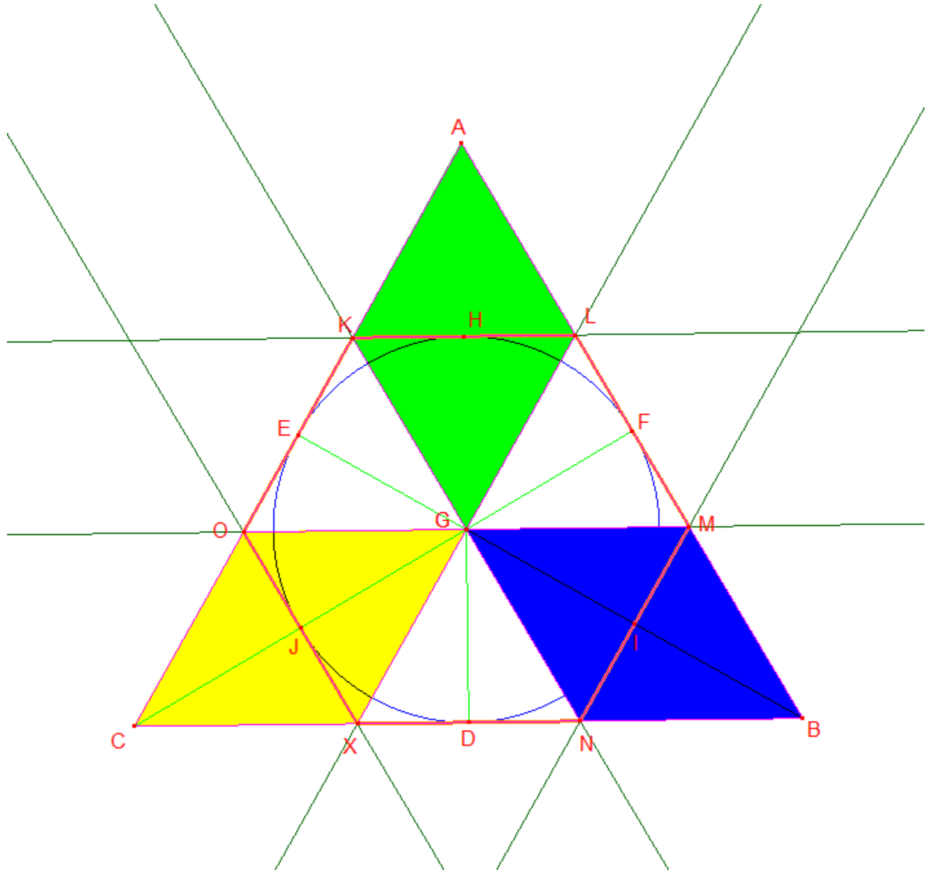


Gráfico 39. **Construcción de un hexágono realizada en un AGD por el grupo nº 4**.

En la exposición oral, destacan que los polígonos MOKL, MOXN, KNML, KMXO, LXOK y LXNM son trapecios y que cada uno de ellos está formado por tres pares de triángulos congruentes entre sí. Estas relaciones las emplean para establecer que el hexágono está formado por seis pares de triángulos congruentes entre sí y que, por PCTC, los lados del hexágono son congruentes entre sí y, por tanto, es un hexágono regular (ver Gráfico 36). Además, durante el desarrollo de la exposición, establecieron ciertas semejanzas entre la figura construida y algunos logos comerciales o señales de peligro, como se evidencia en la transcripción del siguiente diálogo:

SR: Por simetría axial considerando este triángulo, el triángulo GKL, respecto al eje KL, obtenemos el triángulo AKL. Luego trazamos los segmentos KL, *determinando el polígono KLMNXO; en este caso podemos decir que el polígono es un hexágono* (En la primera parte de la construcción logran construir un hexágono KLMNXO). *Por simetría axial trazamos la recta OM y consideremos el trapecio MNXO con respecto a la recta OM y nos damos cuenta que cuando trabajamos la simetría axial, la imagen simétrica seria el trapecio OMLK y si nos fijamos bien podemos ver que hay tres triángulos arriba y tres triángulos abajo que cuando hacemos la simetría se superpones eso triángulos y serian congruentes* (Visualizan que el hexágono KLMNXO está formado por dos trapecios MNXO y MLKO y, además, que si consideran a la recta OM como eje de simetría MLKO es la imagen simétrica de MNXO; asimismo que cada uno de estos trapecios está conformado por tres triángulos). *Ahora si consideramos otra simetría axial con respecto al trapecio OKLX se tiene que la imagen simétrica es el trapecio LMNX, nuevamente tendríamos tres pares de triángulos congruentes y por últimos hacemos otra simetría axial con el trapecio KLMN con respecto a la recta KN y vendría siendo el trapecio KOXM* (proceden por analogía), *estableciendo las relaciones entre las simetrías axiales y los lados congruentes, podemos decir que los seis segmentos son congruentes entre sí, por lo tanto tenemos que es un hexágono regular* (se observa que combinaron las relaciones establecidas entre los objetos geométricos cuando trabajaron con doblado de papel y las propiedades de la simetría axial como una de las isometrías en el plano; es decir, la imagen simétrica de una figura es congruente con la figura original).

Algo importante que le comentamos a la profesora al terminar la construcción eran las diversas figuras que se observaban en la construcción. ¿Que figuran ven ustedes allí?

AO: Es una estrellas de…

SR y KV: No.

AO: Es un logo de la Chevrolet

SR: No

ER: Es el logo de la Mitsubishi

SR: Si ese mismo.

KV: ¿Lo que está en blanco que significa?

CG: Es el símbolo de peligro en varias reacciones químicas.

SR: Al ver estas relaciones podemos darnos cuenta que varios logos y símbolos que observamos en la vida son construcciones geométricas, no que se dan a la intemperie

MI: ¿No sé lo que quieres decir con intemperie? ¿Es que no sale improvisado?

CG: Lo que quiere decir es que no salen de la nada.

OB: Tienen consistencias geométricas, matemáticas…

KV: Profesora y además las medianas siguen siendo la medianas de los triángulos isósceles anteriores al triangulo original (refiriéndose al hecho que las medianas de los seis triángulos que conforman el hexágono están contenidas en las medianas del triángulo equilátero ABC).

En el informe escrito presentaron la siguiente prueba:

*Para demostrar que (**el hexágono**) KLMNXO es regular, por simetría axial consideremos (**el cuadrilátero**) OMLK, con respecto (**a la recta**) OM, se crea (**el cuadrilátero**) OMNX, de esta manera podemos deducir que* $\Delta\ GOK \cong \Delta\ GXO$, $\Delta GLK \cong \Delta\ GXN$, $\Delta GML \cong \Delta GNM$, *nuevamente por simetría axial consideremos (**el cuadrilátero**) XLKO, con respecto (**a la recta**) XL, se crea (**el cuadrilátero**) XLMN, de esta manera podemos concluir* $\Delta GXO \cong \Delta GNX$, $\Delta GOK \cong \Delta GMN$, $\Delta GLK \cong \Delta GML$, *posteriormente por simetría axial consideremos (**el cuadrilátero**) KNML, con respecto (**a la recta**) KN, se crea (**el cuadrilátero**) KNXO, de esta manera podemos desprender que* $\Delta GKL \cong \Delta GKO$, $\Delta GLM \cong \Delta\ GXO$, $\Delta GNM \cong \Delta GNX$. *Estableciendo relaciones entre las congruencias primeramente constituidas, se tiene que:* $\Delta GLK \cong \Delta GML \cong \Delta\ GNM \cong \Delta\ GXN \cong \Delta\ GOX \cong \Delta\ GKO$, *y por PCTC,* $KL = LM = MN = NX = XO = OK$, *quedando demostrado de esta manera que (**el hexágono**) KLMNXO es regular*. (Negritas añadidas para facilitar la lectura).

En esta prueba se observa que la congruencia entre los seis triángulos que conforman el hexágono regular no la establecieron aplicando alguno de los criterios conocidos, sino por la congruencia entre un triángulo y su imagen simétrica con respecto a un eje dado. Posiblemente, si previamente no hubieran trabajado con el doblado de papel, los integrantes del grupo nº 4 no hubieran seguido esta idea.

En cuanto a la construcción del hexágono regular con doblado de papel, el procedimiento fue presentado previo a la anterior, sólo en forma oral y no por escrito como se hizo con su construcción con Cabri II.

KV, partiendo de un triángulo equilátero ABC, con doblado de papel, determina los puntos medios D, E y F de los lados BC, BA y AC respectivamente; de modo que los dobleces AD, BF Y CE sean las medianas del triángulo ABC (ver Gráfico 40).

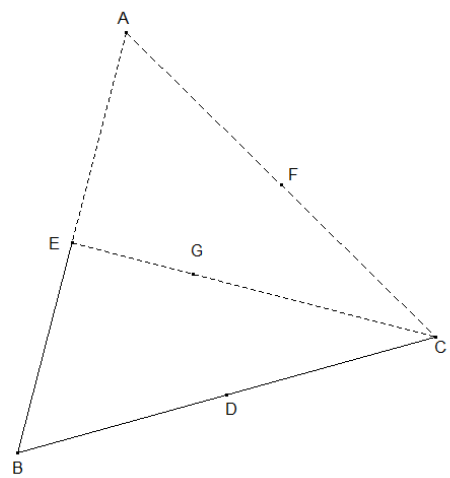


***Gráfico 40.* Primer doblez, haciendo coincidir el vértice A con el B, para obtener la mediana CE.**

KV: Comenzamos con un triángulo equilátero e identificamos los vértices del triángulo como A, B y C. En el segmento AB, buscaremos el punto medio, <u>es decir</u> (**para hallar**) *<u>la mediana,</u> al hacerlo doblaremos el papel por los vértices A y B, en el cual tendremos un triángulo rectángulo; ahí tenemos el punto medio del lado BA que lo identificaremos como E. Al doblar queda la marca de un segmento desde el punto C hasta el punto medio del lado opuesto, este será E, punto medio del lado BA. Igualmente hacemos el mismo procedimiento cuando unimos el vértice A con el vértice C, ahí identificaremos el punto medio como F. Ahora trazaremos un segmento de B con el punto medio F y haremos lo mismo con el segmento BC cuyo punto medio será D y trazamos un segmento desde B hasta D.*

MI: Interviene para hacer una aclaratoria: *Una observación, cuando dices que* *trazamos un segmento desde un punto a otro, no es trazamos porque no estamos usando un lápiz, estamos doblando el papel por esos puntos; sería solamente doblando el papel hacemos coincidir un punto con otro, las marcas en el papel son dobleces.*

KV: Ahora se formaron tres dobleces, donde hay un punto de intersección G (baricentro). Luego unimos cada uno de los vértices del triángulo con el punto G, obteniendo el hexágono. Estos dos triángulos uno arriba del otro lo podríamos llamar por simetría axial (señalando los triángulos).

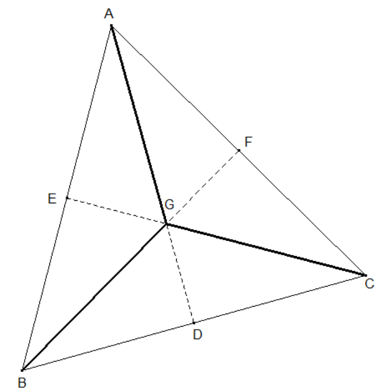
Cabe decir que la expresión subrayada fue interpretada por algunos participantes de la manera que se ilustra en el Gráfico 41 (fila superior); sin embargo, cuando KV procedió a efectuar los dobleces, se percataron que el asunto era hacer coincidir cada uno de los vértices del Δ ABC con su baricentro (fila inferior del Gráfico 41). Asimismo, se dio una discusión en relación con el significado de los términos "simetría axial" y "superposición de figuras" como se muestra a continuación:

GG: KV, por simetría axial no, por superposición.

*MI: Vamos a discutir eso. Cuando KV hace el doblado de papel, el triángulo que se formó al hacer el doblado (*mostrando el triángulo AKL)*, se coloca sobre el triángulo o se superpone sobre el triángulo GKL; éste sería la imagen simétrica del triángulo AKL.*

GG: ¿Y eso se dice así: La imagen simétrica?

MI: Sí, cuando se aplica la simetría axial a una figura lo que se obtiene, es su imagen simétrica; obviamente cuando yo trabajo con doblado de papel y superpongo una figura con otra, podemos hablar de la superposición de figuras. Entonces imagínense que existe un triángulo que es la imagen simétrica de otro y este triángulo lo superpongo sobre el otro. En ese sentido ambos tienen razón, lo cierto es que cuando obtengo una imagen simétrica es por una simetría axial y cuando comparo una figura con otra lo puedo hacer por superposición; espero que esto aclare esta discusión (esto se considera clave para entender la equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura geométrica).



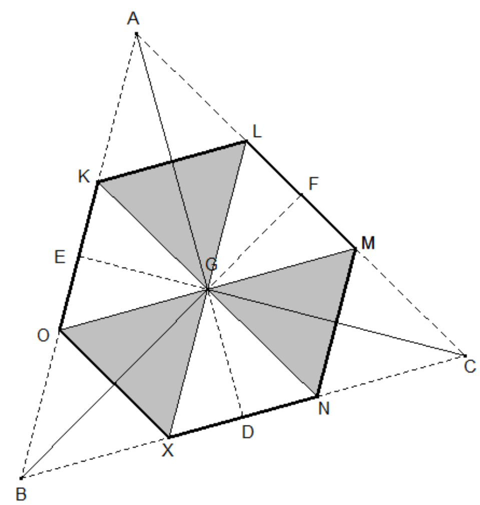


Gráfico 41. **Interpretación de la expresión "unimos cada uno de los vértices del triángulo con el punto G (baricentro del ∆ ABC) y lo que realmente se hizo**

Finalmente, KV denota los vértices del hexágono y, luego, pregunta: ¿cómo sabemos si es un hexágono regular? De esta manera, la exposición se centra en tratar de dar una justificación:

KV: Ahora tomaremos el vértice A e identificaremos los puntos de intersección como K y L.

SR: Es decir, los vértices del hexágono.

KV: Los vértices del hexágono serian K, L, M, N, X y O. Ahora ¿Cómo sabemos si es un hexágono regular? Tenemos que hacer simetrías axiales, doblar el hexágono por la mitad (en el Gráfico 42, se ha considerado el segmento KN) *y observamos que los lados son congruentes entre sí* (KO = KL, OX = LM y NX = NM). *Así con cada vértice* (en pantalla señala los segmentos LX y MO) *y se llega a que los lados son congruentes entre sí. Además podemos ver cómo se forma un trapecio isósceles. Hicimos tres simetrías. Por lo tanto, el hexágono es regular por tener todo sus lados congruentes* (ver Gráfico 42).

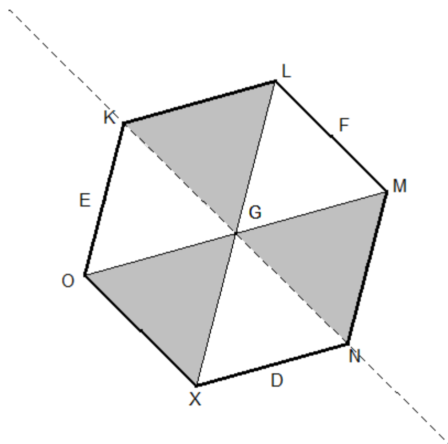


***Gráfico 42.* El segmento KN es un eje de simetría del hexágono regular KLMNXO y lo descompone en dos trapecios.**

Se observa como el grupo nº 2 se centró en una idea clave cuando se trabaja con doblado de papel, dos figuras geométricas son congruentes, si al superponerse coinciden (sin que sobre, ni falte algo).

El grupo nº 5 optó por una construcción relativamente sencilla en comparación con las anteriores: construir un triángulo isorrectángulo, a partir de un rectángulo ABCD. Para ello, partiendo de una hoja de papel (tamaño carta), hicieron coincidir el lado más corto sobre el más largo; en el Gráfico 43, se hace coincidir el lado AD con el lado AB, obteniéndose dos segmentos AE y FE tales que AD = AE y DF = EF. Así, eliminando el rectángulo BCFE, tienen el cuadrado AEFD, el cual la diagonal

AF lo descompone en dos triángulos isorrectángulos; doblando el papel a través del segmento AF, obtienen el triángulo isorrectángulo AEF.

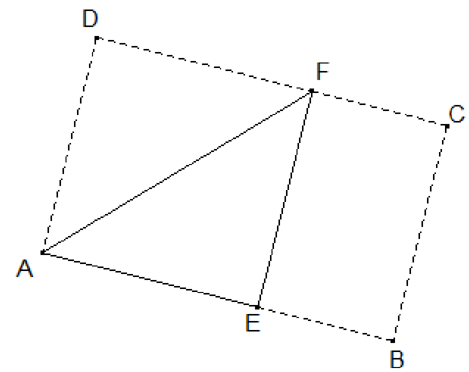


Gráfico 43. **Construcción de un triángulo isorrectángulo con doblado de papel.**

En el Gráfico 44, se muestra la construcción de un triángulo isorrectángulo, a partir de un cuadrado, en un AGD; dicha construcción se centró en la construcción del cuadrado ABCD, a partir del lado AB y, luego, trazando una de sus diagonales, descomponerlo en dos triángulos congruentes, los cuales son isorrectángulos (ver Cuadro 76). Nótese que la descripción del procedimiento más bien fue una justificación basada en un recuento de los pasos realizados y las relaciones geométricas que lograron establecer.

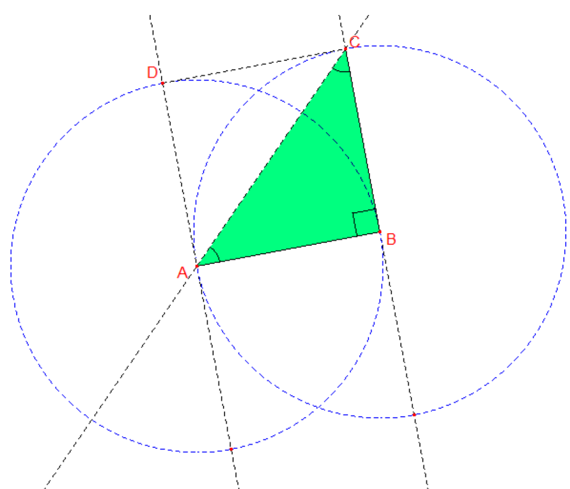


Gráfico 44. Construcción de un triángulo isorrectángulo en un AGD.

Cuadro 76
Construcción de un triángulo isorrectángulo en un AGD

Procedimiento	Herramientas empleadas
Tenemos el cuadrado□ ABCD. Sabemos, por propiedades del cuadrado, que AB=BC=CD=DA *Y, además que, los ángulos ∢DAB, ∢ABC, ∢BCD y ∢CDA son todos rectos; es decir miden 90°.*	Punto Sistema de coordenadas: _ A Punto B Punto Segmento: A, B Recta (Recta perpendicular): A, _ Recta (Recta perpendicular): B, _ Círculo: A, B Círculo: B, A Punto (Punto(s) de intersección): _, _ D Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ C Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Segmento: D, C
Trazamos el segmento AC que es una de las diagonales del cuadrado. *La diagonal AC descompone al cuadrado ABCD en dos triángulos ΔABC y ΔCDA, por propiedad de paralelogramos.* *Siendo el segmento AC congruente consigo mismo, por identidad. El triángulo ABC es congruente con el triángulo CDA (ΔABC≅ΔCDA), por criterio de congruencia de triángulos LLL.*	Segmento: A, C
Al hacer la simetría axial <u>con respecto al ΔABC</u>, siendo el eje de simetría la recta AC, tenemos que el ΔABC coincide con el ΔCDA. Nota: Hallan la imagen simétrica del Δ ABC con respecto a la recta AC.	Triángulo: C, B, A Recta: C, A Punto (Simetría axial): C, _ Punto (Simetría axial): B, _ Punto (Simetría axial): A, _ Triángulo: _, _, _
Trabajaremos con el triángulo ΔABC. Nótese que los segmentos AB y CB son congruentes, por ende el ΔABC en isósceles. Asi el <CAB ≅<BCA, por ser ángulos en la base de un triángulo isósceles.	ángulo: B, C, A ángulo: B, A, C ángulo: C, B, A
En conclusión el ΔABC es iso- rectángulo.	

Como cierre se comentó sobre el aprovechamiento didáctico de una construcción relativamente sencilla en una clase de Matemática en 1er año de educación media, para reconocer los elementos de triángulos y cuadriláteros y sus atributos relevantes.

Una vez analizadas las producciones de los equipos en el Taller nº 2 sobre construcciones geométricas con doblado de papel y en un AGD y, en función de los objetivos específicos de esta investigación, pudiera decirse que, en cuanto al uso técnico del Cabri II, los profesores en formación emplearon las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás (**UT.1**), así como para mejorar la apariencia de la figura en pantalla (**UT.3**); en cuanto al empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman una construcción (**UT.2**), a diferencia de lo encontrado en el Taller nº 1 cuando se limitaron a medir ángulos o la longitud de un segmento, hicieron uso del *botón simetría axial*, para verificar la congruencia entre figuras geométricas. Quizá esto se debió al trabajo realizado con doblado de papel, donde la congruencia entre dos figuras geométricas se estableció por superposición y su equivalente en un AGD es obtener su imagen simétrica, donde el eje de simetría se relaciona con el doblez.

En relación con el uso heurístico, los cinco grupos lograron construir la figura solicitada, a partir de las condiciones iniciales (**UH.1**), así como reconocer relaciones entre los objetos que la conformaban, especialmente establecieron relaciones de congruencia entre una figura y su correspondiente imagen simétrica (**UH.2**). En los informes escritos, no formularon de forma explícita conjetura alguna (**UH.3**); sin embargo, durante el desarrollo de las exposiciones visualizaron ciertas relaciones entre los objetos geométricos involucrados en las construcciones de un pentágono regular (el punto P es la intersección de la mediatriz del segmento GF con la diagonal AF del rectángulo AEFD) o de un hexágono regular (las medianas de los seis triángulos congruentes que conforman el hexágono regular están contenidas en las medianas del triángulo equilátero ABC); asimismo fueron capaces de validar las construcciones realizadas (UH.4), no sólo con el Cabri II, sino también con doblado de papel; en el Cuadro 77, se muestra una síntesis sobre los usos del Cabri II en el Taller nº 2.

Cuadro 77
Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller nº 2

Usos del Cabri II	Indicadores	G1	G2	G3	G4	G5
Uso Técnico (UT)	1. Empleo de las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás.	3	3	3	3	3
	2. Empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman tal construcción.	2	2	2	2	2
	3. Empleo de herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla.	3	3	3	3	3
Uso Heurístico (UH)	1. Construcción	3	3	3	3	3
	2. Exploración	3	3	3	3	3
	3. Formulación de conjeturas	1	1	2	2	1
	4. Validación	2	2	2	3	2

Nota: Se ha empleado una escala cualitativa de alto (3), medio (2) y bajo (1) para valorar los usos del Cabri II

Para clasificar las justificaciones dadas por cada uno de los grupos en las actividades analizadas, se ha tenido en cuenta los criterios establecidos en los Cuadros 38 y 39.

Los grupos nº 2 (construcción de un triángulo equilátero) y 3 (construcción de un pentágono regular) dieron *explicaciones*, teniendo como referencia ciertas relaciones geométricas existentes entre los objetos que intervienen en estas construcciones y algunas definiciones y propiedades conocidas, tales como: (a) Un triángulo es equilátero si sus tres lados tienen igual longitud; (b) Una mediana de un triángulo equilátero lo descompone en dos triángulos 30 – 60 – 90 congruentes entre sí (ver Gráfico 45); (c) Dos figuras son congruentes, si al superponerse coinciden; (d) las mediatrices de los lados de un pentágono regular lo descomponen en dos mitades simétricas (ver Gráfico 28).

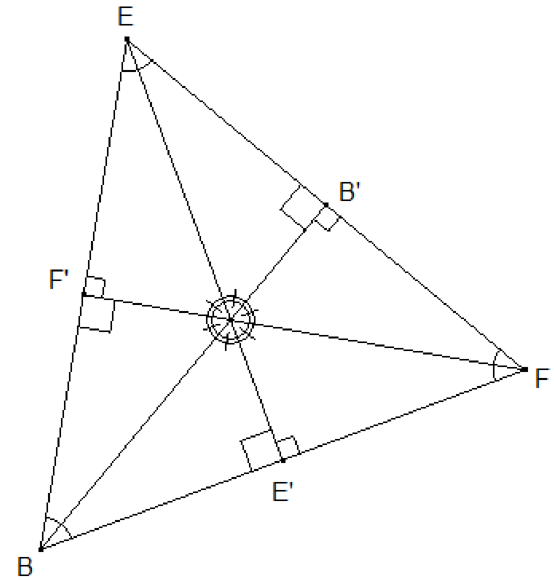


***Gráfico 45*. Descomposición de un triángulo equilátero en seis triángulos congruentes.**

Así, por ejemplo, el grupo nº 2 justifica que el triángulo BEF es equilátero, ya que, sus medianas lo descomponen en seis triángulos congruentes; para ello, efectúan varios dobleces a través de las medianas hasta que quedan superpuestos (ver Gráficos 45 y 46).

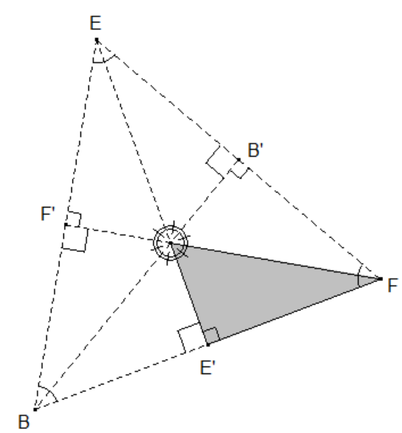


***Gráfico 46*. Congruencia por superposición.**

El grupo nº 3 explicó que el pentágono A’GF’BC es regular porque al hacer coincidir dos vértices consecutivos, el doblez obtenido es la mediatriz del lado determinado por tales puntos y los lados al suponerse coinciden y, por tanto, son congruentes entre sí (ver Gráfico 28); cuando realizaron la construcción con el Cabri II, reconocieron que GA = GF y, como los puntos K y K' dividen en razón áurea a los segmentos GF y GA respectivamente, se llega a que GK = GK' (dos de los lados del pentágono); pero retoman la justificación valiéndose del doblado de papel.

En los grupos nº 2 y 3 se observa el uso de un *esquema de argumentación fáctico*, basado en el recuento de los procedimientos empleados, junto con un *esquema de argumentación empírico*, ya que, ambos grupos efectuaron la verificación empírica de relaciones de congruencia entre figuras geométricas por superposición.

Los grupos nº 1, 4 y 5 presentaron *pruebas* que sirvieron para garantizar la consistencia de las correspondientes construcciones. El grupo nº 1 inició la prueba, haciendo coincidir los vértices B y D del cuadrado original con el punto O (ver Gráfico 24), con el propósito de superponer los triángulos EDH y EOH, así como los triángulos FBG y FOG y, así, contar con pares de lados y ángulos correspondientes congruentes. Además, en la construcción realizada con el Cabri II, la prueba se centra en el hecho que si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, son congruentes y perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.

El grupo nº 4 probó que el hexágono KLMNXO es regular, porque se descompone en seis triángulos congruentes y la congruencia entre estos seis triángulos fue establecida entre un triángulo y su imagen simétrica, considerando como ejes de simetría a las rectas OM, XL y KN (ver Gráfico 42); mientras que el grupo nº 5 presentó una prueba, asumiendo los atributos relevantes de un cuadrado (los cuatro lados son congruentes entre sí y los cuatro ángulos internos son rectos) y la propiedad conocida que cada una de las diagonales de un paralelogramo lo descompone en dos triángulos congruentes y, en el caso particular del cuadrado, lo divide en dos triángulos isorrectángulos. Además, muestran la equivalencia entre ambas construcciones al señalar que, con doblado de papel, el triángulo ADC se superpone con el triángulo ABC y que, en un AGD, el triángulo ABC es la imagen simétrica del triángulo ADC con respecto a la diagonal AC (a través de la cual habían realizado el doblez). En los grupos nº 1, 4 y 5, se observa un *esquema de argumentación* *analítico*, apoyado en un *esquema de argumentación fáctico* (ver Cuadro 78). Esto pareciera estar relacionado con la naturaleza de la tarea propuesta que los obliga inicialmente a enfocar la atención en los procedimientos de construcción empleados, para luego tratar de reconocer relaciones entre los objetos geométricos y, por último, tratar de dar una justificación (explicación o prueba).

Cuadro 78
Clasificación de las justificaciones dadas por los profesores en formación en las actividades libres del Taller nº 2

Criterio de clasificación	Indicadores	G1	G2	G3	G4	G5
La justificación como producto final de un proceso de validación matemática (ver Cuadro 37)	Explicación		x	x		
	Prueba	x			x	x
	Demostración					
La justificación como práctica argumentativa (ver Cuadro 38)	Esquema de argumentación autoritario					
	Esquema de argumentación simbólico					
	Esquema de argumentación fáctico	x	x	x	x	x
	Esquema de argumentación empírico		x	x	x	
	Esquema de argumentación analítico	x			x	x

Construcción y exploración de cuadriláteros

Tal como se mencionó en el Capítulo IV, el Taller nº 3 estuvo dirigido a la construcción y exploración de cuadriláteros en un AGD (ver Cuadro 33); cabe señalar que, en este taller, el número de grupos de trabajo se redujo de cinco a tres, ya que, los participantes decidieron reunirse tal como lo estaban haciendo para diseñar una unidad didáctica con contenido geométrico. Cada uno de los tres grupos entregó un informe escrito acompañado de los archivos .fig y, luego, presentaron, en forma oral, una de las construcciones con su correspondiente justificación.

La primera actividad consistía en la construcción de un cuadrilátero concíclico o circunscribible, dadas las instrucciones abajo indicadas y, luego, establecer su definición (en función al reconocimiento de sus atributos relevantes):

1. Construya una circunferencia con centro en O y radio r.

2. Trace una cuerda AB correspondiente a dicha circunferencia.

3. La cuerda AB subtiende dos arcos de circunferencia: ACB y ADB.

4. Construya el cuadrilátero ACBD. Se dice que el cuadrilátero ACBD es concíclico o circunscribible.

5. Establezca la definición de cuadrilátero concíclico.

En el Cuadro 79, se dan a conocer las herramientas empleadas para construir un cuadrilátero concíclico, en atención a las producciones de los tres grupos de trabajo.

Cuadro 79
Construcción de un cuadrilátero concíclico

Grupo nº	Instrucciones	Herramientas empleadas
1	Construya una circunferencia con centro en O y radio r	Punto Punto r Segmento: _, _ O Punto C_1 Círculo (Compás): O, r
	Trace una cuerda AB correspondiente a dicha circunferencia	A Punto (Punto sobre un objeto): C_1 B Punto (Punto sobre un objeto): C_1 Segmento: A, B
	La cuerda AB subtiende dos arcos de circunferencia: ACB y ADB	C Punto (Punto sobre un objeto): C_1 D Punto (Punto sobre un objeto): C_1
	Construya el cuadrilátero ACBD. Se dice que el cuadrilátero ACBD es concíclico o circunscribible	Segmento: C, A Segmento: C, B Segmento: B, D Segmento: A, D Segmento: D, C
	Establezca la definición de cuadrilátero concíclico	*Cuadrilátero Concíclico: es el cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.*
2	Construya una circunferencia con centro en O y radio r	O Punto C_1 Círculo: O, P O Texto
	Trace una cuerda AB correspondiente a dicha circunferencia	A Punto (Punto sobre un objeto): C_1 B Punto (Punto sobre un objeto): C_1 Segmento: AB A Texto B Texto C Punto (Punto sobre un objeto): C_1 D Punto (Punto sobre un objeto): C_1
	La cuerda AB subtiende dos arcos de circunferencia: ACB y ADB	Arco: A, C, B Arco: A, D, B

Cuadro 79 (cont.)

Grupo nº	Instrucciones	Herramientas empleadas
2	Construya el cuadrilátero ACBD. Se dice que el cuadrilátero ACBD es concíclico o circunscribible	Polígono: A, C, B, D
	Establezca la definición de cuadrilátero concíclico	*Un polígono está inscrito en una circunferencia si sus vértices se encuentran en la circunferencia. A los cuadriláteros que están inscritos en una circunferencia se les llama cuadriláteros cíclicos.*
3	Construya una circunferencia con centro en O y radio r	O Punto Círculo: _
	Trace una cuerda AB correspondiente a dicha circunferencia	C Punto (Punto sobre un objeto): _ A Punto (Punto sobre un objeto): _ D Punto (Punto sobre un objeto): _ Arco: C, A, D B Punto (Punto sobre un objeto): _ Arco: C, B, D Segmento: C, B Segmento: B, D Segmento: D, A Segmento: A, C Segmento: B, A
	La cuerda AB subtiende dos arcos de circunferencia: ACB y ADB	
	Construya el cuadrilátero ACBD. Se dice que el cuadrilátero ACBD es concíclico o circunscribible	Segmento: D, C O Punto (Punto(s) de intersección): AB,DC 10 ángulo: B, O, C 9 ángulo: C, O, A 12 ángulo: A, O, D ángulo: D, O, B 5 ángulo: O, B, C 4 ángulo: B, C, O 3 ángulo: O, C, A 2 ángulo: O, A, C 8 ángulo: A, D, O 1 ángulo: O, A, D 6 ángulo: D, B, O 7 ángulo: B, D, O ángulo: A, C, O ángulo: O, C, B
	Establezca la definición de cuadrilátero concíclico	*Es aquel cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia; es decir que los vértices del cuadrilátero pertenecen a la circunferencia.*

Los tres grupos demostraron tener dominio técnico de las herramientas disponibles en el Cabri II, teniendo en cuenta los indicadores establecidos (**UT$_i$**); se observa como el grupo nº 1 construyó una circunferencia con centro en O y radio r, donde r es la longitud de un segmento auxiliar, para así usar la opción *Círculo (Compás): O, r* ; mientras que, los grupos nº 2 y 3 emplearon la opción *Círculo: O, P*, donde O es el centro de la circunferencia y P un punto por el cual pasa. También se observa que el grupo nº 1 trazó la cuerda AB y ubicó los puntos C y D, pero no marcó- en forma explícita – los arcos ACB y ADB, lo cual sí lo hicieron los grupos nº 2 y 3. Para construir el cuadrilátero ACBD, los grupos 1 y 3 trazaron cada uno de sus lados AC, CB, BD y AD, mientras que el grupo nº 2 empleó la opción polígono: ACBD. También se observa que quizá teniendo en cuenta la siguiente actividad, los grupos nº 1 y 3 trazaron la otra diagonal CD del cuadrilátero, así como también que el grupo nº 3, procedió a marcar diversos ángulos (ver Gráfico 47).

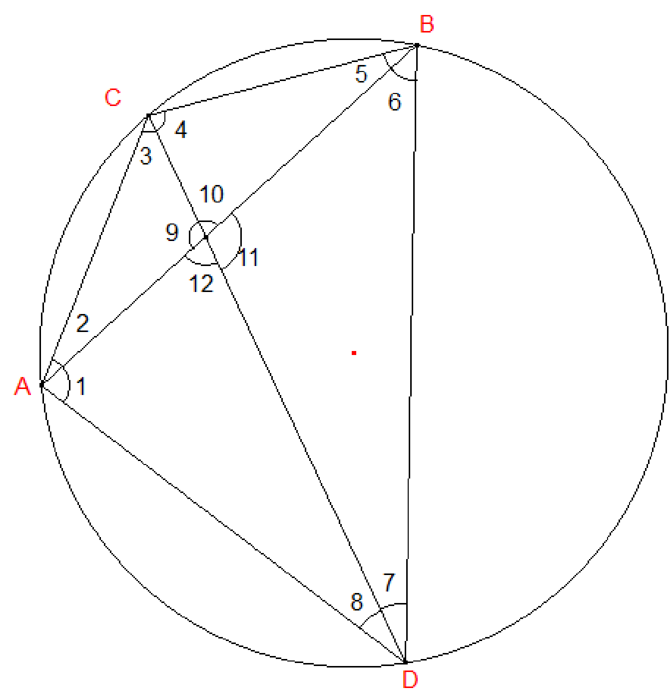


Gráfico 47. **Construcción del cuadrilátero concíclico ACBD realizada por el grupo nº 3.**

Al leer las definiciones de cuadrilátero concíclico, se observa que los tres grupos reconocen que sus vértices pertenecen a una misma circunferencia y, además, los grupos nº 2 y 3 establecen que un cuadrilátero concíclico está inscrito en una circunferencia, con lo cual lo reconocen como parte de la clase de los polígonos inscritos en una circunferencia.

La actividad nº 2 establecía lo siguiente: Mida cada uno de los ángulos internos del cuadrilátero ACBD. Sume las medidas de sus ángulos opuestos. ¿Qué concluye? ¿Puede validar tal conjetura? Al marcar y medir los ángulos internos de un cuadrilátero concíclico o circunscribible (ver Gráfico 48), se observa que la suma de las medidas de sus ángulos opuestos es 180º; por ende, se puede decir que: En un cuadrilátero concíclico o circunscribibles, los ángulos opuestos son suplementarios.

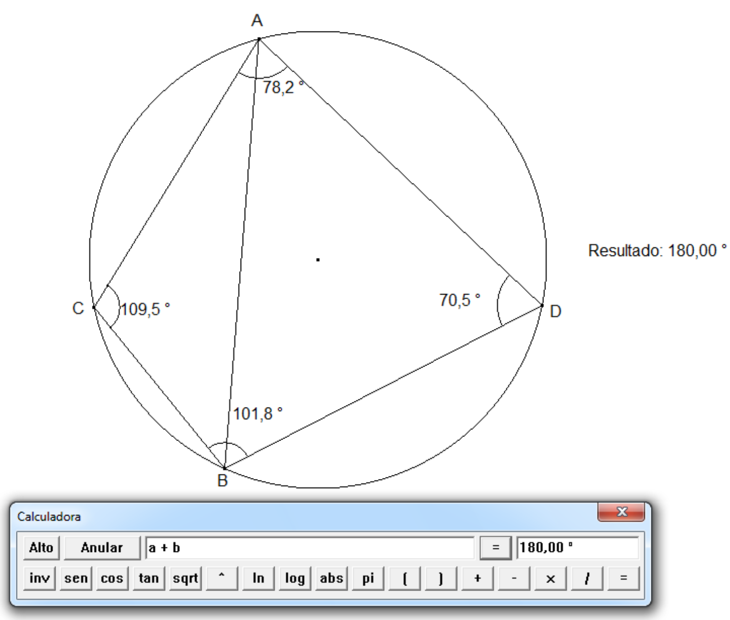


***Gráfico 48*. En un cuadrilátero concíclico o circunscribibles, los ángulos opuestos son suplementarios.**

En los informes escritos dieron las siguientes respuestas: (Grupo nº 1) *De la medición de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico se concluye que son suplementarios*; (Grupo nº 2) *Concluimos que la suma de las medidas de los ángulos opuestos es 180º; es decir, los ángulos opuestos son suplementarios. Según esto; en* *un cuadrilátero concíclico se cumple que sus ángulos opuestos son suplementarios*; (Grupo nº 3) *Que la adición de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios*. Cabe señalar que, con el Cabri II, es posible marcar y medir los ángulos internos del cuadrilátero ACBD y, luego, con la opción calculadora, seleccionar las medidas de los pares de ángulos opuestos, calcular su suma y obtener como resultado 180º; de esta manera, si se arrastra el vértice de uno de los ángulos, se observa que varía su medida, pero la suma sigue siendo 180º (ver Gráfico 48). Esto ayuda a convencerse que el resultado obtenido no es fortuito, sino que puede ser entendido como una propiedad que satisfacen los cuadriláteros concíclicos. Así, una vez establecida la conjetura, cada uno de los grupos se dedicó a validarla; de esta manera, se evidencia dominio de los usos heurísticos del Cabri II (**UH_i**) según lo establecido en el Cuadro 37.

El grupo nº 1, teniendo en cuenta la figura abajo indicada (ver Gráfico 49), presentó la siguiente justificación:

1. *Podemos observar que los $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BAD$ <u>por ser ángulos inscriptos a una misma circunferencia</u>. Ángulos a los cuales llamaremos (1).*
2. *De igual forma podemos concluir que los ángulos $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle CDA$ a los cuales llamaremos (2).*
3. *Ahora podemos concluir que los ángulos $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle ABD$ a los cuales llamaremos (3).*
4. *Por ultimo podemos concluir que los ángulos $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CDB$ a los cuales llamaremos (4).*
5. *Ahora bien toda esta relación de congruencia de los ángulos nos va permitir validar la conjetura que los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios. Ya que si consideramos el triángulo $\triangle CAD$ podemos detallar que <u>la suma de la medida angular de los ángulos 3, 2 con el ángulo de vértice A es igual a 180 por propiedad de los triángulos</u> y por la relación de congruencia que hemos establecido antes <u>la suma de la medida angular de 2 y 3 es igual al ángulo con el vértice B</u>, por lo tanto <u>los ángulos con vértice en A y B son suplementarios</u>, y un análisis análogo establece que los ángulos con vértices en D y C son suplementarios*.

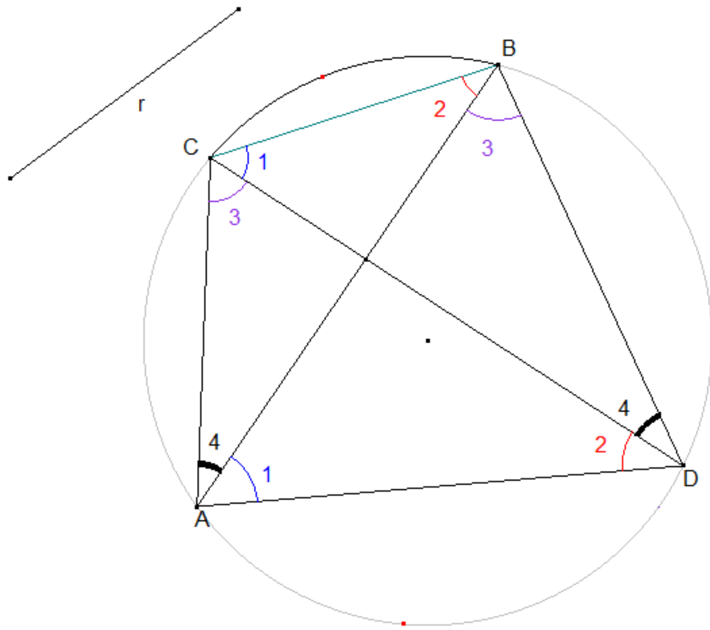


***Gráfico 49*. Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 1, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios.**

Justificación basada en la identificación de pares de ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia y la aplicación de la propiedad que establece que dos o más ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes; en los primeros cuatro pasos de la prueba, identifica cuatro pares de ángulos congruentes por la razón antes mencionada. Luego, conociendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, establece que, en el Δ ACD:

m (< CAD) + m (< 3) + m (< 2) = 180º,

donde, por el postulado de adición de ángulos, m (< 3) + m (< 2) = m (< CBD); llegando a que: m (< CAD) + m (< CBD) = 180º.

El grupo nº 2 inicia la prueba señalando que "*utilizaremos la relación entre ángulos inscritos y centrales que abren el mismo arco de circunferencia*" y escriben las siguientes igualdades:

$m < BDA = \frac{1}{2} m < BOA$ y $m < ACB = \frac{1}{2} m < AOB$

Sumando estas ecuaciones se obtiene:

$$m < BDA + m < ACB = \frac{1}{2}m < BOA + \frac{1}{2}m < AOB$$

$m < BDA + m < ACB = \frac{1}{2}(m < BOA + m < AOB)$; *por propiedad distributiva*

$m < BDA + m < ACB = \frac{1}{2}(360°)$; *los dos arcos forman la circunferencia*

$m < BDA + m < ACB = 180°$; *operando*

Quedando demostrado que en un cuadrilátero concíclico los ángulos opuestos son suplementarios.

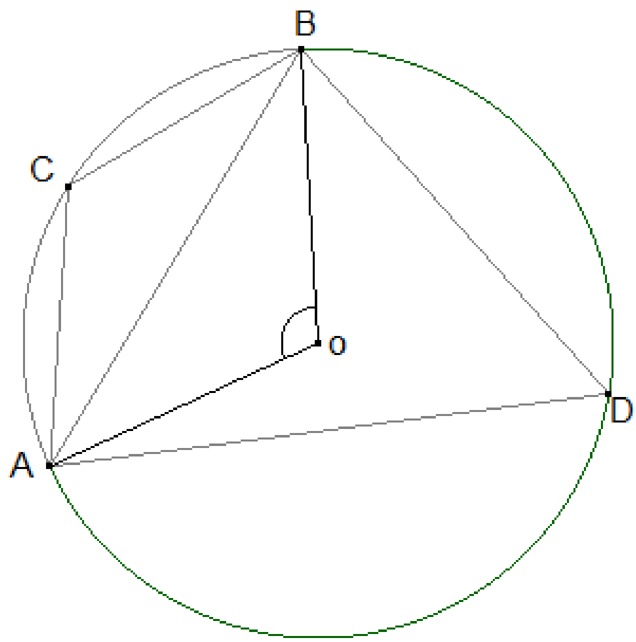


***Gráfico 50*. Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 2, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios.**

En el Gráfico 50, se observa que < BDA está inscrito en el arco de circunferencia BDA y < BOA es el correspondiente ángulo central, así como también < ACB está inscrito en el arco de circunferencia ACB y < AOB es el correspondiente ángulo central. Cabe recordar que un ángulo central es cualquier ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y, en consecuencia, sus lados están determinados por radios de tal circunferencia; mientras que un ángulo inscrito a un mismo arco de circunferencia tiene vértice en un punto perteneciente a tal arco y sus lados cortan a la circunferencia en los extremos del arco. Además, aplican que la medida de un ángulo inscrito a un arco de circunferencia es la mitad de la del correspondiente ángulo central. Nótese que, aunque no lo señalan en el desarrollo de la prueba y por lo general no se acostumbra hacerse así, los ángulos centrales < BOA y < AOB se asumen como ángulos diferentes, ya que, se considera la orientación con respecto a las agujas del reloj y, es por ello que afirman que m (< BOA) + m (< AOB) = 360º.

El grupo nº 3, teniendo como referencia la figura mostrada en el Gráfico 51, identificó hipótesis y tesis y, procedió a presentar la siguiente prueba siguiendo el esquema de afirmaciones y razones.

1. *El cuadrilátero ABCD es concíclico; por hipótesis.*

2. *Por construcción auxiliar se traza la diagonal CD, dividiendo el cuadrilátero en cuatro triángulos.*

3. *Así por propiedad de la cuerda se tiene:*

Con respecto a la cuerda AC. $< 8 \cong < 5$

Con respecto a la cuerda CB. $< 7 \cong < 2$

Con respecto a la cuerda AD. $< 6 \cong < 3$

Con respecto a la cuerda DB. $< 1 \cong < 4$

Entonces sustituyendo: El <1 por el <4, el <3 por el <6, <5 por el <8 y el <2 por el <7.

4. *Tomando el ▲ACB:*

m (<C) + m (<7) + m (<8) = 180º ; por suma interna de ángulos de un triángulo.

m (<C) = 180º- m (<7) – m (<8); despejando m (<C).

5. *Tomando el ▲ADB:*

m (<D) + m (<4) + m (<6) = 180º ; por suma interna de ángulos de un triángulo.

m (<D) = 180º- m (<4) – m (<6); despejando m (<D).

6. *Así m (<ACB)+ m (<ADB)=180°, ya que, sustituyendo se tiene:*

180º- m (<7) – m (<8) + 180º- m (<4) – m (<6) = X

- m (<7) – m (<8) – m (<4) – m (<6) + 360º = X

360º - X = m (<7) + m (<8) + m (<4) + m (<6)

360º - X = 180º

360º - 180º = X

7. Así se cumple que m(<ACB)+ m(<ADB)=180°

8. Tomando el ▲ACD:

m (<A) + m (<6) + m (<8) = 180º ; por suma interna de ángulos de un triángulo.

m (<A) = 180º- m (<6) – m (<8); despejando m (<A).

9. Tomando el ▲BCD:

m (<B) + m (<4) + m (<7) = 180º ; por suma interna de ángulos de un triángulo.

m (<B) = 180º- m (<4) – m (<7); despejando m (<B).

10. Así m (<CAD)+m (<CBD)=180°. Sustituyendo se tiene:

180º- m (<6) – m (<8) + 180º- m (<4) – m (<7) = 180º

360º- m (<6) – m (<8) – m (<4) – m (<7) = 180º

180º= m (<6) + m (<8) + m (<4) + m (<7).

11. Ser verifica que m (<CAD) + m (<CBD)=180°

12. Queda demostrado entonces que m (<ACB) + m (<ADB)=180° y m (<CAD) + m (<CBD)=180°; por pasos 7 y 11.

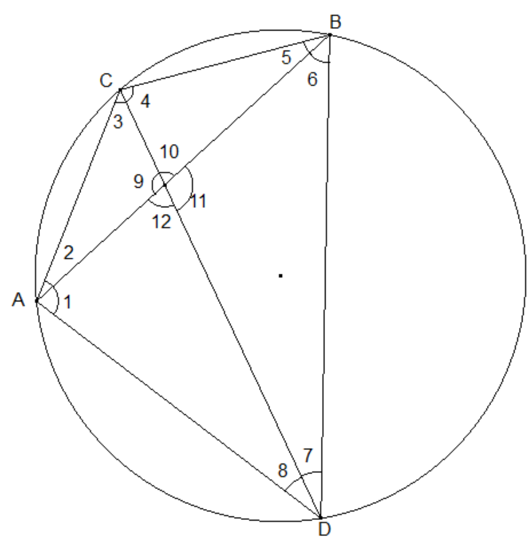


***Gráfico 51.* Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 3, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios.**

Cuando hacen referencia, en el paso 3, a la propiedad de la cuerda, se refieren a que una cuerda de una circunferencia determina dos arcos; así, por ejemplo, la cuerda AC determina a los arcos CBA y CPA (donde el punto P pertenece a la circunferencia, pero no al arco CBA); y que, además, dos o más arcos inscritos en un mismo arco de circunferencia son congruentes como lo son < CBA y < ADC con respecto al arco CBA. También aplican que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º. En los pasos nº 6 y 10, calculan las sumas de las medidas de los pares de ángulos opuestos del cuadrilátero ACBD, en función de las relaciones establecidas en los pasos 4 y 5, así como 8 y 9 respectivamente.

Se considera que los tres grupos presentaron pruebas de la conjetura formulada en la actividad nº 2 y que manifestaron un esquema de argumentación analítico, procurando presentar una serie de afirmaciones encadenadas lógicamente y debidamente justificadas, haciendo referencia a definiciones y propiedades geométricas conocidas.

La actividad nº 3 estaba dirigida a la obtención de un cuadrilátero concíclico, a partir de un cuadrilátero cualquiera, teniendo en cuenta las siguientes instrucciones:

1. Construya un cuadrilátero.
2. Trace las cuatro bisectrices internas de sus ángulos.
3. Determine los puntos de intersección de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes.
4. Demostrar que el cuadrilátero determinado por estos puntos de intersección es concíclico (sugerencia: Utilice la propiedad previamente demostrada por usted).

En el Cuadro 80, se muestran las herramientas empleadas para construir un cuadrilátero concíclico SPQR, a partir de un cuadrilátero cualquiera ABCD, por parte del grupo nº 1; además, en el Gráfico 52, se presenta la figura que le sirvió como referencia para realizar la prueba correspondiente. Como puede leerse en el paso nº 1 mencionan las propiedades geométricas que aplicarían en los siguientes pasos; para facilitar la lectura de esta prueba, la autora ha añadido comentarios en negritas.

Cuadro 80
Construcción realizada por el grupo nº 1 de un cuadrilátero concíclico, a partir de otro cuadrilátero

Instrucciones	Herramientas empleadas
Construya un cuadrilátero	A Punto B Punto C Punto D Punto Polígono: A, B, C, D
Trace las cuatro bisectrices internas de sus ángulos	Recta (Bisectriz): A, D, C Recta (Bisectriz): C, B, A Recta (Bisectriz): D, C, B Recta (Bisectriz): B, A, D
Determine los puntos de intersección de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes	S Punto (Punto(s) de intersección): _, _ R Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Q Punto (Punto(s) de intersección): _, _ P Punto (Punto(s) de intersección): _, _
Demostrar que el cuadrilátero determinado por estos puntos de intersección es concíclico (sugerencia: Utilice la propiedad previamente demostrada por usted)	ángulo: B, A, P ángulo: R, S, P ángulo: S, D, C 90,2 ° Texto (Medida de ángulo): _ 32,1 ° Texto (Medida de ángulo): _ ángulo: A, B, P ángulo: S, R, Q 90,6 ° Texto (Medida de ángulo): _ ángulo: R, Q, P ángulo: S, P, Q 89,8 ° Texto (Medida de ángulo): _ 89,4 ° Texto (Medida de ángulo): _ ángulo: A, P, B Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ ángulo: _, _, R ángulo: R, _, _ Segmento: A, B Segmento: B, C Segmento: A, D ángulo: A, S, D ángulo: R, D, C ángulo: A, D, S ángulo: Q, B, C ángulo: B, C, Q ángulo: Q, C, D ángulo: B, Q, C

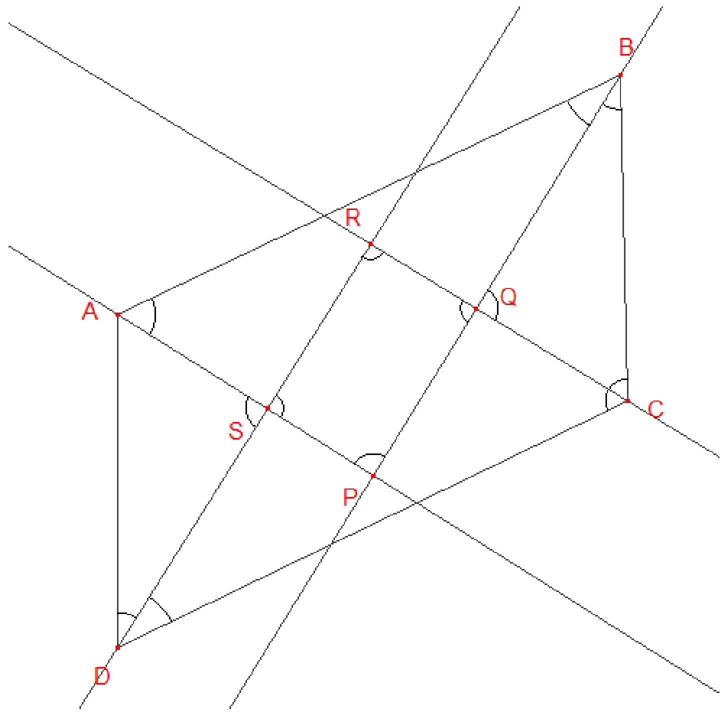


***Gráfico 52*. Cuadrilátero concíclico SPQR elaborado por el grupo nº 1, a partir del cuadrilátero ABCD**

1. Los ángulos opuestos **(de un cuadrilátero concíclico)** son suplementarios; por demostracion anterior (actv.2). debemos tomar en cuenta los triángulos ⊿ASD,⊿DRC,⊿BQC y ⊿APB conociendo:

a. La suma de (**las medidas de)** los ángulos internos (**de un triángulo**) es 180º.

b. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

c. Los ángulos del cuadrilátero inicial fueron bisecados; por lo tanto, dividieron la medida angular en dos. Se pueden fijar entonces algunas relaciones.

m (∢SPQ) =180 – m (∢B) ∕ 2 – m (∢A) ∕ 2 **(en el ∆ APB) (1)**

m (∢PQR) = 180 – m (∢B) ∕ 2 – m (∢C) ∕ 2 (**en el ∆ BQC y < BQC es opuesto por el vértce con < PQR) (2)**

m (∢SRQ) = 180 – m (∢C) ∕ 2 – m (∢D) ∕ 2 **(en el ∆ DRC) (3)**

m (∢RSP) = 180 – m (∢D) ∕ 2 – m (∢A) ∕ 2 **(en el ∆ ASD y < ASD es opuesto por el vértice con < RSP**) **(4)**

2. Realizando una serie de despejes y sustituciones podemos concluir que:

48m (∢SPQ) + m (∢SRQ) = 180º (**sumando miembro a miembro las igualdades dadas en (1) y (3))**

m.a.∢RSP+m.a.∢PQR=180 (**sumando miembro a miembro las igualdades (2) y (4)**).

3. Se concluye entonces que el cuadrilátero SPQR es Conciclico; por la actividad 2 (**los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios**).

El grupo nº 2, partiendo del cuadrilátero ABCD, construyeron el cuadrilátero SPQR determinado por los puntos de intersección de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes del cuadrilátero original tal como se muestra en el Gráfico 53; para ello, siguieron las instrucciones dadas y emplearon las herramientas indicadas en el Cuadro 81. Se nota que colocaron puntos adicionales sobre las bisectrices trazadas para marcar ciertos ángulos, lo cual no era necesario, porque ya disponía de los puntos requeridos para hacerlo.

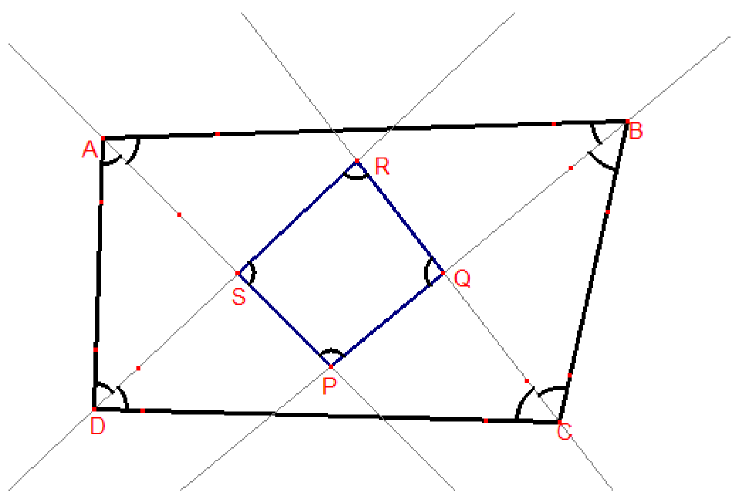


Gráfico 53. **Cuadrilátero concíclico SPQR elaborado por el grupo nº 2, a partir del cuadrilátero ABCD**

En cuánto a la prueba presentada, siguieron el esquema de afirmaciones y razones, siendo similar en su estructura a la presentada por el grupo nº 1, ya que, tomaron en cuenta △ASD, △DRC, △BQC, y △APB y aplicaron las propiedades antes mencionadas.

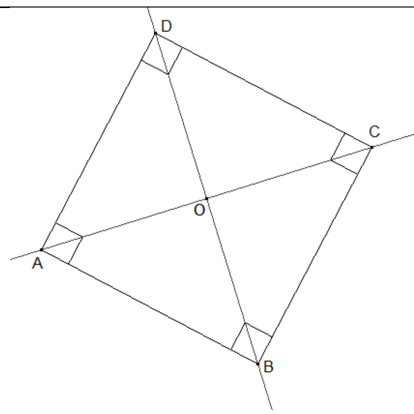
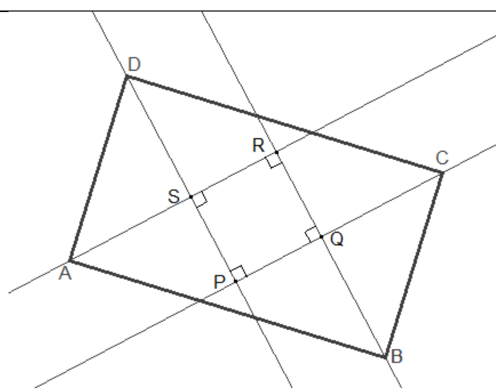
Cuadro 81
Construcción realizada por el grupo nº 2 de un cuadrilátero concíclico, a partir de otro cuadrilátero

Instrucciones	Herramientas empleadas
Construya un cuadrilátero	A Punto B Punto C Punto D Punto Polígono: A, B, C, D
Trace las cuatro bisectrices internas de sus ángulos	L4 Recta (Bisectriz): B, A, D L2 Recta (Bisectriz): A, D, C L3 Recta (Bisectriz): D, C, B L1 Recta (Bisectriz): C, B, A
Determine los puntos de intersección de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes	P Punto (Punto(s) de intersección): L4, L1 R Punto (Punto(s) de intersección): L2, L3 Q Punto (Punto(s) de intersección): L3, L1 S Punto (Punto(s) de intersección): L4, L2 Polígono: P, Q, R, S Punto (Punto(s) de intersección): polígono, L2 Punto (Punto(s) de intersección): polígono , L3 Punto (Punto sobre un objeto): polígono Punto (Punto sobre un objeto): L4 ángulo: punto, A, punto Punto (Punto sobre un objeto): polígono ángulo: punto, A, punto Punto (Punto sobre un objeto): polígono Punto (Punto sobre un objeto): L1 ángulo: punto, B, punto Punto (Punto sobre un objeto): polígono ángulo: punto, B, punto Punto (Punto sobre un objeto): polígono Punto (Punto sobre un objeto): L3 ángulo: punto, C, punto Punto (Punto sobre un objeto): polígono ángulo: punto, C, punto Punto (Punto sobre un objeto): polígono Punto (Punto sobre un objeto): L2 ángulo: punto, D, punto Punto (Punto sobre un objeto): polígono ángulo: punto, D, punto ángulo: P, S, R ángulo: S, R, Q ángulo: R, Q, P ángulo: Q, P, S

En relación a la construcción del grupo nº 3, no se dispuso del archivo .fig para conocer las herramientas empleadas; en el informe escrito siguieron una prueba similar a las presentadas por los grupos nº 1 y 2.

Cabe señalar que, en la actividad nº 3, se partía de un cuadrilátero cualquiera ABCD; por lo tanto, pudiera pensarse que, en cualquier caso, es posible construir el cuadrilátero concíclico SPQR; sin embargo, esto no es así. Cabe preguntarse: ¿Qué sucede si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado? ¿Qué tipo de cuadrilátero sería SPQR si se parte de: (a) un paralelogramo cualquiera, (b) un rombo, y (c) un rectángulo? Esta situación fue planteada por la facilitadora a los participantes en el curso de RPG_AC, durante el desarrollo del Taller nº 3, y se plantearon algunas ideas (ver Cuadro 82); sin embargo, la validación de estas conjeturas no fueron incorporadas en el informe escrito.

Cuadro 82
Algunas conjeturas formuladas por los participantes del curso de RPG_AC durante el desarrollo de la actividad nº 3 del taller nº 3

	Si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, no es posible construir el cuadrulátero SPQR, ya que, cada par de bisectrices de ángulos adyacentes se cortan en el punto O. Esta situación también sucede con un rombo
	Si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, el cuadrilátero SPQR es un rectángulo.

La actividad nº 4 estaba dirigida a demostrar una propiedad dada de los cuadriláteros concíclicos; en este caso, con esta actividad no se pretendía que los profesores en formación, a partir de la construcción y exploración de un cuadrilátero concíclico formularan una conjetura (como en la actividad nº 2), sino que reconocieran relaciones entre los elementos geométricos que intervienen en la construcción del cuadrilátero concíclico y que éstas pudieran ser utilizadas en la prueba solicitada. En la actividad nº 4 se establecía lo siguiente:

1. Construya un cuadrilátero concíclico ABCD.
2. Trace sus diagonales AC y BD.
3. Demuestre que el producto de las diagonales de un cuadrilátero concíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos: AB.CD + AD.BC = AC.BD.

En el Gráfico 54, se observa como, al trazar las diagonales AC y BD del cuadrilátero concíclico ABCD, se forman dos pares de triángulos semejantes, los cuales son: (a) Δ ABP y Δ DCP y (b) Δ BCP y Δ ADP; se considera que la identificación de estos dos pares de triángulos semejantes es clave para elaborar la prueba solicitada en (3).

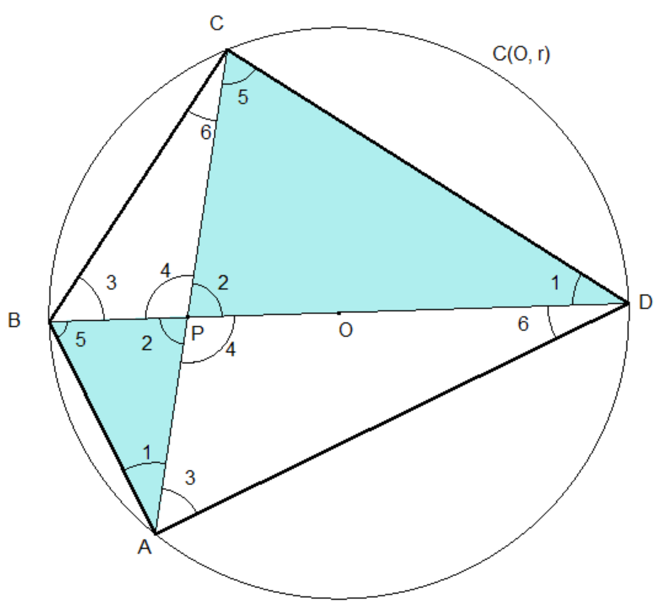


***Gráfico 54*. El producto de las diagonales de un cuadrilátero concíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.**

En el Cuadro 83, se muestra la construcción del cuadrilátero concíclico ABCD por parte del grupo nº 1, el cual introduce una construcción auxiliar, a trazar el segmento CE, de modo que m (< DCA) = m (< ECB). Al inicio de la prueba, este grupo señala que esta propiedad se conoce como el Teorema de Ptolomeo y que el mismo puede ser demostrado de varias maneras y que una de ellas emplea la construcción auxiliar antes mencionada. Además, emplean el hecho que ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes y el criterio de semejanza de triángulos AA. Una vez que establecen dos pares de ángulos semejantes (aunque utilizaron la notación convenida para triángulos congruentes), aplicaron la definición de triángulos semejantes y efectuaron operaciones arritméticas para llegar a lo que se quería demostrar.

Cuadro 83
Construcción realizada por el grupo nº 1 en la actividad nº 4 del taller nº 3

Instrucciones		Herramientas empleadas
Construya un cuadrilátero concíclico ABCD		Punto
		Círculo: _
	D	Punto (Punto sobre un objeto): _
	C	Punto (Punto sobre un objeto): _
		Segmento: D, C
	B	Punto (Punto sobre un objeto): _
		Segmento: C, B
	A	Punto (Punto sobre un objeto): _
		Segmento: B, A
		Segmento: A, D
		Segmento: D, B
		Segmento: C, A
Trace sus diagonales AC y BD		
Demuestre que el producto de las diagonales de un cuadrilátero concíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos: AB.CD + AD.BC = AC.BD		Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Triángulo: D, C, _
	1	ángulo: D, C, A
		Punto (Punto sobre un objeto): _
		Punto (Simetría central): C, _
		Punto (Punto sobre un objeto): _
	E	Punto (Punto sobre un objeto): _
	1	ángulo: E, C, B
		Segmento: C, E
		Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	2	ángulo: D, A, C
	2	ángulo: D, B, C
	3	ángulo: C, D, B
	3	ángulo: C, A, B

<u>Esta demostración corresponde al Teorema de Ptolomeo</u> (ver Gráfico 55), el cual <u>tiene varias formas de ser demostrado una de ellas es a través de una construcción auxiliar del segmento CE de tal forma que</u> $\underline{m\ \sphericalangle DCA = m\ \sphericalangle ECB}$, *los cuales se han identificado con el número 1; por la actividad nº 2, sabemos que* $m\ \sphericalangle DAC = m\ \sphericalangle DBC$ *, los cuales se han identificado con el número 2. Esto nos permite asegurar que los triángulos* $\Delta BCE \cong \Delta ACD$, *por lo tanto se cumplen la relación:*

$\frac{BC}{AC} = \frac{BE}{AD}$ *Lo cual también lo podemos ver:* $AC \times BE = BC \times AD$ *(a)*

Por la construcción auxiliar, se tiene que la medida angular $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ACB$ *y recordando que* $m\ \sphericalangle CAB = m\ \sphericalangle CDB$, *los cuales denotamos como 3, entonces los triángulos* $\Delta CAB \cong \Delta CDE$, *por lo tanto, se cumple la relación:*

$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC}$ *Lo cual también lo podemos ver:* $AC \times DE = AB \times DC$ *(b)*

Sumando las ecuaciones (a) y (b), tenemos que:

$$(AC \times BE) + (AC \times DE) = (BC \times AD) + (AB \times DC)$$

$$AC(BE + DE) = (BC \times AD) + (AB \times DC)$$

Como el punto está entre D y B se cumple que $BE + DE = DB$.

$$AC \times DB = (BC \times AD) + (AB \times DC)$$

Que es lo que se quería probar.

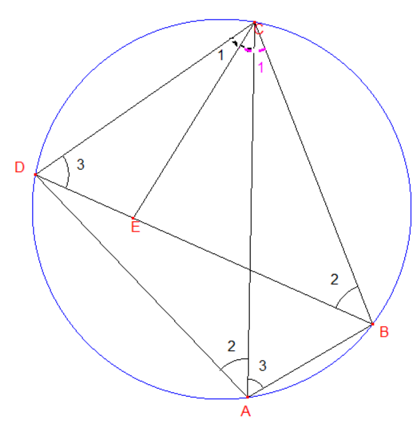


***Gráfico 55*. Construcción de un cuadrilátero concíclico realizada por el grupo nº 1 para demostrar la propiedad enunciada en la actividad nº 4 del taller nº 3.**

El grupo nº 2 elaboró la figura indicada en el Gráfico 56, usando las siguientes herramientas:

O Punto

C_1 Círculo: O, _

A Punto (Punto sobre un objeto): C_1

B Punto (Punto sobre un objeto): C_1

C Punto (Punto sobre un objeto): C_1

D Punto (Punto sobre un objeto): C_1

Polígono: A, B, C, D

Segmento: D, B

Segmento: A, C

K Punto (Punto sobre un objeto): _

Segmento: K, B

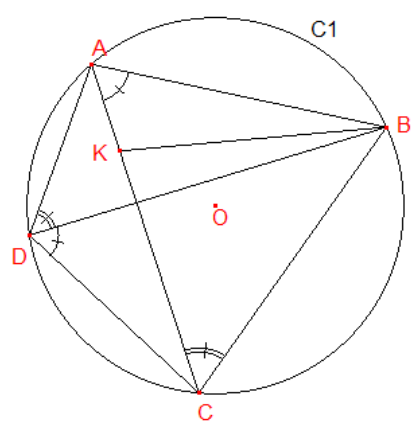


Gráfico 56. Construcción de un cuadrilátero concíclico realizada por el grupo nº 2 para demostrar la propiedad enunciada en la actividad nº 4 del taller nº 3.

Este grupo también introduce una construcción auxiliar al trazar el segmento BK, pero – a diferencia del grupo nº 1 – no indican que condición debe satisfacer tal punto

K o si simplemente es un punto sobre la diagonal AC; del informe escrito, se ha obtenido esta prueba:

1. *Sea ABCD un cuadrilátero concíclico.*
2. *Note que, en el segmento BC, ángulos inscritos ∠BAC = ∠BDC, y en* ***(el segmento)*** *AB, ∠ADB = ∠ACB* **(las cuerdas BC y AB de la circunferencia C_1 determinan arcos de circunferencia y ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes)**.
3. *Ahora, <u>por ángulos comunes</u> ⊿ABK es semejante a ⊿DBC, y ⊿ABD es semejante a ⊿KBC.* **¿A cuáles ángulos comunes se refiere? Aquí es dónde es necesario indicar que condición debe satisfacer tal punto K, para garantizar la existencia de pares de triángulos semejantes.**
4. *Por lo tanto, AK/AB = CD/BD, y CK/BC = DA/BD,*
5. *Por lo tanto, AK·BD = AB·CD, y CK·BD = BC·DA;*
6. *Lo que implica AK·BD + CK·BD = AB·CD +BC·DA*
7. *Es decir, (AK+CK)·BD = AB·CD + BC·DA;*
8. *Pero AK+CK = AC, por lo tanto AC·BD = AB·CD + BC·DA; como se quería demostrar.*

El grupo nº 3 traza la circunferencia C_1 con centro en O y radio r y coloca dos puntos distintos B y D sobre ella, determinando así la cuerda BD; ésta a su vez subtiende dos arcos de circunferencia: DAB y BCD, construyendo así el cuadrilátero concíclico ABCD con diagonales AC y BD. Seguidamente, marcan diversos ángulos y trazan la bisectriz del ángulo ABD, la cual interseca a la diagonal AC en un punto K. Para finalizar construyen explícitamente a los triángulos KAB y DCB. Obsérvese que introducen una construcción auxiliar, trazando la bisectriz del ángulo ABD, para hallar el punto K. Esto se obtuvo al usar la opción *mostrar la descripción* del procedimiento empleado.

O	Punto
C_1	Círculo: O
D	Punto (Punto sobre un objeto): C_1
B	Punto (Punto sobre un objeto): C_1

Segmento: D, B

A Punto (Punto sobre un objeto): C_1

Arco: D, A, B

C Punto (Punto sobre un objeto): C_1

Arco: B, C, D

Segmento: D, A

Segmento: A, B

Segmento: B, C

Segmento: C, D

Segmento: A, C

ángulo: C, A, B

ángulo: B, D, C

ángulo: A, C, B

ángulo: A, B, D

ángulo: A, D, B

L Recta (Bisectriz): A, B, D

K Punto (Punto(s) de intersección): AC, L

Triángulo: K, A, B

Triángulo: D, C, B

Para seguir la prueba presentada por el grupo nº 3, se tiene como referencia el Gráfico 57:

El cuadrilatero ABCD es un cuadrilátero concíclico; por hipotesis.

Por propiedad de ángulos determinados por una cuerda común, se tiene: con respecto a la cuerda BC, la m(∠BAC) = m(∠BDC) y con respecto a la cuerda AB, la m(∠ADB) = (∠ACB).

Por construccion auxiliar se traza un segmento desde el vertice B hasta la diagonal AC, siendo K el punto de intersección **(de la bisectriz del < ABD con la diagonal AC y, por ende, m (< ABK) = m(< DBK) teniendo en cuenta la construcción realizada)** *y m(<ABK) = m(<BCD)* **(Si se tiene en cuenta la construcción, esta relación no se cumple, ya que, la medida del < ABK es igual a**

la mitad de la medida del < ABD y m (< ABD) = m (< ACD), por ser ángulos inscritos en un mismo arco).

Por criterio de semejanza AA (**por lo anterior no están dadas las condiciones para aplicar tal criterio**), se tiene:

$\triangle ABK \sim \triangle DBC$, y $\triangle ABD \sim \triangle KBC$.

Por lo tanto, se cumple la relacion AK/AB = CD/BD, y CK/BC = DA/BD.

Asi despejando:

$AK \cdot BD = AB \cdot CD$, y $CK \cdot BD = BC \cdot DA$

Igualando las ecuaciones:

$AK \cdot BD + CK \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

$(AK+CK) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$; *factor común*

Pero como el K esta entre A y C; por definicion de relacion estar entre. AK+CK = AC.

Por lo tanto, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$, quedando demostrado.

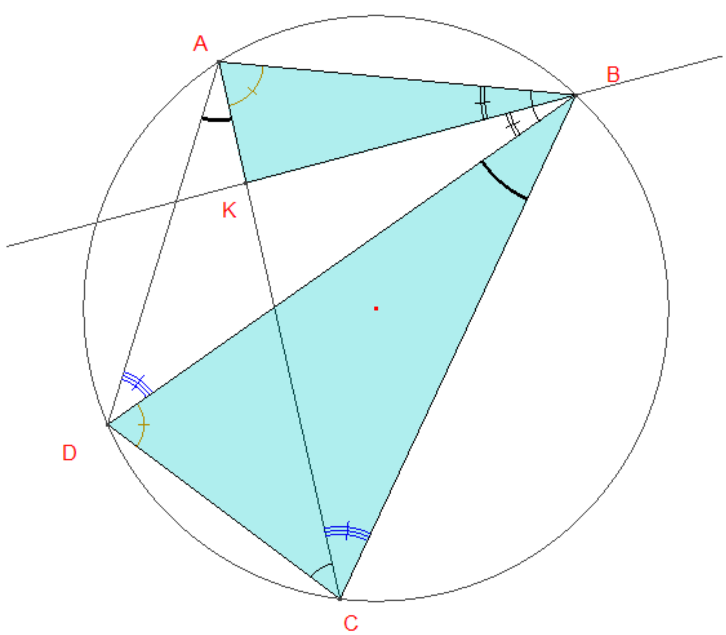


***Gráfico 57*. Construcción de un cuadrilátero concíclico realizada por el grupo nº 3 para demostrar la propiedad enunciada en la actividad nº 4 del taller nº 3.**

Se observa que el grupo nº 3 sustentó su prueba en la existencia de pares de triángulos semejantes (ABK ~ $\triangle$DBC y $\triangle$ABD ~ $\triangle$KBC), pero la construcción realizada no permite el establecimiento de las condiciones necesarias para aplicar el criterio de semejanza AA. Observese que el grupo nº 1 ubicó el punto E en la diagonal de modo que m (< DCA) = m (< ECB), mientras que el grupo nº 3 determinó el punto K como la intersección de la bisectriz del < ABD con la diagonal AC. Pareciera que el grupo nº 3, en la prueba, considero que K es un punto perteneciente a la diagonal AC tal que m(<ABK) = m(<BCD), pero esto no se corresponde con el procedimiento de construcción. Se nota que los grupos nº 2 y 3 efectuaron las operaciones aritméticas, a partir de la proporcionalidad entre los pares de lados correspondientes de triángulos semejantes; sin embargo, las construcciones auxiliares son inconsistentes.

En esta prueba pareciera imponerse el criterio de autoridad académica al optar los tres grupos por una prueba conocida del llamado teorema de Ptolomeo y la más divulgada en los libros de texto y por internet, en vez de explorar la figura construida en la cual, a partir de la intersección de las diagonales AC y BD en un punto P, se forman dos pares de triángulos semejantes (ver Gráfico 54, en el cual se han marcado los pares de ángulos congruentes para facilitar el reconocimiento de pares de triángulos semejantes).

En la actividad nº 5 se establecía lo siguiente: Se afirma que dados cuatro segmentos de longitudes a, b, c y d tales que cualesquiera es menor que la suma de las otras tres, es posible construir tres cuadriláteros concíclicos distintos que tengan como lados dichos segmentos. Intenta construir tales cuadriláteros.

Cabe señalar que, tanto por el curso de Geometría I como las actividades planteadas en el Taller nº 1 del curso de RPG_AC, los profesores en formación conocían cómo construir un triángulo conocidas las longitudes de sus lados siempre que satisfagan la desigualdad triangular; por ello, se esperaba que lo planteado en la actividad nº 5 le resultará familiar; sin embargo, los tres grupos no la realizaron. Para la autora, una opción hubiera sido suponer el problema resuelto y tratar de copiar tal cuadrilátero ABCD, haciendo uso del método de la figura auxiliar. Así, por ejemplo, en el Gráfico 58, teniendo como referencia el cuadrilátero ABCD, se construyeron los cuadriláteros concíclicos A’B’C’D’ y A’’B’’C’’D’’.

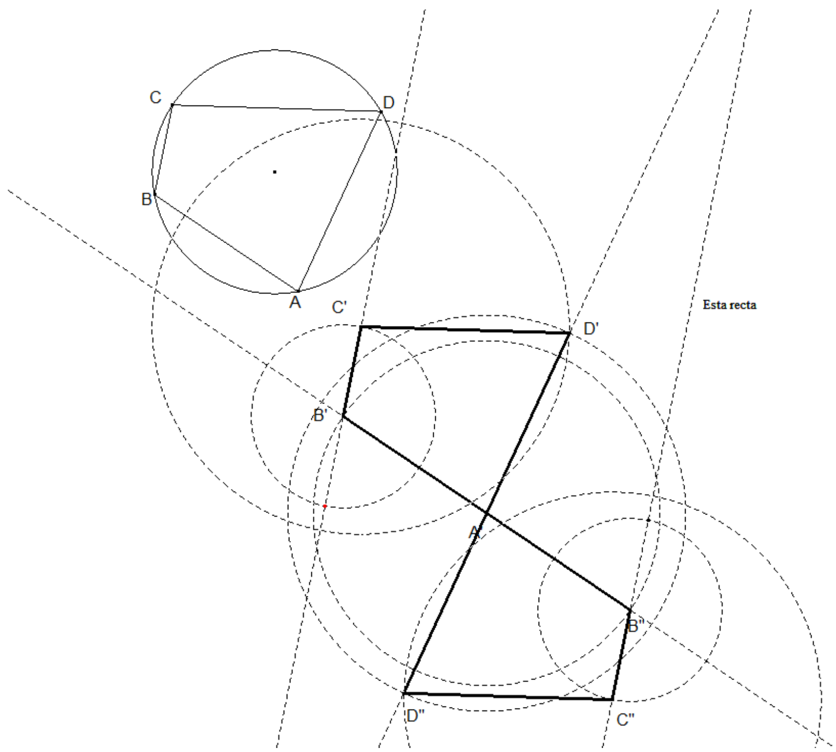


***Gráfico 58*. Construcción de un cuadrilátero concíclico dadas las longitudes de sus lados (actividad nº 5 del taller nº 3)**

Cabe resaltar que las primeras cinco actividades propuestas en el Taller nº 3 estaban orientadas al estudio de los cuadriláteros concíclicos (definición, construcción y propiedades notables), mientras que las actividades nº 6 y 7 se centraron en el estudio de los cuadriláteros inscribibles. Además, el estudio de los cuadriláteros concíclicos, les exigió a los profesores en formación la revisión de la definición de triángulos semejantes y los criterios de semejanza de triángulos, así como el reconocimiento de ángulos inscritos en un mismo arco de circunferencia y sus propiedades; en cambio, en el caso de los cuadriláteros inscribibles, se vieron en la necesidad de indagar cómo trazar rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a la misma (ver instrucciones nº 2 y 3 para la actividad nº 6) y aplicar que los correspondientes segmentos tangentes son congruentes (AE = AH y CF = CG).

Para realizar la actividad nº 6 (ver Gráfico 59), se dieron las siguientes indicaciones:

1. Construya una circunferencia con centro en O y radio r.
2. Sea A un punto exterior a dicha circunferencia. **Desde A, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia**. Sean E y H los correspondientes puntos de tangencia.
3. Sea C un punto exterior a dicha circunferencia y que pertenezca al interior del ángulo < EAH. **Desde C, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia**. Sean F y G los correspondientes puntos de tangencia.
4. Sea B el punto de intersección de las rectas tangentes AE y CF.
5. Sea D el punto de intersección de las rectas AH y CG.
6. Construya el cuadrilátero ABCD. Se dice que tal cuadrilátero es inscribible.
7. Establezca la definición de cuadrilátero inscribible.
8. Demostrar que si el cuadrilátero es inscribible, entonces la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados opuestos: AB + CD = BC + DA.

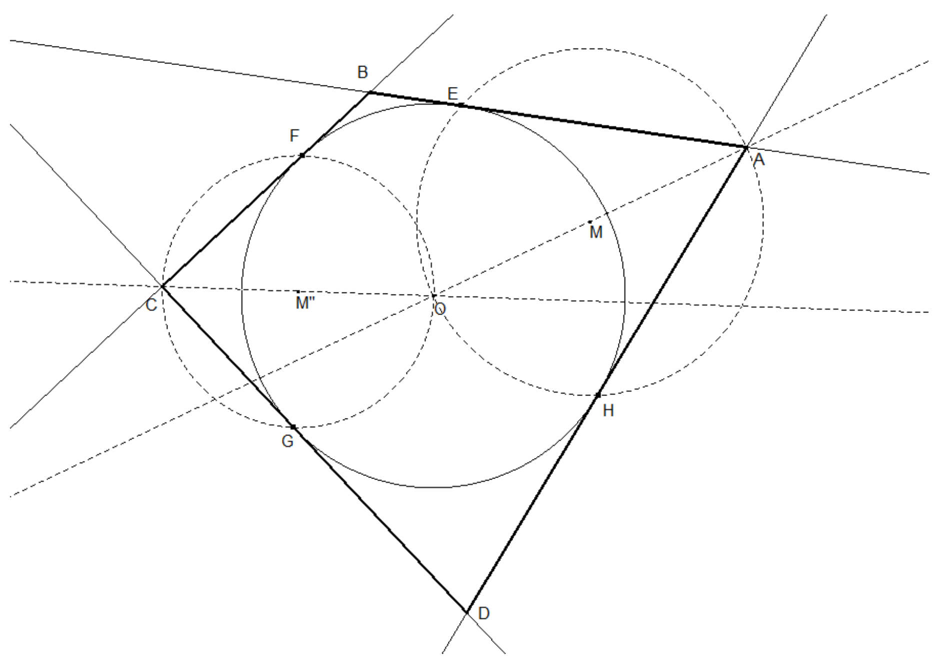


***Gráfico 59*. Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD.**

En el Cuadro 84, se describle la construcción de un cuadrilátero concíclico realizada por el grupo nº 1 (ver Gráfico 60); al revisarla, se observa que dada la circunferencia C_1 y un punto A fuera de ella, ubican un punto E sobre C_1, trazan la semirrecta AE y arrastran el punto E de modo que la recta AE sea tangente a C_1. Una vez ubicado el punto E, trazan una recta perpendicular a la semirrecta AE por el punto E; seguidamente, trazan la semirrecta AO, siendo O el centro de la circunferencia C_1, y hallan la imagen simétrica H del punto E con respecto a esta semirrecta y trazan la semirrecta AH. Luego, ubican un punto C en el interior del < EAH y proceden de manera análoga para trazar las rectas tangentes CF y CG. Esta construcción está sometida a una contingencia: la ubicación del punto E sobre la circunferencia C_1 de modo que la intersección de la semirrecta AE con C_1 sea el punto E; de no cumplirse está condición, la construcción sería inconsistente.

Cuadro 84
Procedimiento de construcción de un cuadrilátero inscribible utilizado por el grupo nº 1

Construya una circunferencia con centro en O y radio r	P	Punto
	Q	Punto
	r	Segmento: P, Q (Segmento auxiliar)
	O	Punto
	C_1	Círculo (Compás): O, r
Sea A un punto exterior a dicha circunferencia. Desde A, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia. Sean E y H los correspondientes puntos de tangencia.	A	Punto
	E	Punto (Punto sobre un objeto): C_1
	L_1	Semirrecta: A, E
	L_2	Recta (Recta perpendicular): E, L_1
	L_3	Semirrecta: A, O
	A’	Punto (Simetría axial): A, L_3
	H	Punto (Simetría axial): E, L_3
	L_4	Semirrecta: A, H
		Recta (Recta perpendicular): _, _
Sea C un punto exterior a dicha circunferencia y que pertenezca al interior del ángulo < EAH. Desde C, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia. Sean F y G los correspondientes puntos de tangencia.	C	Punto
	F	Punto (Punto sobre un objeto): C_1
	L5	Semirrecta: C, F
	L6	Recta (Recta perpendicular): _, _
	L7	Semirrecta: C, O
		Punto (Simetría axial): C, L_7
	G	Punto (Simetría axial): F, L7
		Semirrecta: G, D

Cuadro 84 (cont.)

Sea B el punto de intersección de las rectas tangentes AE y CF	B	Punto (Punto(s) de intersección): L_5, L_1
Sea D el punto de intersección de las rectas AH y CG	D	Punto (Punto(s) de intersección): L_4, _
Construya el cuadrilátero ABCD. Se dice que tal cuadrilátero es inscribible		Polígono: C, B, A, D
Establezca la definición de cuadrilátero inscribible		No establecieron la definición

Nótese que, en un ambiente de lápiz y papel, se tendría una figura, como la del Gráfico 60, que satisface lo establecido en las instrucciones y sirve como referencia para elaborar la prueba del teorema enunciado, pero, en un AGD, al arrastrar el punto E, se evidencia que la construcción es inconsistente (ver Gráfico 61).

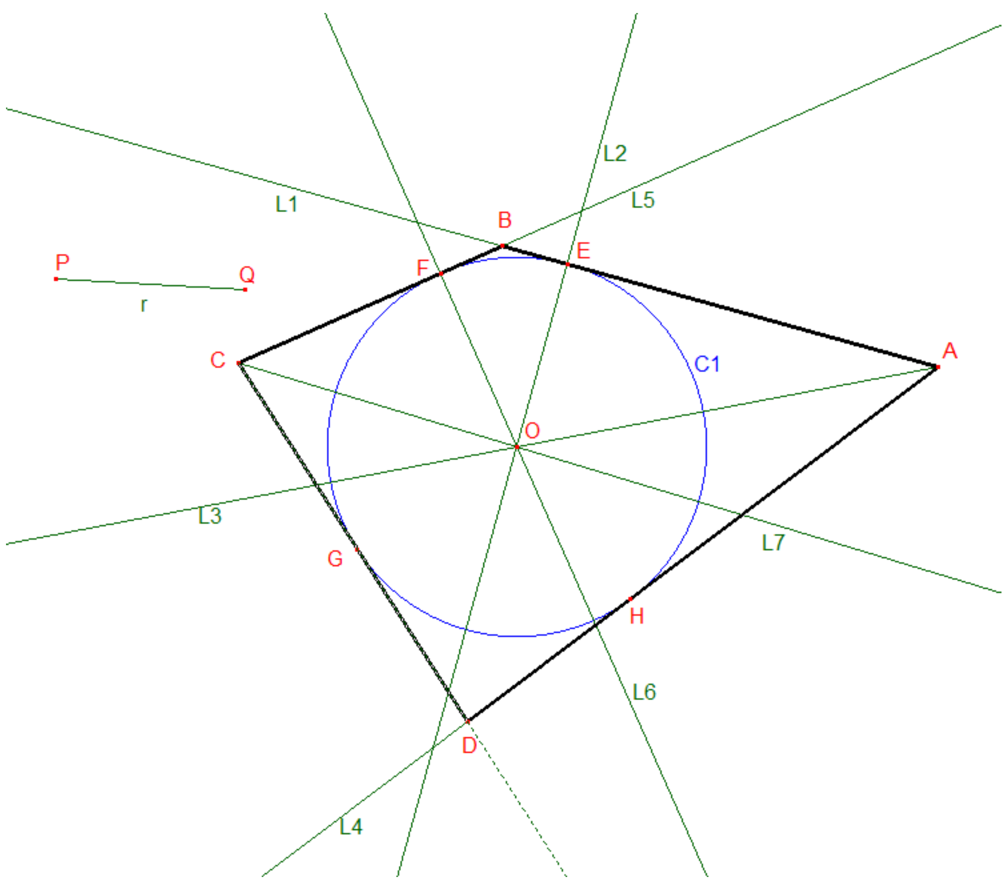


***Gráfico 60*. Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD realizada por el grupo nº 1**

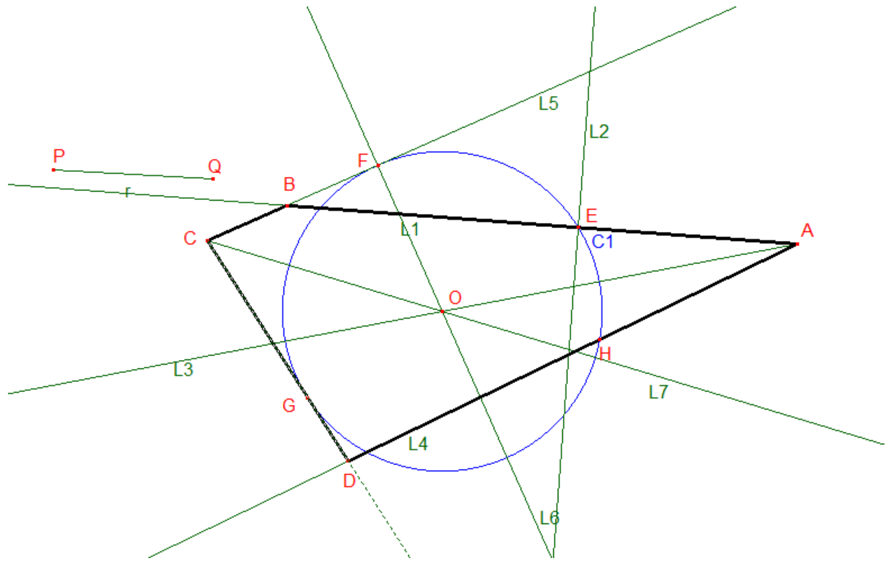


***Gráfico 61*. Construcción inconsistente de un cuadrilátero inscribible ABCD realizada por el grupo nº 1**

El grupo nº 1, basándose en la figura del Gráfico 60, presentó la siguiente prueba: Lo primero que hay que considerar es el hecho que la distancia que hay de un punto exterior a los puntos de tangencia de una circunferencia son iguales, de donde se puede garantizar que (1):

$$DH = DG$$

$$AE = AH$$

$$CG = CF$$

$$BF = BE$$

Y tomando en cuenta la definición de la relación estar entre, tenemos que (2):

$$DC = DG + GC$$

$$AB = AE + EB$$

$$AD = AH + HD$$

$$CB = CF + FB;$$

$$DC + AB = DG + CG + AE + EB$$

$$DA + CB = DH + HA + CF + FB$$

Por las igualdades (1) y (2), entonces podemos asegurar que:

$$DC + AB = DA + CB$$

Cuadro 85
Procedimiento de construcción de un cuadrilátero inscribible utilizado por el grupo nº 2

Construya una circunferencia con centro en O y radio r	Punto Sistema de coordenadas: _ O Punto C1 Círculo: O
Sea A un punto exterior a dicha circunferencia. Desde A, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia. Sean E y H los correspondientes puntos de tangencia.	A Punto Segmento: O, A P Punto (Punto medio): _ C2 Círculo: P, A H Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2 E Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2 Recta: A, E Recta: A, H
Sea C un punto exterior a dicha circunferencia y que pertenezca al interior del ángulo < EAH. Desde C, trace las dos rectas tangentes a dicha circunferencia. Sean F y G los correspondientes puntos de tangencia.	C Punto Segmento: C, O Q Punto (Punto medio): _ C3 Círculo: Q, O G Punto (Punto(s) de intersección): C3, C1 F Punto (Punto(s) de intersección): C3, C1 Recta: C, F Recta: C, G
Sea B el punto de intersección de las rectas tangentes AE y CF	D Punto (Punto(s) de intersección): _, _ B Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Polígono: C, B, A, D
Sea D el punto de intersección de las rectas AH y CG	
Construya el cuadrilátero ABCD. Se dice que tal cuadrilátero es inscribible	
Establezca la definición de cuadrilátero inscribible	Un cuadrilátero es inscribible si todos sus lados son tangentes a una misma circunferencia

En el Cuadro 85, se observa como el grupo nº 2 realizó una construcción consistente, ya que, trazó el segmento OA y determinó su punto medio P; luego, haciendo centro en P con radio PO, trazó una circunferencia C_2 que interseca a C_1 en los puntos de tangencia E y H, obteniendo así las semirrectas AE y AH. Ubicado un punto C exterior a la circunferencia C_1 y perteneciente al interior del < EAH, de manera análoga, trazaron las tangentes CF y CG a C_1. Por último, determina los puntos B y D como se muestra en el Gráfico 62.

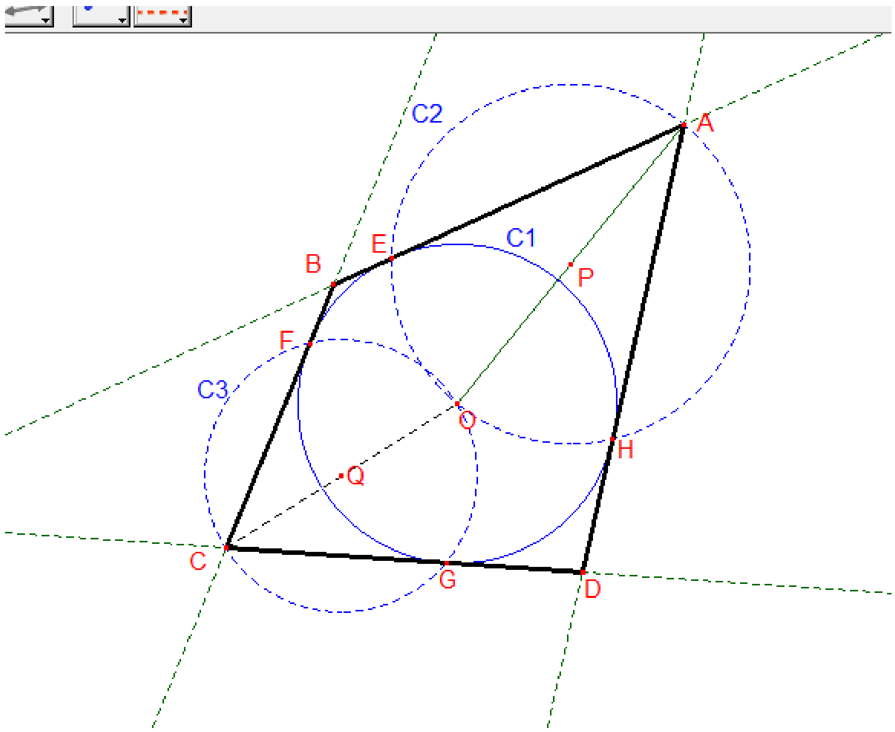


***Gráfico 62*. Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD realizada por el grupo nº 2**

En función a tal construcción, realizaron la siguiente prueba: *<u>Por la propiedad de la tangente</u>, tenemos que AH = AE, BF = EB, FC = CG, HD = GD.*

Sumando estas ecuaciones, obtenemos que:

AH +BF+ FC +HD= AE +EB +CG+ GD.

Como AH +HD = AD, BF+ FC = BC, AE+EB = AB y CG +GD = CD (**no indican que están aplicando la relación estar entre)**, *entonces, se cumple que:*

AD +BC =AB+ CD.

Cuando el grupo nº 2 menciona, en el desarrollo de la prueba, la propiedad de la tangente, se está refiriendo a la siguiente propiedad: Dos segmentos tangentes a una circunferencia trazados desde un mismo punto exterior a ella son congruentes; es decir, si P es un punto exterior a la circunferencia C(O, r) y PA y PB son segmentos tangentes, entonces PA y PB son congruentes (ver Gráfico 63).

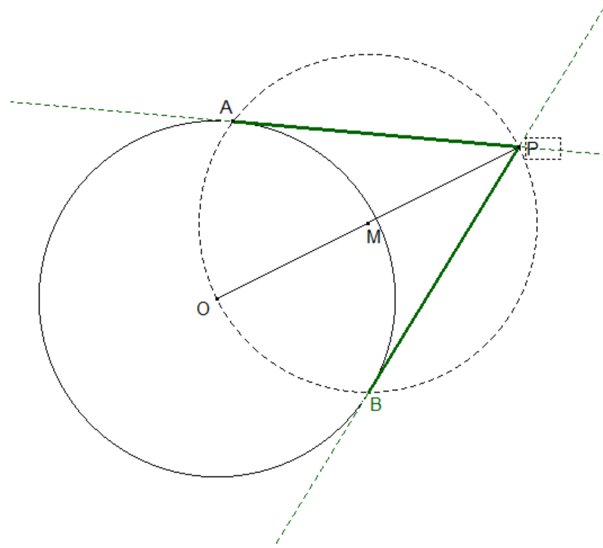


***Gráfico 63*. PA y PB son segmentos tangentes a la circunferencia C(O, r) trazados desde el punto P.**

El grupo nº 3 no realizó las actividades nº 6 y 7 planteadas en el Taller nº 3 y dirigidas al estudio de los cuadriláteros inscribibles.

La actividad nº 7 se fundamentaba en el esquema construir (pasos 1 al 4), explorar, conjeturar y validar (pasos 5 y 6); inicialmente, se solicitaba la construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD, el cual, al trazar su diagonal AC, se descompone en dos triángulos ABC y ADC. Luego, se pedía construir las circunferencias inscritas a tales triángulos (el procedimiento fue expuesto por el grupo nº 5 en el Taller nº 1), determinar los correspondientes puntos de tangencia con los lados AB, BC, CD y DA y trazar el cuadrilátero determinado por estos puntos. A continuación, se describe e ilustra lo planteado en esta actividad:

1. Construya un cuadrilátero inscribible ABCD (ver Gráfico 64).
2. Construya los triángulos ABC y ADC (ver Gráfico 64).

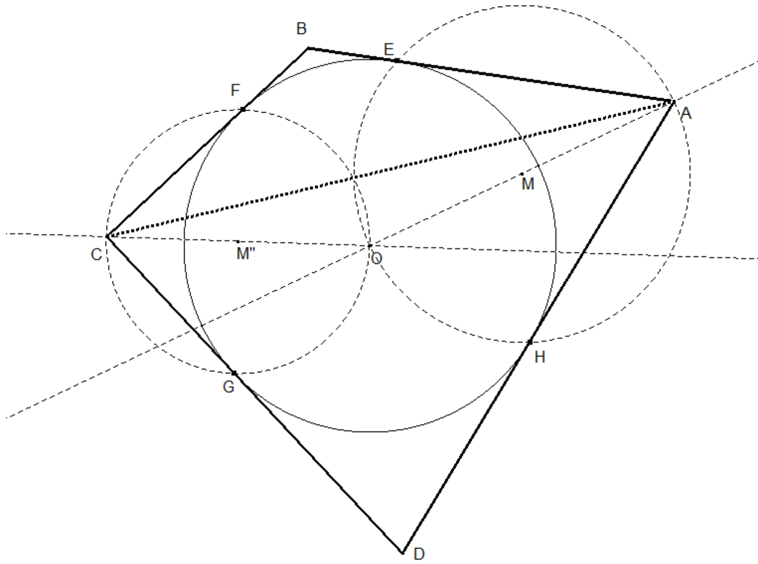


***Gráfico 64*. Construcción de un cuadrilátero inscribible ABCD y de los triángulos ABC y ADC.**

3. Construya la circunferencia inscrita al triángulo ABC. Sean P y Q los puntos de tangencia con los lados AB y BC respectivamente (ver Gráfico 65).

4. Construya la circunferencia inscrita al triángulo ADC. Sean R y S los puntos de tangencia con los lados CD y DA respectivamente (ver Gráfico 65).

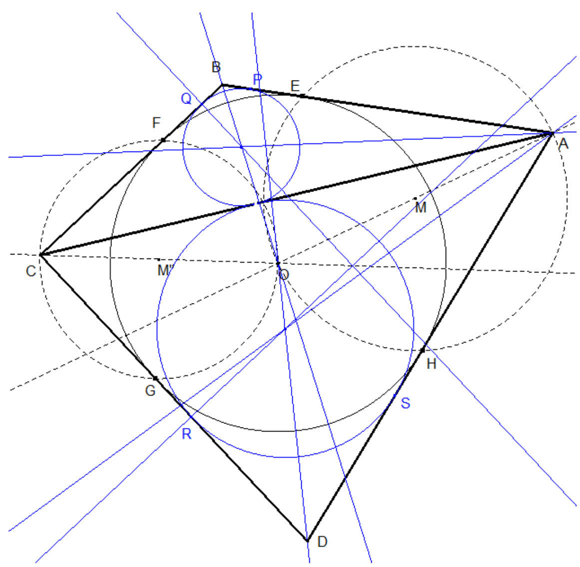


***Gráfico 65*. Construcción de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC y ADC.**

5. ¿Qué observa en relación a tales circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ADC? Justifique su respuesta (ver Gráfico 66).

6. ¿Qué puede decir en relación al cuadrilátero PQRS? Justifique su respuesta (ver Gráfico 66)

.

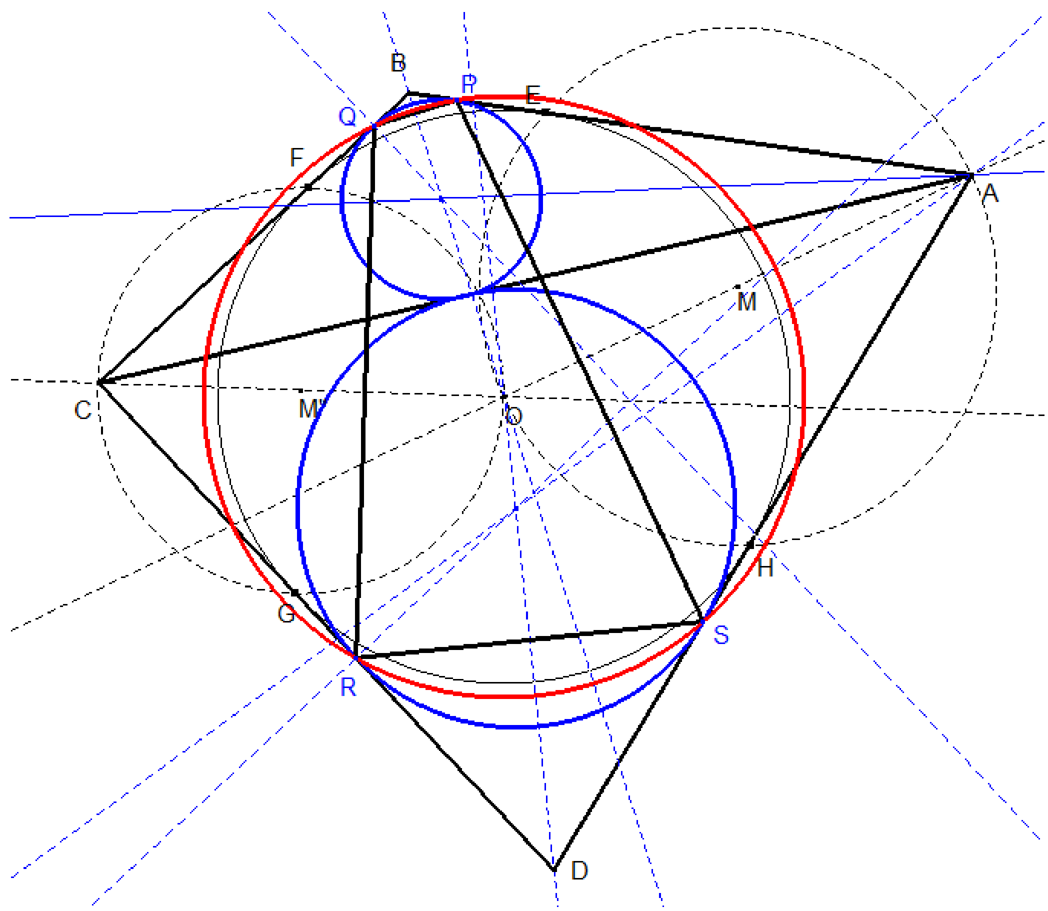


***Gráfico 66*. Construcción de un cuadrilátero concíclico PQRS, a partir del cuadrilátero concíclico ABCD.**

Con lo establecido en los pasos 5 y 6 y, previa exploración de la figura construida en un AGD, se pretendía que los profesores en formación reconocieran que las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ADC son tangentes entre sí y que si se traza la circunferencia con centro en O y radio OS, se observa que tal circunferencia pasa por los puntos P, Q y R y, por lo tanto, el cuadrilátero PQRS es concíclico.

Cuadro 86

Procedimiento de construcción de un cuadrilátero concíclico, a partir de un cuadrilátero inscribible utilizado por el grupo nº 1

Construya un cuadrilátero inscribible ABCD	O	Punto
	C_1	Círculo: O
	P'	Punto (Punto sobre un objeto): C_1
		Recta: P'
	Q'	Punto (Punto sobre un objeto): C_1
	L_1	Recta: Q'
	L_2	Recta (Recta perpendicular): O, L_1
	S'	Punto (Punto sobre un objeto): C_1
		Recta: S'
	R'	Punto (Punto sobre un objeto): C_1
	S	Punto (Punto(s) de intersección): _, C_2
	Q	Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1
	P	Punto (Punto(s) de intersección): _, C_1
		Recta: R'
	R	Punto (Punto(s) de intersección): _, C_1
	A	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	B	Punto (Punto(s) de intersección): _, L_1
	C	Punto (Punto(s) de intersección): L_1, _
	D	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Polígono: A, B, C, D
Construya los triángulos ABC y ADC		Triángulo: A, B, C Triángulo: A, D, C
Construya la circunferencia inscrita al triángulo ABC. Sean P y Q los puntos de tangencia con los lados AB y BC respectivamente		Segmento: A, D Segmento: D, C Segmento: C, A Recta (Bisectriz): A, D, C Recta (Bisectriz): C, A, D Recta (Bisectriz): D, C, A Recta (Bisectriz): A, C, B Recta (Bisectriz): B, A, C Recta (Bisectriz): C, B, A Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto sobre un objeto): _ Círculo: _, _ Punto (Punto sobre un objeto): _
Construya la circunferencia inscrita al triángulo ADC. Sean R y S los puntos de tangencia con los lados CD y DA respectivamente		Círculo: _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Punto (Punto(s) de intersección): _, _

En el Cuadro 86, se describe la construcción realizada por el grupo nº 1, la cual comienza por una construcción inconsistente del cuadrilátero inscribible ABCD. Si se observa, marca un punto P' sobre la circunferencia C_1 y traza una recta que pasa por P' y, luego, determina la intersección de dicha recta con C_1, obteniendo un punto P.; de esta manera la recta P'P es secante a la circunferencia C_1 (ver Gráfico 67). Luego, arrastran el punto P' hasta hacerlo coincidir con el punto P y así, tener una recta tangente a C_1 (ver Gráfico 68).

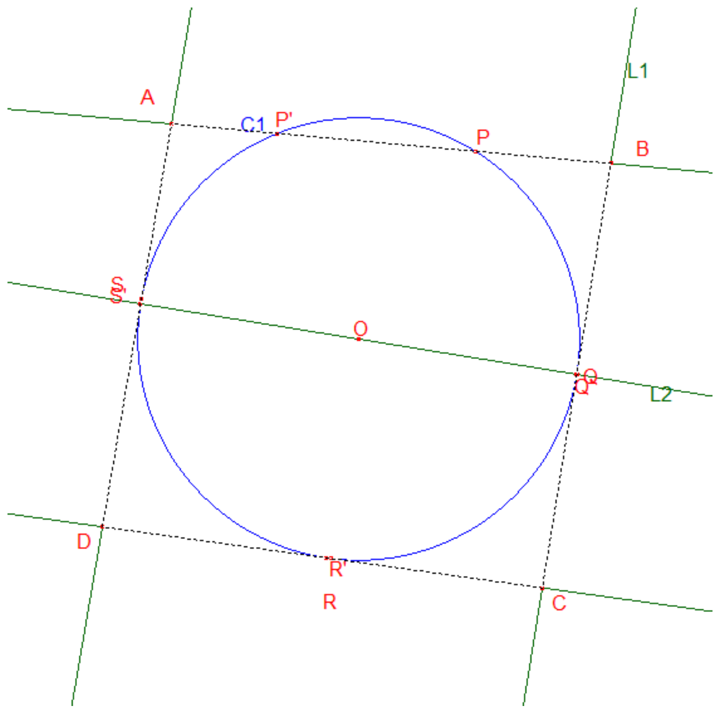


***Gráfico 67*. Construcción inconsistente de un cuadrilátero inscribible realizada por el grupo nº 1 en la actividad nº 7 del taller nº 3.**

Cabe recordar que, en el Cuadro 84, se describió un procedimiento de construcción inconsistente de un cuadrilátero inscribible por parte del mismo grupo nº 1; sin embargo, la opción de arrastrar un punto hasta hacerlo coincidir con otro, le permitió mostrar una figura de un cuadrilátero ABCD inscribible (ver Gráfico 68); de modo que, el arrastre fue empleado para forzar una configuración geométrica y no para explorar relaciones entre los objetos geométricos involucrados en esta construcción.

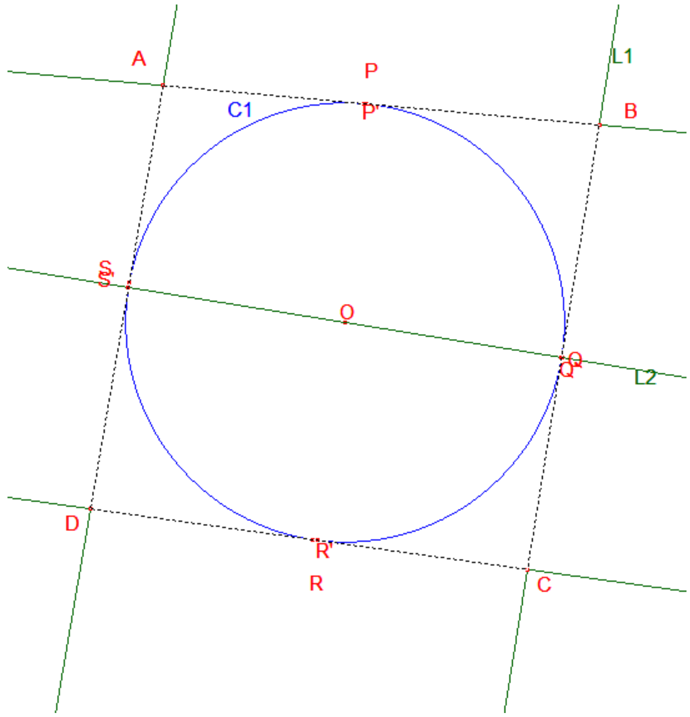


***Gráfico 68*. Imagen donde se observa como hicieron coincidir el punto P’ con el punto P.**

Construyeron las circunferencias inscritas a los triángulos ABC y ADC (ver gráfico 69), pero no respondieron las preguntas formuladas en los pasos nº 5 y 6 de la actividad nº 7 del taller nº 3.

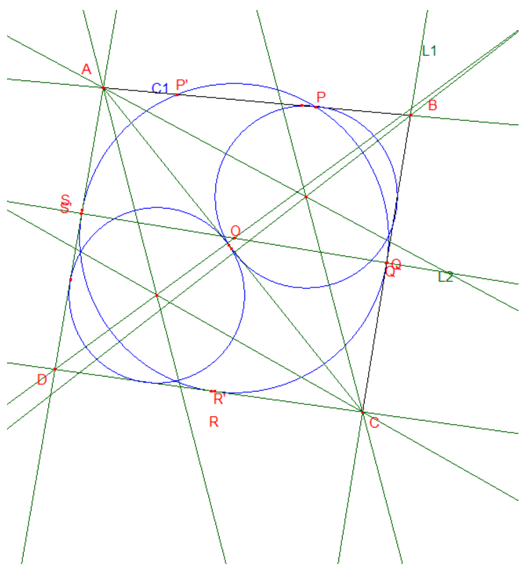


***Gráfico 69*. Imagen de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC y ADC.**

Al emplear la opción mostrar la descripción (ver Cuadro 87), se nota que el grupo nº 2 realizó una construcción consistente de un cuadrilátero concíclico PQRS, a partir del cuadrilátero inscribible ABCD (ver Gráfico 70)

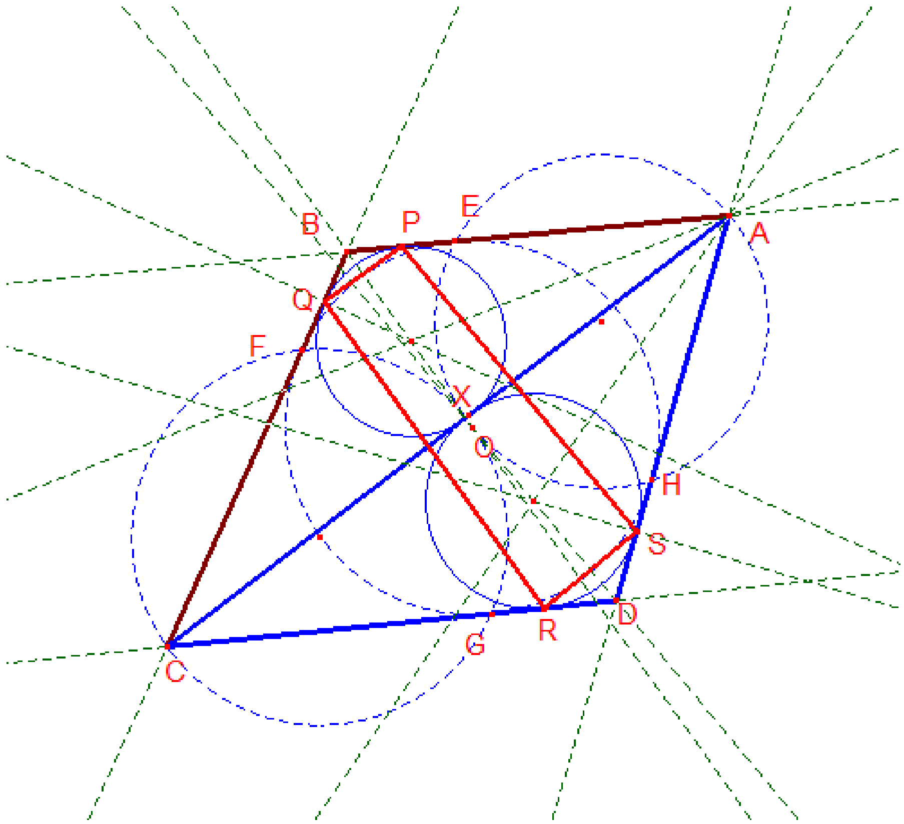


Gráfico 70. Construcción de un cuadrilátero concíclico PQRS, a partir de un cuadrilátero ABCD, realizada por el grupo nº 2.

En relación con la primera pregunta formulada: ¿Qué observa en relación a tales circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ADC? Justifique su respuesta, el grupo nº 2 expresó que <u>*observamos que*</u> *son tangentes en el punto que denotamos X*, pero no justifican su respuesta, más allá de lo que se percibe en pantalla. No respondieron la segunda pregunta.

Cuadro 87

Procedimiento de construcción de un cuadrilátero concíclico, a partir de un cuadrilátero inscribible utilizado por el grupo nº 2

Construya un cuadrilátero inscribible ABCD		Punto
		Sistema de coordenadas: _
	O	Punto
		Círculo: O
	A	Punto
		Segmento: O, A
		Punto (Punto sobre un objeto): _
		Punto (Punto medio): _
		Círculo: _, A
	H	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	E	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Recta: A, E
		Recta: A, H
	C	Punto
		Segmento: C, O
		Punto (Punto medio): _
		Círculo: _, O
	G	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	F	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Recta: C, F
		Recta: C, G
	D	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	B	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Polígono: C, B, A, D
Construya los triángulos ABC y ADC		Triángulo: A, B, C
		Triángulo: A, C, D
Construya la circunferencia inscrita al triángulo ABC. Sean P y Q los puntos de tangencia con los lados AB y BC respectivamente		Recta (Bisectriz): C, B, A
		Recta (Bisectriz): B, A, C
		Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Recta (Recta perpendicular): _, _
	Q	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Círculo: _, Q
Construya la circunferencia inscrita al triángulo ADC. Sean R y S los puntos de tangencia con los lados CD y DA respectivamente		Recta (Bisectriz): C, A, D
		Recta (Bisectriz): A, D, C
		Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Recta (Recta perpendicular): _, _
	S	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Círculo: _, S
	P	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	R	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Punto (Punto(s) de intersección): _, _
	X	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Punto (Punto(s) de intersección): _, _
		Polígono: Q, P, S, R

En el Cuadro 88, se da a conocer la valoración en cuanto a los usos técnicos y heurísticos que los participantes le dieron al Cabri II en el taller nº 3; para ello, se ha considerado, en primer lugar, sus producciones en las primeras cuatro actividades referidas a los cuadriláteros concíclicos (CC) y, en segundo lugar, lo realizado en las actividades nº 6 y 7 sobre cuadriláteros inscribibles (CI). En cuanto a las actividades nº 1, 2, 3 y 4 realizaron las construcciones con regla y compás, siguiendo las indicaciones dadas; sin embargo, en la actividad nº 4 (demostración del teorema de Ptolomeo), los grupos nº 2 y 3 introdujeron una construcción auxiliar inconsistente, estableciendo así condiciones que no se corresponden con las asumidas en el proceso de prueba.

Cabe recordar que, en las actividades nº 1 y 2, los tres grupos construyeron un cuadrilátero concíclico y, mediante exploraciones con el Cabri II - marcar, medir y sumar las medidas de los ángulos opuestos - establecieron que los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios y procedieron a dar una prueba, siguiendo un esquema de argumentación analítico. En la actividad nº 3, construyeron un cuadrilátero concíclico a partir de un cuadrilátero cualquiera y, haciendo uso, de la conjetura formulada y validada en la actividad nº 2, presentaron la prueba correspondiente. El grupo nº 3 no realizó las actividades nº 6 y 7; el grupo nº 1 realizó una construcción inconsistente de un cuadrilátero inscribible, ya que, no logró trazar con regla y compás segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella (ver Cuadro 84 y Gráfico 61), pero teniendo en cuenta la figura dada en el Gráfico 60, da una prueba de la propiedad enunciada; el grupo nº 2 realizó una construcción consistente de un cuadrilátero inscribible (ver Cuadro 85) y da una prueba, basándose en el hecho que dos segmentos tangentes a una circunferencia trazados desde un punto exterior a ésta son congruentes.

La actividad nº 7 implicaba construir un cuadrilátero inscribible, trazar una de sus diagonales descomponiéndolo en un par de triángulos y, luego, trazar las circunferencias inscritas a tales triángulos; una vez hecho esto, explorar la figura y formular algunas conjeturas. El grupo nº 1 siguió presentando dificultades para trazar un cuadrilátero inscribible, mientras que el grupo nº 2 efectúo la construcción en forma consistente y solo observaron que las circunferencias circunscritas eran tangentes. No lograron reconocer que el cuadrilátero PQRS es concíclico.

Cuadro 88
Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller nº 3

Usos del Cabri II	Indicadores	G1		G2		G3	
		CC	CI	CC	CI	CC	CI
Uso Técnico (UT)	1. Empleo de las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás.	3	1	2	3	2	-
	2. Empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman tal construcción.	3	1	2	2	2	-
	3. Empleo de herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla.	3	3	3	3	3	-
Uso Heurístico (UH)	1. Construcción	3	1	2	3	2	-
	2. Exploración	3	1	2	2	2	-
	3. Formulación de conjeturas	3	1	3	1	3	-
	4. Validación	3	1	3	1	3	-

Nota: Se ha empleado una escala cualitativa de alto (3), medio (2) y bajo (1) para valorar los usos del Cabri II. Cuadrilátero conciclíco (CC) y cuadrilátero inscribible (CI)

En lo referente a las justificaciones dadas, en las actividades nº 2, 3 y 4, los tres grupos presentaron *pruebas*, siguiendo un *esquema de argumentación analítico* y apoyándose en definiciones y propiedades geométricas conocidas.

Una vez analizadas las distintas producciones de cada uno de los grupos de trabajo (teniendo en cuenta los grupos conformados para los talleres nº 1 y 2) y, atendiendo a la reunión de las competencias matemáticas en las dos categorías propuestas por Niss y Højgaard (2011): la capacidad de formular y responder preguntas sobre y por medio de las matemáticas (ver Cuadro 89) y el ser capaz de hacer frente con el lenguaje y las herramientas matemáticas (ver Cuadro 70), así como las habilidades geométricas asociadas a las competencias matemáticas y los niveles de razonamiento geométrico (ver Cuadro 18 del Capítulo IV), se presentan las competencias matemáticas puestas en práctica por los profesores en formación cuando realizaron las actividades planteadas en los talleres que conformaron el curso de RPG_AC.

Cabe señalar que, en los Cuadros 89 y 90, no se indicaron las habilidades geométricas asociadas al nivel 1 de reconocimiento, ya que, se considera que los integrantes de los diferentes grupos las ponen en juego sin ningún tipo de dificultad. En cada una de las celdas de las columnas G_i, con i = 1, 2, 3, 4, 5 de los mencionados cuadros, se indica el número correspondiente con el nivel de razonamiento geométrico y se han sombreado aquellas habilidades que se manifestaron con mayor frecuencia, posiblemente por la naturaleza de las tareas propuestas.

Cuadro 89
Competencias matemáticas puestas en práctica por los participantes del curso de RPG_AC (Parte I)

Código	Competencias Matemáticas	G1	G2	G3	G4	G5
PR2.1	Utilizan los conceptos matemáticos	2	2	2	2	2
PR3.1	Reconocen relaciones entre diferentes tipos de figuras	3	3	3	3	3
PR3.2	Reconocen las propiedades comunes de diferentes tipos de figura	3	3	3	3	3
PR4.1	Comprenden distinciones entre definiciones, postulados y teoremas	4	4	4	4	4
PR4.2	Utilizan información de una figura para deducir más información	4	4	4	4	4
PR4.3	Deducen consecuencias a partir de la información dada	4	4	4	4	4
PR4.4	Deducen propiedades de las figuras geométricas a partir de la información dada	4	4	4	4	4
PR4.5	Utilizan las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones	4	4	4	4	4
A4.1	Siguen, validan y elaboran argumentos matemáticos de diferentes tipos	4	4	4	4	4
P y RP2.1	Resuelven problemas en los que están presentes todos los datos	2	2	2	2	2
P y RP3.1	Aplican estrategias conocidas para resolver un problema	3	3	3	3	3

En cuanto a la primera categoría propuesta por Niss y Højgaard (2011), los profesores en formación fueron capaces de utilizar conceptos y propiedades geométricas estudiadas en los cursos de Geometría I y Geometría II, para elaborar una cadena de razonamiento lógico-deductiva, siguiendo – por lo general – un esquema de afirmaciones y razones y, así, validar las conjeturas formuladas o probar los teoremas enunciados (pensar y razonar). Además, ellos han sido capaces de elaborar argumentos matemáticos (explicaciones y pruebas), manifestando esquemas de argumentación analíticos, apoyados en esquemas de argumentación fácticos y empíricos (argumentar). Asimismo, resolvieron problemas geométricos que involucraban la realización de construcciones con regla y compás (plantear y resolver problemas). Es preciso indicar que, por el tipo de tareas matemáticas propuestas, los participantes no se vieron en la necesidad de poner en juego habilidades asociadas a la competencia de modelización (ver Cuadro 89). También se observa que lograron poner en práctica habilidades al nivel 4 de razonamiento geométrico (deducción) en cuanto a las competencias de pensar y razonar y argumentar; mientras que alcanzaron el nivel 3 (clasificación) en la competencia de plantear y resolver problemas.

En el Cuadro 90, se muestra como los profesores en formación fueron capaces de reconocer y utilizar apropiadamente las herramientas disponibles en el Cabri II para elaborar construcciones consistentes en un AGD y, luego, explorarlas con el propósito de identificar características invariantes; asimismo, ellos fueron capaces de reconocer y emplear apropiadamente materiales y recursos distintos como el doblado de papel y un SGD (materiales y recursos). También, construyeron figuras conociendo sus partes componentes y las relaciones existentes entre ellas, introduciendo construcciones auxiliares de ser necesario (representar). Presentaron por escrito (en los informes de trabajo) y en forma oral (sesiones de socialización del conocimiento), las descripciones de los procedimientos de construcción empleados; logrando expresar con un lenguaje apropiado las relaciones existentes entre los objetos geométricos y usar las notaciones matemáticas convenidas.

Se consideran que alcanzaron el nivel 4 de deducción para las competencias de representación y uso de materiales y recursos; así como el nivel 3 de clasificación para las competencias de comunicación y lenguaje simbólico.

Cuadro 90
Competencias matemáticas puestas en práctica por los participantes del curso de RPG_AC (Parte II)

Código	Competencias Matemáticas	G1	G2	G3	G4	G5
C2.1	Describen adecuadamente varias propiedades de una figura	2	2	2	2	2
C3.1	Establecen definiciones con claridad y precisión	3	3	3	3	3
C3.2	Formulan frases que muestran relaciones entre figuras o entre los elementos que las conforman	3	3	3	3	3
C4.1	Reconocen que información da un problema y qué información hay que hallar	4	4	4	4	4
R2.1	Expresan en un dibujo la información verbal dada	2	2	2	2	2
R2.2	Utilizan las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla	2	2	2	2	2
R3.1	Construyen una figura, conociendo sus partes componentes y las relaciones existentes entre ellas	3	3	3	3	3
R4.1	Deducen a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica	4	4	4	4	4
R4.3	Reconocen cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura	4	4	4	4	4
LS2.1	Utilizan algoritmos y fórmulas	2	2	2	2	2
LS2.2	Manejan enunciados con símbolos	2	2	2	2	2
LS3.1	Comprenden relaciones entre el lenguaje formal y el lenguaje natural	3	3	3	3	3
M y R1.1	Reconocen las operaciones básicas (o las acciones) que pueden realizarse con los materiales o recursos disponibles.	1	1	1	1	1
M y R2.1	Utilizan los materiales o recursos para construir figuras geométricas, a partir de las condiciones dadas	2	2	2	2	2
M y R3.1	Exploran las construcciones realizadas, con el propósito de identificar invariantes geométricas (es decir, relaciones entre los elementos que conforman dicha figura)	3	3	3	3	3
M y R4.1	Demuestran dominio de los materiales y recursos y los emplean para diseñar actividades con contenido geométrico	4	4	4	4	4

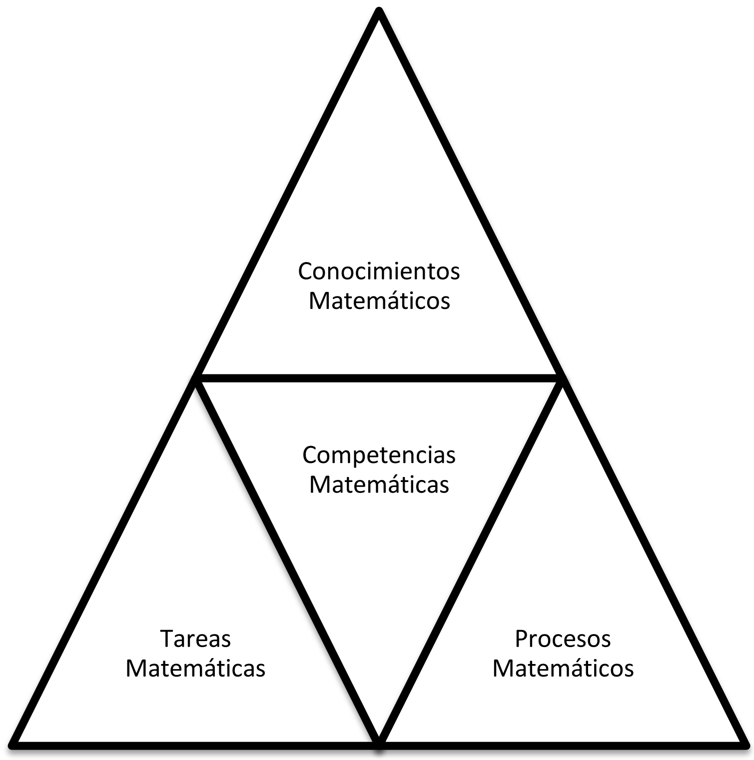


***Gráfico 71*. Componentes de las competencias matemáticas.**

Es preciso tener en cuenta que, en esta ocasión, las competencias matemáticas exhibidas por los profesores en formación están vinculadas con el tipo de tareas propuestas y los objetivos de aprendizaje; el desarrollo de las competencias matemáticas es progresivo, depende de las situaciones - problemas abordadas y de los conocimientos matemáticos y extra – matemáticos estudiados o que se requieran estudiar, así como los procesos de razonamiento que se llevan a cabo; entre los cuales, según Gutiérrez y Jaime (1998), destacan los siguientes: reconocimiento, definición, clasificación y demostración (ver Gráfico 71). Según el modelo de Van Hiele, estos procesos evolucionan progresivamente a través de los llamados niveles de razonamiento geométrico y tal evolución está vinculada a la participación activa en la realización de determinadas tareas y a la naturaleza del contenido geométrico estudiado.

Balance general sobre las competencias matemáticas

Se analizaron las producciones orales y escritas de los pequeños grupos que conformaron los participantes del curso de RPG_AC en cada uno de los talleres descritos en el Capítulo IV, atendiendo a tres aspectos relevantes: (a) usos técnico y heurístico del Cabri II (ver Cuadros 34, 35, 36 y 37); (b) tipo de justificaciones dadas (ver Cuadro 38); (c) esquemas de argumentación empleados (ver Cuadro 39).

En el Taller nº 1 sobre construcciones geométricas con regla y compás, se observó que en cuanto al uso técnico del Cabri II, los cinco grupos emplearon las herramientas que se correspondían con el procedimiento dado o descrito por ellos (UT.1) y, además, fueron capaces de mejorar su apariencia (UT.3), con el propósito de facilitar la identificación de los objetos que conformaban tal construcción; además, hicieron uso limitado de las herramientas de verificación de relaciones entre objetos geométricos (UT.2), limitándose a medir segmentos y ángulos. En cuanto al uso heurístico, pudiera decirse que las acciones de construir, explorar y validar se hicieron presentes (UH. 1, 2 y 4), aunque no formularon conjeturas (UH. 3).

Los grupos nº 1, 3 y 5 dieron explicaciones, a partir del reconocimiento de las relaciones existentes entre los objetos que intervienen en una construcción, mencionando definiciones y propiedades geométricas conocidas, sin llegar a establecer una cadena de razonamiento lógico-deductiva; mientras que los grupos nº 2 y 4 presentaron pruebas siguiendo el esquema de afirmaciones y razones.

En los cinco grupos, cuando recurrieron a la opción revisar la construcción, prevaleció el uso de esquemas de argumentación fácticos; sin embargo, en el caso de los grupos nº 2 y 4, los cuales lograron presentar pruebas, se manifestó un esquema de argumentación analítico apoyado en esquemas de argumentación empíricos o fácticos.

En el Taller nº 2 sobre construcciones con doblado de papel y en un AGD, se notó que fueron capaces de usar eficientemente las herramientas de construcción en correspondencia con el procedimiento descrito (UT. 1) y las herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla (UT. 3); en cuanto al uso de las herramientas para verificar relaciones entre objetos que intervienen en la construcción (UT. 2), además de medir, hicieron uso del botón simetría axial. Asimismo, fueron capaces de construir, explorar y validar, dando una explicación (grupos nº 2 y 3) o una prueba (grupos nº 1, 4 y 5) (UH. 1, 2 y 4); sin embargo, aunque en los informes escritos no formularon conjetura alguna (UH. 3), sí lo hicieron durante las exposiciones. En los grupos nº 1, 4 y 5 se observó un esquema de argumentación analítico, apoyado en un esquema de argumentación fáctico.

En el Taller nº 3 sobre cuadriláteros, los participantes se reorganizaron en tres grupos, en vez de los cinco que conformaron para los talleres anteriores; en las primeras cuatro actividades, las cuales se correspondían con el estudio de los cuadriláteros concíclicos, los tres equipos siguieron el esquema construir → explorar → conjeturar → validar, demostrando dominio de los usos técnico y heurístico del Cabri II. Además, presentaron pruebas siguiendo el esquema de afirmaciones y razones de la conjetura formulada en la actividad nº 2 y de los teoremas enunciados en las actividades nº 3 y 4, manifestando así esquemas de argumentación analítico. Ningún grupo realizó la actividad nº 5 (construir un cuadrilátero concíclico, dadas las longitudes de sus lados). El grupo nº 3 no realizó las actividades nº 6 y 7, las cuales estaban relacionadas con los cuadriláteros inscribibles. El grupo nº 1 presentó inconvenientes para construir un cuadrilátero inscribible, ya que, no lograron realizar una construcción consistente de rectas tangentes a una circunferencia dada desde un punto exterior a la misma; sin embargo, sus integrantes fueron capaces de presentar una prueba válida del teorema enunciado en la actividad nº 6. El grupo nº 2 realizó una construcción consistente de un cuadrilátero inscribible y demostró el teorema dado. En la actividad nº 7, el grupo nº 2 realizó la construcción, siguiendo el procedimiento dado, pero no reconocieron las relaciones existentes entre ciertos objetos geométricos presentes.

Teniendo como referencia las habilidades asociadas a las competencias matemáticas y los niveles de razonamiento geométrico (ver Cuadro 18), se considera que los participantes en el curso de RPG alcanzaron el nivel 4 de deducción en las siguientes competencias (ver Cuadros 89 y 90):

- Pensar y razonar: utilizan información de una figura para deducir más información (PR4.2); deducen consecuencias a partir de la información dada PR4.3); deducen propiedades de las figuras geométricas a partir de la información dada (PR4.4) y utilizan las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones (PR4.5).

- Argumentar: siguen, validan y elaboran argumentos matemáticos de diferentes tipos (A4.1).
- Representar: deducen a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica (R4.1) y reconocen cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura (R4.3).
- Emplear materiales y recursos: demuestran dominio de los materiales y recursos y los emplean para diseñar actividades con contenido geométrico (M y R4.1)

Por último, es importante señalar que lograron poner en práctica habilidades correspondientes a los niveles 2 y 3 de análisis y relaciones o clasificación, como se indica en los Cuadros 89 y 90, lo cual parecía plausible, dada la evolución progresiva del razonamiento geométrico y de las competencias matemáticas.

CAPÍTULO VI

COMPETENCIAS DIDÁCTICAS

En el Capítulo II, se establecieron algunas ideas que han orientado el análisis de la información y que han sido tomadas en cuenta para analizar las competencias didácticas puestas en práctica por los profesores en formación cuando diseñaron actividades didácticas con contenidos geométricos; entre ellas, las siguientes:

1. Las competencias profesionales específicas del profesor de Matemática estarían asociadas a los dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008): el conocimiento del contenido matemático (CCM) y el conocimiento didáctico del contenido (CDC); de allí que, se hayan estudiado tanto las competencias matemáticas como las competencias didácticas de los participantes del curso de RPG_AC cuando realizaron ciertas tareas.
2. En el cuadro 5 del Capítulo II, se señalan los conocimientos y destrezas que, según Azcaráte (1998), deben alcanzar y desarrollar los profesores de Matemática y que se han asociado con las categorías del conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 2005).
3. En el proyecto Tunning para América Latina, las competencias específicas más valoradas en el área de Educación – domina los saberes de las disciplinas del área de conocimiento de su especialidad y diseña y operacionaliza estrategias de enseñanza – aprendizaje según contextos - guardan relación con los dominios del conocimiento profesional docente.
4. Godino (2009) establece un conjunto de pautas orientadas al análisis de los conocimientos didáctico – matemáticos que se requieren para diseñar, desarrollar y evaluar una unidad didáctica con contenido matemático.
5. Niss y Højgaard (2011) expresan que un profesor de Matemática debe poseer una gama de competencias matemáticas y didácticas específicas para lograr un desempeño profesional idóneo (ver Cuadros 14 y 15 en el Capítulo II).

Cuadro 91
Conocimientos y competencias didáctico - matemáticas

Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008)	Habilidades didáctico – matemáticas (Azcarate, 1998; Godino, 2009; Niss y Højgaard, 2011)	Competencias Didáctico – Matemáticas (*)
Conocimiento del contenido matemático	1. Identifica los conceptos y las propiedades involucradas en una tarea matemática.	Pensar y Razonar **(PR)**
	2. Reconoce y entiende los alcances y limitaciones de los conceptos matemáticos dados.	
	3. Determina cuando las condiciones existentes son necesarias y/o suficientes para que un objeto matemático tenga una cierta propiedad.	
	4. Tiene una comprensión básica sobre los tipos de preguntas y respuestas que pertenecen a la Matemática como asignatura para una determinada etapa educativa.	
	1. Plantea y formula problemas y preguntas que pueden conducir a las actividades de resolución de problemas entre los estudiantes.	Plantear y resolver problemas **(P y RP)**
	2. Conoce y aplica distintos procedimientos para resolver un problema matemático.	
	3. Es capaz de plantear y tratar un problema de diversas maneras, teniendo en cuenta el alcance del contenido y contexto matemático involucrado.	
	4. Establece posibles generalizaciones del problema resuelto.	
	1. Establece conexiones con otros temas matemáticos o con otras áreas de conocimiento	Modelar **(M)**
	1. Justifica la solución dada un problema matemático	Argumentar **(A)**
	2. Es capaz de seguir, caracterizar, comentar y evaluar el razonamiento de los estudiantes y, además, ayudarles a desarrollar su propia capacidad de razonamiento matemático	
	3. Distingue entre el momento en que una afirmación tiene la naturaleza de una prueba, y cuando es "simplemente" una buena explicación o ilustración.	

Cuadro 91 (cont.)

Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008)	Habilidades didáctico – matemáticas (Azcarate, 1998; Godino, 2009; Niss y Højgaard, 2011)	Competencias Didáctico – Matemáticas (*)
Conocimiento del contenido matemático	4. Es capaz de seguir, caracterizar, comentar y evaluar el razonamiento de los estudiantes y, además, ayudarles a desarrollar su propia capacidad de razonamiento matemático.	Argumentar (A)
	5. Explica las ideas básicas de las pruebas sin tener necesariamente todos los detalles en cuenta; es decir, es capaz de revelar las ideas básicas y controlar el grado en el que la parte más técnica de la prueba deba ser incluida en un contexto de enseñanza concreta.	
	1. Utiliza diferentes sistemas de representación.	Representar (R)
	2. Establece prioridades entre diversas formas de representación de un objeto matemático, en un contexto de enseñanza específico.	
	3. Ayuda a los estudiantes a establecer vínculos entre las diversas formas de representación de un objeto matemático.	
	1. Usa en forma apropiada los símbolos matemáticos.	Lenguaje Simbólico (LS)
	2. Es capaz de traducir ida y vuelta entre el lenguaje matemático simbólico y el lenguaje natural, y ser capaz de estimular la traducción correspondiente entre los estudiantes.	
	3. Propicia la aceptación de una serie de convenciones matemáticas.	
	1. Establece un diálogo sobre temas matemáticos con los estudiantes.	Comunicar (C)
	2. Comprende e interpreta las expresiones escritas y orales de los estudiantes.	
	3. Es capaz de expresarse sobre asuntos matemáticos en variadas maneras, teniendo en cuenta el nivel educativo y las circunstancias propias de una situación de enseñanza.	

Cuadro 91 (cont.)

Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008)	Habilidades didáctico – matemáticas (Azcarate, 1998; Godino, 2009; Niss y Højgaard, 2011)	Competencias Didáctico – Matemáticas (*)
Conocimiento del contenido matemático	1. Conoce y utiliza diversas ayudas y herramientas que sean accesibles para las actividades matemáticas en el nivel que enseñan; actividades tales como desarrollo de conceptos, estudio de relaciones y patrones, examen de conjeturas, etc.	Ayudas y Herramientas (M y R)
	2. Utiliza programas computarizados para crear nuevas formas de trabajar con conceptos y propiedades matemáticas.	
	3. Reconoce las ventajas y las limitaciones de los diversos programas computarizados como hojas de cálculo, software de cálculo simbólico, de geometría dinámica, simuladores, paquetes estadísticos, etc.	
	4. Juzga la utilidad de estas herramientas matemáticas en función a los objetivos de aprendizaje previstos.	
Conocimiento didáctico del contenido matemático (*Conocimiento del currículo*)	1. Analiza y evalúa diversos documentos curriculares relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, como los programas de estudio y los libros de texto, con el propósito de identificar los objetivos de aprendizaje que se persiguen y el alcance de los temas a ser estudiados en cierta etapa educativa.	Competencia Curricular (CC)
	2. Elabora planes de clases que contribuyan al logro de los objetivos de aprendizaje y el tratamiento didáctico – matemático del tema a ser estudiado.	
	3. Establece conexiones con otros temas del programa de estudio del área de Matemática mediante la realización de la tarea planteada o con otras materias que integran el plan de estudio de cierta etapa educativa.	
Conocimiento didáctico del contenido matemático (*Conocimiento del contenido y los estudiantes*)	1. Conoce las peculiaridades del aprendizaje matemático, los posibles errores que pudieran cometer y las dificultades que confrontarían los estudiantes al realizar una tarea matemática.	Competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje (C_Apr)

Cuadro 91 (cont.)

Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008)	**Habilidades didáctico – matemáticas (Azcarate, 1998; Godino, 2009; Niss y Højgaard, 2011)**	**Competencias Didáctico – Matemáticas (*)**
Conocimiento didáctico del contenido matemático (*Conocimiento del contenido y los estudiantes*)	2. Conoce e implementa estrategias didácticas para motivar e incentivar la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.	Competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje (C_Apr)
	3. Ayuda a los estudiantes a identificar los errores cometidos y sus posibles causas, con el propósito de clarificar dudas o superar confusiones o malas interpretaciones de conceptos y propiedades matemáticas (tratamiento didáctico del error).	
	4. Propicia que los estudiantes establezcan relaciones del tema objeto de estudio con otros temas ya estudiados, procurando que logren ir configurando una estructura conceptual propia de la Matemática para esa etapa educativa.	
	5. Selecciona o diseña instrumentos que permitan revelar y evaluar los aprendizajes matemáticos de un grupo de estudiantes.	
Conocimiento didáctico del contenido matemático (*Conocimiento del contenido y la enseñanza)*	1. Planifica y lleva a cabo secuencias didácticas concretas en función de los objetivos de aprendizaje propios de la etapa educativa.	Competencia para gestionar y evaluar la enseñanza (C_Ens)
	2. Selecciona o diseña tareas que motiven a los estudiantes a involucrarse en actividades propias del quehacer matemático como la resolución de problemas o la justificación de las soluciones o resultados.	
	3. Selecciona o elabora materiales y recursos didácticos que favorezcan el aprendizaje de un tema matemático.	
	4. Gestiona y regula el proceso de enseñanza y aprendizaje y la dinámica de la clase de Matemática.	
	5. Evalúa tanto los procesos como los productos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.	

(*) Se ha decidido hablar de competencias didáctico – matemáticas, ya que, se ha tenido en cuenta la descripción didáctica de las competencias matemáticas de un profesor de Matemática (Niss y Højgaard, 2011).

En el Cuadro 91, se ha establecido la relación entre los dominios del conocimiento matemático para la enseñanza y las competencias didáctico – matemáticas o simplemente competencias didácticas del Profesor de Matemática, incluyendo las habilidades que los profesores en formación tendrían que desarrollar y poner en práctica cuando diseñan y gestionan un proceso de enseñanza y aprendizaje en cierta etapa educativa; obviamente, las habilidades mencionadas no representan una lista exhaustiva, pero se consideran suficientes para analizar las competencias didácticas de un grupo de profesores en formación.

Cabe señalar que, además de los tres talleres de resolución de problemas geométricos descritos en el Capítulo IV, en el curso de RPG_AC, una vez concluida las actividades previstas en el taller nº 1 sobre construcciones geométricas con regla y compás en un AGD, se planteó una tarea didáctica a ser realizada durante el desarrollo del curso: seleccionar un tema geométrico contemplado en los programas de estudio del área de Matemática en Educación Media y, aplicando la noción de análisis didáctico, diseñar una unidad didáctica con contenido geométrico. Para ello, la facilitadora les entregó como material de apoyo lo descrito en el Cuadro 92, los cuales una vez leídos y analizados, fueron discutidos en una de las sesiones de trabajo, con el propósito de clarificar dudas y tomar decisiones para iniciar el diseño de la unidad didáctica correspondiente al tema geométrico seleccionado.

Una vez seleccionado el tema geométrico por cada uno de los grupos de trabajo, éstos procedieron, haciendo uso del mapa de enseñanza y aprendizaje (MEA) propuesto por Orellana Chacín (2002), al *análisis del contenido matemático*, considerando - por lo menos - cinco de los diez cuadros que integran este mapa. Para ello, los profesores en formación revisaron libros de texto utilizados en las clases de Matemática y consultaron otras fuentes documentales impresas o en formato electrónico. Los avances preliminares eran presentados a la facilitadora, con el propósito de revisarlos y hacer observaciones o comentarios en el momento oportuno.

Cuadro 92
Materiales que orientaron el diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico

Material de Apoyo	Intencionalidad
Orellana Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática*, 11(2), 21- 42.	Emplear el mapa de enseñanza y aprendizaje (MEA) como herramienta que facilita el análisis de contenido del tema geométrico seleccionado.
(*) Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Granada: Comares.	Dar a conocer y propiciar el desarrollo de los tres componentes del análisis didáctico en la fase de diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico, siguiendo el esquema utilizado por Iglesias (2008) para diseñar las unidades didácticas que conforman los cursos de Geometría I y Geometría II de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay.

Nota: (*) Se entregó la versión preliminar de esta publicación.

Teniendo establecido el alcance del tema a ser tratado, se centraron en el *análisis cognitivo*, tomando en consideración las habilidades geométricas asociadas a cada uno de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele: esto les permitió establecer los objetivos de aprendizaje acordes al desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes de educación media.

Conociendo los aspectos a ser estudiados en relación con el tema geométrico seleccionado y los objetivos de aprendizajes previstos, así como otros factores que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, se dispusieron a diseñar las tareas que les presentarían a los estudiantes de bachillerato, lo cual se corresponde con el *análisis de la instrucción*.

Cabe señalar que, como cierre del curso de RPG_AC, los participantes presentaron lo que ellos denominaron una versión preliminar de su propuesta didáctica, tomando la decisión de darle continuidad a esta tarea durante periodo académico siguiente en la Fase de Ejecución de Proyectos Educativos (FEPE, curso obligatorio del componente de fase profesional docente de la especialidad de Matemática de la UPEL Maracay); ellos consideraron la necesidad de centrarse en la ejecución de esta tarea con una perspectiva investigativa, lo cual les permitiría profundizar en la comprensión y aplicación de los referentes teóricos y metodológicos que sustentaron el diseño de estas unidades didácticas. La FEPE se desarrolló bajo la modalidad de seminario, con lo cual se profundizó en la discusión de los documentos mencionados en el Cuadro 92 y otras lecturas complementarias sobre el modelo de Van Hiele y la Didáctica de la Geometría. En función a ello, las versiones preliminares fueron revisadas, ampliadas y mejoradas dando como resultado tres propuestas didácticas, las cuales fueron dadas a conocer, como ponencias en extenso, en VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática de la UPEL Maracay; evento realizado durante los días 14 y 15 de noviembre de 2013. En el siguiente cuadro, se presentan estas producciones:

Cuadro 93
Unidades didácticas con contenidos geométricos

Grupo nº	Denominación	Tema	Año
1	Teorema de Thales. Una propuesta didáctica	Teorema de Thales	3er año de Educación Media
2	Pitágoras y el teorema de la mujer casada. Una propuesta didáctica	Teorema de Pitágoras	3er año de Educación Media
	Blog: El mundo de Pitágoras en la era tecnológica	Teorema de Pitágoras	3er año de Educación Media
3	La circunferencia y el círculo. Una propuesta didáctica	Circunferencia y Círculo	2do año de Educación Media

Dado que estas unidades didácticas fueron presentadas como ponencias en las mencionadas jornadas, los documentos siguieron una estructura propia de este tipo de documentos: introducción, referentes teóricos, propuesta didáctica propiamente dicha, conclusiones y referencias consultadas.

En la introducción, como se muestra en el Cuadro 94, se refieren a: los rasgos relevantes de la Geometría como área del conocimiento matemático y sus implicaciones didácticas y a la manera cómo se gestiona (o cómo debería gestionarse) su proceso de enseñanza y aprendizaje; también señalan los objetivos de la investigación llevada a cabo por cada uno de estos grupos.

Cuadro 94
Asuntos tratados en la introducción y objetivos de la investigación

Grupo nº	Asuntos tratados en la introducción	Objetivos de la investigación
1	• La Matemática como ciencia formal: "*La Matemática, como ciencia formal, se estructura de forma axiomática y se apoya en el desarrollo del pensamiento lógico para la deducción y validación del conocimiento matemático*". • La Geometría permite establecer relaciones espaciales con el entorno: "*la Matemática se divide en áreas tales como: Aritmética, Álgebra, Análisis, Estadística y Geometría; siendo ésta última la que permite establecer relaciones espaciales con el entorno".* • Implicaciones didácticas: "*la enseñanza de la Geometría exige, por una parte, propiciar experiencias de aprendizaje orientadas al desarrollo de habilidades geométricas como reconocimiento de gráficos y cuerpos geométricos por su forma y tamaño, visualización de los elementos que configuran una construcción geométrica, establecer semejanzas y diferencias entre figuras y cuerpos geométricos, construcción de objetos geométricos a partir de ciertas condiciones dadas, etc. y, por otra, dar justificaciones lógicamente válidas y, así, progresivamente ir aproximándose a la prueba o demostración formal*"	*Desde una perspectiva investigativa, haciendo uso de la noción de análisis didáctico, se diseñó y desarrolló una propuesta didáctica, partiendo de la elaboración de un mapa de enseñanza y aprendizaje sobre el Teorema de Thales y la identificación de las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele, con el propósito de que los estudiantes (3er año de Educación Media) reconozcan las definiciones implicadas en el Teorema de Thales y la aplicación del mismo en la resolución de problemas*
2	• Actitud de rechazo hacia el estudio de la Matemática: "*El estudio de la Matemática tiende a ser rechazado por los estudiantes, por diversas razones, entre ellas: la falta de motivación e interés hacia el estudio, la forma de enseñar de los profesores, el carácter abstracto de las nociones matemáticas, la carencia de adecuados hábitos de estudio y materiales didácticos apropiados, etc.*". • Escaso abordaje de los temas geométricos en las clases de Matemática: "*los docentes de Matemática suelen enfatizar en los contenidos aritméticos y algebraicos, descuidando el estudio de la Geometría; situación que no le permite a los estudiantes percatarse de la relación existente entre los*	*Este trabajo tiene como propósito diseñar una unidad didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje del Teorema de Pitágoras (3er año de educación media) centrada en el uso de un juego didáctico denominado Pitagora´s-manía (adaptación de reto al saber) y el uso de la tecnología a través de la elaboración y utilización de un Blog en línea. Asimismo, con su diseño y puesta en práctica,*

Cuadro 94 (cont.)

Grupo nº	Asuntos tratados en la introducción	Objetivos de la investigación
2	*… contenidos geométricos con el mundo que nos rodea*". • Posibles causas: "*esto quizá se deba a la poca relación que establece el docente entre la vida cotidiana y la geometría intuitiva, espacial y lógica, así como la inseguridad que presenta el docente con respecto al dominio de conceptos geométricos".*	*… se pretende ofrecerles a los estudiantes oportunidades para desarrollar ciertas habilidades geométricas relacionadas con el estudio del Teorema de Pitágoras, en ambientes con énfasis lúdico y tecnológico*
3	• Razones que justifican la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría: "*La Geometría ayuda a estimular y ejercitar habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas. Da oportunidades para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir. Tales oportunidades pueden ayudar a los estudiantes a aprender cómo descubrir relaciones por ellos mismos y convertirse en mejores resolutores de problemas*". • Problemática abordada: "*La problemática abordada en este trabajo está centrada en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en la educación media y la misma se presenta mediante algunas interrogantes que sirvieron de hilo conductor para la investigación y, además, permitieron establecer los objetivos: ¿Cuáles aspectos se abordarán sobre la Geometría de la Circunferencia y el Círculo teniendo en cuenta el mapa de enseñanza y aprendizaje?, ¿Cuáles relaciones se pueden establecer entre los aspectos elegidos?, ¿Cuáles serán las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico que se espera sean desarrolladas por los estudiantes cuando estudien el tema relacionado con circunferencia y círculo?, ¿Cuáles son las estrategias, materiales y recursos didácticos idóneos para organizar la enseñanza referida a la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media?".*	Objetivo general: *Diseñar una unidad didáctica dirigida al estudio de la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media.* Objetivos específicos: *1. Elaborar el mapa de enseñanza y aprendizaje referido a la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media.* *2. Identificar las habilidades geométricas que se pretende sean desarrolladas por los estudiantes durante el estudio del tema seleccionado.* *3. Describir las estrategias didácticas a ser puestas en práctica durante el desarrollo de la unidad didáctica referida a la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media.*

En cuánto a los referentes teóricos, los tres grupos aplicaron la noción de análisis didáctico, teniendo en cuenta sus tres componentes en la fase de diseño; comenzaron por realizar el análisis del contenido geométrico seleccionado, apoyándose en la elaboración de un MEA.

El grupo nº 1 manifestó que "*para dar inicio al análisis de contenido, se revisaron los programas de estudio (1ero, 2do y 3er año) correspondientes a la asignatura de Matemática, con el propósito de identificar los contenidos y objetivos vinculados con el área de Geometría*", los cuales mostraron en un cuadro resumen. Seguidamente, establecen que para el estudio de los teoremas de Pitágoras, Thales y Euclides en 3er año de educación media, se "*requiere que el estudiante maneje, por lo menos, definiciones y propiedades relacionadas con la Geometría del Triángulo*" (conocimientos previos). También, señalan que revisaron algunos libros de texto utilizados por profesores y estudiantes de 3er año de educación media y, en función a ello, elaboraron el siguiente MEA:

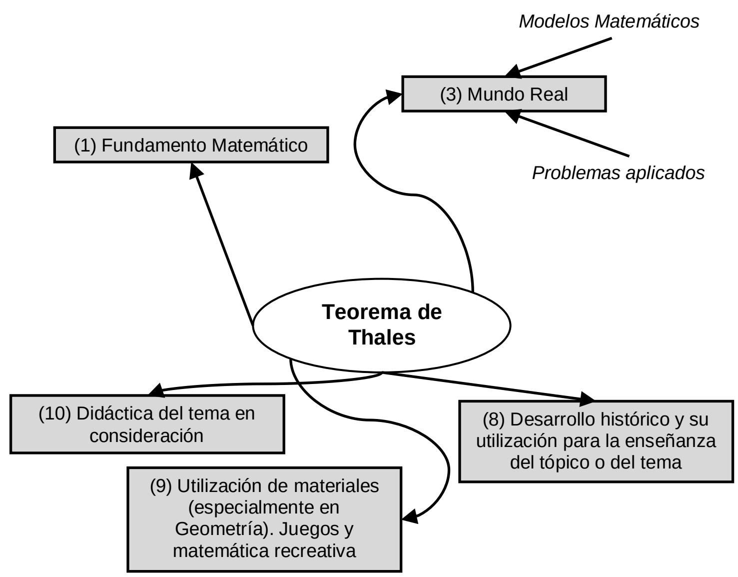


***Gráfico 72*. Mapa de enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales elaborado por el grupo nº 1**

Luego, en un cuadro, muestran una síntesis de los contenidos y objetivos asociados a cada uno de los aspectos que conforman el MEA del teorema de Thales, siguiendo el orden en el cual serían abordados (ver Cuadro 95).

Cuadro 95
Resumen de los aspectos tratados en el mapa de enseñanza y aprendizaje del Teorema de Thales.

Aspecto	Objetivo	Contenido
Historia de la Geometría	Dar a conocer una breve reseña histórica de la Geometría en la antigua Grecia y los aportes de Thales de Mileto.	Geometría Griega y Biografía de Thales de Mileto.
Fundamento Matemático	Establecer las definiciones de razones y proporciones. Enunciar e ilustrar la aplicación de los criterios de semejanza de triángulos.	Razones, proporcionalidad y Semejanza de Triángulos.
Aplicación en el mundo real	Presentar imágenes semejantes a objetos animados o inanimados del entorno.	Figuras semejantes. Construcciones a escala.
Utilización de materiales. Juego y matemática recreativa	Reconocer la semejanza y la proporcionalidad en distintas figuras planas.	Proporcionalidad y semejanza geométrica

Nota: Tomado de la propuesta elaborada por el Grupo nº 1.

Seguidamente, como parte del análisis cognitivo, procedieron a establecer las habilidades asociadas a los tres primeros niveles de razonamiento geométrico establecidos en el modelo de Van Hiele, siguiendo la propuesta realizada por Hoffer (1981); además, presentaron un cuadro resumen (ver Cuadro 96) indicando las habilidades geométricas correspondientes a los dos primeros niveles (reconocimiento y análisis).

Cuadro 96
Habilidades geométricas que se pretende sean alcanzadas por los estudiantes de 3er año de educación media cuando estudian el Teorema de Thales.

Habilidades Geométricas	Reconocimiento	Análisis
Visuales	Reconoce formas geométricas en los objetos que lo rodean al igual que los dibujos y las construcciones que observa.	Identifica las partes que conforman una figura plana (por ejemplo, vértices, lados y ángulos internos de un polígono) o un cuerpo geométrico (por ejemplo, vértices, aristas y caras).
Verbales	Utiliza de manera adecuada términos geométricos cuando describe objetos del entorno.	Describe relaciones entre los elementos que conforman una figura, haciendo uso del lenguaje apropiado.

Cuadro 96 (cont.)

Habilidades Geométricas	Reconocimiento	Análisis
De Dibujo	Realizar trazos finos en la construcción de objetos geométricos con cierto grado de complejidad.	Dibuja una figura que satisfaga las condiciones dadas (por ejemplo, dibuja un triángulo conociendo las longitudes de sus tres lados).
Lógicas	Descompone una figura en diferentes partes, logrando así formar figuras más sencillas.	Establece relaciones de congruencia y semejanza entre dos o más figuras dadas, atendiendo a su forma y tamaño.

Nota: Tomado de la propuesta elaborada por el Grupo nº 1.

Por último, teniendo en cuenta el alcance del contenido geométrico y los objetivos de aprendizaje, así como las habilidades geométricas que se pretende pongan en juego los estudiantes de 3er año, el grupo nº 1 procedió al diseño de las actividades didácticas, las cuales estuvieron centradas en el uso de materiales y recursos como: videos educativos, software de Geometría Dinámica y juegos didácticos.

Cuadro 97
Estrategias didácticas diseñadas por el grupo nº 1

Materiales y recursos didácticos	Descripción de la estrategia didáctica
Videos educativos	Comienzan señalando que "*cualquier video se puede utilizar como recurso didáctico, siempre que el docente sea capaz de adaptarlo a los requerimientos de la asignatura*"; por ello, previa búsqueda en la plataforma www.youtube.com, seleccionaron un video, preparado teniendo como fondo musical la canción compuesta por el grupo Les Luthiers, en el cual "*se parte de la observación de imágenes y construcciones de la ciudad de Buenos Aires (pero similares a algunas que pudieran ubicarse en ciudades venezolanas), con el propósito de identificar rectas paralelas, rectas paralelas cortadas por una secante, segmentos proporcionales, etc., hasta llegar a la demostración del Teorema de Thales*".
Software de Geometría Dinámica	Emplearon el Cabri II Plus como una pizarra electrónica, mediante la cual "*se podrían mostrar construcciones geométricas con regla y compás relacionadas con el trazado de rectas paralelas y las construcciones de triángulos semejantes, incluyendo la división de un segmento en n partes iguales. Además, con el software, es posible marcar ángulos y medirlos, así como medir las longitudes de segmentos y, haciendo uso de la calculadora, calcular la razón entre las longitudes de dos segmentos dados*".

Cuadro 97 (cont.)

Materiales y recursos didácticos	**Descripción de la estrategia didáctica**
Juegos didácticos	Teniendo en consideración que "*la actividad lúdica es un ejercicio que proporciona alegría, placer, gozo y satisfacción, captando la atención de los estudiantes y permitiendo combinar la participación, la comunicación, el trabajo en equipo, la creatividad y la obtención de conocimientos en el aula*", trabajaron en el diseño de dos juegos didácticos: Encuentra mi pareja (tipo memoria) y Aceptando el reto (tipo rally). (Ver anexos H-1 y H–2)

Nota: Cuadro elaborado con información tomada de la propuesta sobre el teorema de Thales.

En el Cuadro 97, se observa que las estrategias didácticas diseñadas por el grupo nº 1, se corresponden con los contenidos y objetivos de aprendizaje previamente establecidos y, además, se apoyan en el uso de recursos computarizados como los videos disponibles en la plataforma www.youtube.com para introducir el tema y motivar a los estudiantes al reconocimiento de rectas paralelas y figuras semejantes, así como del Cabri II Plus para trazar rectas paralelas, dividir un segmento en n partes iguales y construir un triángulo semejante a otro triángulo dado. Asimismo, basándose en juegos conocidos, elaboraron dos juegos didácticos, con el propósito de propiciar la participación de los estudiantes de 3er año de educación media en tareas matemáticas bajo un ambiente lúdico (Ver anexos H-1 y H–2).

El grupo nº 2 expresó su intención que "*el teorema de Pitágoras no sólo quede en una simple fórmula*", sino que los estudiantes de educación media "*sean capaces de relacionarlo con su entorno, su vida diaria, con la tecnología y utilicen dichos conocimientos para solucionar cualquier eventualidad que se le presente en su día a día*"; por ello, elaboraron un MEA del teorema de Pitágoras (ver Gráfico 73), en el cual tomaron en cuenta los siguientes aspectos: (a) fundamentación teórica, (b) desarrollo histórico, (c) relaciones con el mundo real y otros tópicos matemáticos, (d) exploraciones gráficas, (e) dibujo a mano alzada y cálculo manual, y (f) juego y matemática recreativa.

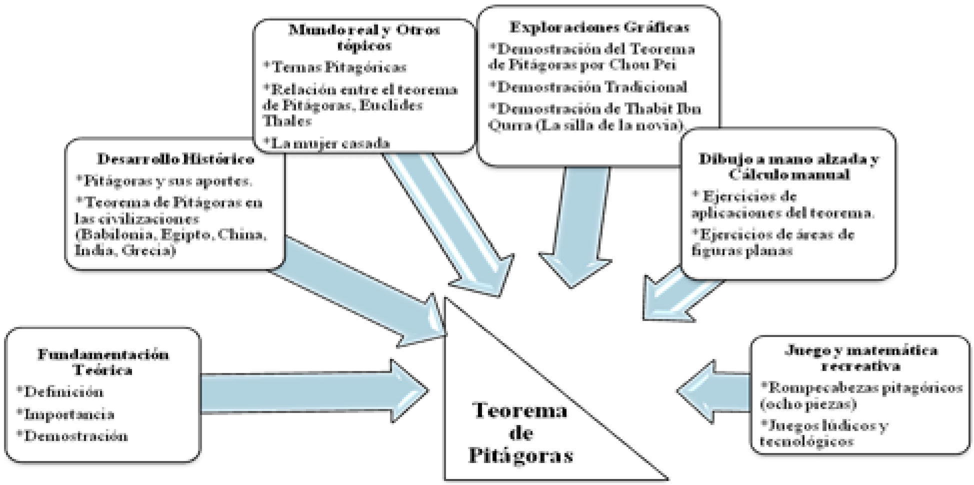


Gráfico 73. **Mapa de enseñanza y aprendizaje del teorema de Pitágoras elaborado por el grupo nº 2**

Una vez delimitado el alcance de los contenidos geométricos a ser contemplados en esta unidad didáctica, el grupo nº 2, al igual que el grupo nº 1 y como parte del análisis cognitivo, identificó las “*habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico que se mencionan en el modelo de Van Hiele y que se espera sean desarrolladas y puestas en práctica por los estudiantes cuando estudien el tema relacionado con el Teorema de Pitágoras*”; entre estas habilidades destacan: (a) Reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, (b) identificación de los elementos que conforman a los distintos objetos geométricos, (c) establecimiento de relaciones entre estos elementos , y (d) y su aplicación en la resolución de problemas. Además, puntualizan que, en 3er año de educación media, “*se suelen considerar los tres primeros niveles de razonamiento geométrico y, aunque, se trabaje con la verificación empírica de propiedades, no es habitual que se aborde la demostración de teoremas como el de Pitágoras*”. Para el grupo nº 2, los estudiantes de educación media, cuya capacidad de abstracción está desarrollándose, “*pudieran aún presentar ciertas dificultades para manejar la formalidad matemática, ya que el paso de un nivel a otro de razonamiento geométrico se produce en forma progresiva a través del tiempo*”.

Para llevar a cabo el análisis de la instrucción, el grupo nº 2, a diferencia del grupo nº 1, consideró las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele. En el

Cuadro 98, se presenta la estructura de esta unidad didáctica sobre el teorema de Pitágoras.

Cuadro 98
Aspectos que conforman la unidad didáctica diseñada por el grupo nº 2

Subunidades didácticas	*El análisis de la instrucción se materializó a través del diseño de tres subunidades didácticas centradas en el estudio del Teorema de Pitágoras, las cuales guardan una estrecha relación con las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele*.
Sesiones de clases y duración	Estimaron siete (7) sesiones de clases, de cuarenta (40) minutos de duración cada una.
Materiales y recursos didácticos	Para el desarrollo de estas actividades, consideraron usar los siguientes materiales o recursos didácticos: (a) *Jugando con Ingenio*, (b) *Pitágora´s - Manía*, y (c) *Blog*.
Objetivos de aprendizaje	*Con esta propuesta se aspira que el estudiante: (a) Reconozca que el teorema de Pitágoras se aplica a triángulos rectángulos. (b) Calcule la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, conociendo las longitudes de los otros dos lados. (c) Visualice distintas demostraciones del Teorema de Pitágoras y comience a familiarizarse con el uso del pensamiento lógico – deductivo en Matemática. (d) Determine áreas de figuras planas, mediante la aplicación del teorema de Pitágoras. (e) Valorice la aplicación del Teorema de Pitágoras en situaciones de la vida cotidiana*.

Nota: Cuadro elaborado con información tomada de la propuesta sobre el teorema de Pitágoras.

Las tres subunidades didácticas se corresponden con los tres primeros niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, tal como se muestra en el Cuadro 99; en el mismo, se presenta una descripción de las actividades previstas en cada una de las fases de aprendizaje (información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración). Se observa que las actividades previstas están orientadas al logro de los objetivos de aprendizaje y, además, tienen en cuenta los aspectos mencionados en el MEA.

Cuadro 99
Subunidades didácticas que conforman la unidad didáctica sobre el teorema de Pitágoras

Fases de Aprendizaje	Visualización o reconocimiento	Análisis	Relaciones, clasificación u ordenamiento
Información	*El profesor introduce el tema a tratar y, mediante la formulación de ciertas preguntas, (…) procura repasar los conocimientos previos sobre el estudio de la Geometría del Triángulo, ya que, los mismos son necesarios para el estudio del Teorema de Pitágoras.*	*El docente hará una síntesis de las definiciones y propiedades relacionadas con el estudio de los triángulos, (…) y seguidamente, se presentará una reseña histórica sobre Pitágoras de Samos, enfatizando en su vinculación con el teorema que lleva su nombre.*	*Una vez mostradas algunas demostraciones del teorema, se enfocará el trabajo en la demostración realizada por Pitágoras de Samos, siendo ésta la más comúnmente utilizada a nivel escolar, donde se reconocerán los conceptos básicos y, se procederá mediante la demostración formal, a la deducción de su fórmula.*
Orientación dirigida	*El docente guiará a sus alumnos en la construcción de diferentes tipos de triángulos, haciendo uso de materiales como papel, cartulina, foami, cartón, etc., con la finalidad que identifiquen sus vértices, lados y ángulos internos y, además, determinen las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos internos y los clasifiquen según los criterios establecidos.*	*El docente enunciará el Teorema de Pitágoras y mostrará cómo puede aplicarse para hallar la longitud de la hipotenusa, conocidas las longitudes de los catetos o para hallar la longitud de un cateto, conocidas las longitudes de la hipotenusa y del otro cateto en un triángulo rectángulo.*	*El docente dará a conocer un juego didáctico denominado Pitágora's Manía, con el propósito que los estudiantes estén en la capacidad de comprender, relacionar y poner en práctica lo aprendido durante las clases, así como también estimular la creatividad, el pensamiento estratégico, la socialización y compañerismo.*
Explicitación	*El docente, teniendo como referencia las actividades hasta ese momento realizadas, propiciará un conversatorio, con el propósito de intercambiar ideas, para ir afianzando los conocimientos geométricos en sus estudiantes, como también clarificar dudas o atender las inquietudes que éstos tengan.*	*Con la finalidad, de aproximar a los estudiantes al estudio de la demostración matemática, el docente introducirá a través de fichas nuevos términos como teorema, hipótesis, tesis y demostración, procurando aclarar las dudas que pudieran surgir.*	*El docente motivará a los estudiantes para que comenten, a partir de sus vivencias, los resultados obtenidos (aciertos y equivocaciones) y, en caso de ser necesario, aclarar dudas o responder las preguntas que pudieran surgir.*

Cuadro 99 (cont.)

Fases de Aprendizaje	Visualización o reconocimiento	Análisis	Relaciones, clasificación u ordenamiento
Orientación libre	*Se le pedirá a los estudiantes que construyan con regla y compás triángulos que satisfagan ciertas condiciones conocidas como LLL, LAL y ALA y, además, identifiquen sus elementos y cuáles de los triángulos construidos son triángulos rectángulos*	*Se darán a conocer algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras que suelen presentarse en los libros de texto e incentivando a los estudiantes para que identifiquen hipótesis (lo dado) y tesis (lo que piden demostrar) y traten de comprender el proceso demostrativo. Algunas demostraciones pueden mostrarse gráficamente o mediante construcciones de figuras geométricas realizadas con cartulina o cartón*	*El docente pedirá a sus estudiantes que traten de identificar situaciones cotidianas, donde sería factible aplicar el Teorema de Pitágoras, para luego discutirlas en clases.*
Integración	*El docente pedirá a sus estudiantes que elaboren un resumen gráfico (mapa conceptual, mapa mental, cuadro resumen, etc.) en relación al tema tratado y en función a lo que ellos han entendido, que expliquen los procedimientos usados, que mencionen los instrumentos o materiales utilizados y cómo podrían relacionar lo que se ha hecho con aspectos de la vida real.*	*Se conformarán pequeños grupos de trabajo (2 o 3 integrantes) y a cada uno de estos grupos se les entregará un folleto denominado Jugando con Ingenio, similar a un "pasatiempo", en el cual se proponen cinco (5) actividades (sopa de letras, exploración, cruzadas, crucijuego y damero).*	*Como cierre del desarrollo de esta propuesta didáctica, el docente, ayudado por sus alumnos, hará una síntesis del tema estudiado, destacando los logros alcanzados en cuanto al dominio de los contenidos geométricos y la responsabilidad y eficiencia demostrada en la realización de las actividades cumplidas*

Nota: Cuadro elaborado con información tomada de la propuesta sobre el teorema de Pitágoras.

Como se observa en el Cuadro 93, el grupo nº 2 también asumió el diseño de un blog denominado "*el mundo de Pitágoras*", con el propósito de "*permitir que los estudiantes de tercer año de educación media interactúen con lo visto en las clases de Matemática, establezcan dudas acerca de este tema, propongan información de interés en relación al teorema de Pitágoras y sean partícipes de su propio conocimiento*"; de esta manera, el blog como recurso didáctico serviría como complemento a las actividades realizadas en las sesiones de clases descritas en el Cuadro 99. En los Anexos I-1, I-2, I-3 y I-4, se presentan las cuatro (4) actividades que inicialmente fueron incorporadas a este blog: (a) A través del tiempo, (b) Recordemos; (c) Demostrando, y (d) Pitágoras y nuestro mundo; seguidamente, a modo de síntesis, en el Cuadro 100, se dan a conocer los objetivos de cada una de estas actividades; observándose que lo propuesto en el blog, guarda correspondencia con los contenidos tratados y los objetivos de aprendizaje planteados en las tres subunidades didácticas descritas en el Cuadro 99.

Cuadro 100
Objetivo de cada una de las cuatro actividades incorporadas al blog

Actividad	Objetivo
A través del tiempo	Que el estudiante conozca el origen del teorema de Pitágoras y su recorrido a lo largo del tiempo. Por lo que podrá responder a preguntas tales como: a) ¿Quién fue Pitágoras? b) ¿Cómo surge el teorema de Pitágoras? c) ¿Cuáles fueron las civilizaciones donde se evidenció el uso del teorema?
Recordemos	Que el estudiante repase los conocimientos previos y necesarios para la comprensión del Teorema de Pitágoras. Por lo que podrá responder a preguntas tales como: a) ¿Qué es un triángulo rectángulo? b) ¿Cuáles son las propiedades de los triángulos? c) ¿Qué es un teorema? d) ¿Cuáles son los elementos de un teorema? e) ¿Cuál es la importancia del teorema de Pitágoras?
Demostrando	Que el estudiante analice y comprenda una de las demostraciones del teorema de Pitágoras; por medio de una construcción interactiva. De esta manera el estudiante podrá: a) Entender el enunciado del teorema. b) Asimilar de manera eficaz lo planteado en el teorema. c) Conjeturar y validar algunos aspectos de la demostración.

Cuadro 100 (cont.)

Actividad	Objetivo
Pitágoras y nuestro mundo	a) Conocer la relación existente entre el teorema de Pitágoras, el teorema de Euclides y el Teorema de Tales. b) Establecer el uso que se le ha dado al teorema de Pitágoras en la arquitectura y en la jerga mundial. De esta manera podrá: c) Establecer semejanzas y diferencias entre los teoremas mencionados anteriormente. d) Explorar las construcciones y deducir su relación matemática (teorema de Pitágoras).

Nota: Cuadro elaborado con información tomada de la propuesta sobre el teorema de Pitágoras

Asimismo, los integrantes del grupo nº 2 señalaron que "*es necesario entender que cada actividad que se proponga en un blog educativo debe contar con una estructura determinada; en este caso, las actividades propuestas siguieron una distribución como la presentada en los Cuadros 2 al 5*" (ver Anexos I-1, I-2, I-3 y I-4), ya que, "*de esta manera, se establecen claramente los objetivos de aprendizaje a alcanzar y el cómo se espera que los estudiantes lo logren, procurando así delinear un escenario de actuación docente, en dónde se conozcan las acciones a seguir para un funcionamiento eficaz y uso adecuado del blog por parte de los usuarios*". De esta manera, se observa que el diseño de un blog educativo fue valorado no sólo como un recurso tecnológico innovador, sino como un recurso didáctico con objetivos bien definidos y como complemento a las actividades realizadas en clases.

El grupo nº 3 establece una clara correspondencia entre las preguntas que los guiaron durante la ejecución de la tarea, los objetivos específicos propuestos y los componentes del análisis didáctico en su fase de diseño como se ilustra en el Cuadro 101. Además, la tarea estuvo orientada a "*diseñar una unidad didáctica dirigida al estudio de la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media".*

En cuanto a los referentes teóricos empleados, este grupo estableció que: "*En el análisis de contenido, se trabajó con el mapa de enseñanza y aprendizaje propuesto por Orellana Chacín (2002), teniendo en consideración los siguientes aspectos: (a) Fundamentación matemática, (b) Reseña histórica, (c) Relación con el mundo real,* *(d) Relación con otros tópicos o temas matemáticos y (e) Dibujo y cálculo con tecnología. Para el análisis cognitivo se utilizó el modelo de razonamiento geométrico propuesto, en 1957, por los esposos Van Hiele y, finalmente, en el análisis de la instrucción se emplearon las estrategias, materiales y recursos didácticos idóneos para el desarrollo del tema geométrico considerado, procurando contribuir al logro de los objetivos de aprendizaje por parte de los estudiantes*". Con lo cual, se evidencia el uso de las herramientas sugeridas y discutidas en las clases del curso de RPG_AC.

Cuadro 101
Correspondencia entre interrogantes, objetivos y componentes del análisis didáctico

Interrogantes	Objetivos	Componentes del Análisis didáctico
¿Cuáles aspectos se abordarán sobre la Geometría de la Circunferencia y el Círculo teniendo en cuenta el mapa de enseñanza y aprendizaje? ¿Cuáles relaciones se pueden establecer entre los aspectos elegidos?	Elaborar el mapa de enseñanza y aprendizaje referido a la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media.	Análisis del contenido
¿Cuáles serán las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico que se espera sean desarrolladas por los estudiantes cuando estudien el tema relacionado con circunferencia y círculo?	Identificar las habilidades geométricas que se pretende sean desarrolladas por los estudiantes durante el estudio del tema seleccionado.	Análisis cognitivo
¿Cuáles son las estrategias, materiales y recursos didácticos idóneos para organizar la enseñanza referida a la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media?	Describir las estrategias didácticas a ser puestas en práctica durante el desarrollo de la unidad didáctica referida a la Geometría de la Circunferencia y el Círculo en 2do año de educación media.	Análisis de la instrucción

Nota: Cuadro elaborado con información tomada de la propuesta diseñada por el grupo nº 3

En el Gráfico 74, se muestra el MEA para la Geometría de la Circunferencia y el Círculo, elaborado por el grupo nº 3.

***Gráfico 74*. Mapa de Enseñanza y Aprendizaje para la Circunferencia y Círculo elaborado por el grupo nº 3.**

Una vez presentado el MEA (ver Gráfico 74), el grupo nº 3 describe brevemente el contenido a ser estudiado, en función de los cuadros seleccionados; tal descripción se presenta a modo de síntesis en el siguiente cuadro:

Cuadro 102
Alcance del contenido sobre la Circunferencia y el Círculo

Aspectos considerados en el MEA	Alcance del contenido
Relaciones con el mundo real	*Se establecen las relaciones del tema sobre la circunferencia y el círculo con situaciones cotidianas u objetos del entorno próximo al estudiante; por ello, es recomendable dejar ver la utilidad del conocimiento geométrico, mediante la presentación de problemas provenientes del mundo real, los cuales, por lo general, son susceptibles de ser abordados con un enfoque de laboratorio. Por ejemplo, mediante mediciones y cálculos, hallar la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.*
Historia de la Matemática	*Se presenta una reseña histórica del número Pi (Π); de esta manera, los estudiantes se percatarían del interés de distintas civilizaciones sobre el estudio de la circunferencia y el círculo.*
Fundamentación matemática	*Se establecen las definiciones a utilizar y las propiedades que serán empleadas en la resolución de problemas.*
Relaciones con otros temas matemáticos	*Se vincula el estudio de la circunferencia y el círculo con el de los cuerpos redondos.*
Dibujo y cálculo con tecnología	*En este caso, se utiliza un software de Geometría Dinámica como el Cabri Geometry II Plus.*

En cuanto al análisis cognitivo, el grupo nº 3 tomó en cuenta los tres primeros niveles de razonamiento geométrico e identificó ciertas habilidades geométricas que pretendían sean desarrolladas por los estudiantes de 2do año de educación media cuando ejecuten las actividades planteadas. En el Cuadro 103, se ha elaborado un cuadro resumen con información tomada de la unidad didáctica diseñada por este grupo; en el anexo J, se muestra el cuadro de las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico, las cuales fueron identificadas por el grupo nº 3.

Cuadro 103
Resumen de las habilidades geométricas identificadas por el grupo nº 3

Nivel de Razonamiento Geométrico	Habilidades Geométricas
Reconocimiento	Los estudiantes reconocen por su apariencia global a distintos objetos geométricos; especialmente, son capaces de identificar figuras planas o cuerpos geométricos al observar o manipular objetos físicos como ruedas, balones, CD's, canchas deportivas, etc.
Análisis	Los estudiantes identifican los elementos de una figura geométrica como centro, radio, diámetro y cuerda de una circunferencia y establecen relaciones entre ellos.
Relaciones, clasificación u ordenamiento	Los estudiantes son capaces de establecer definiciones y aplicar propiedades de una figura geométrica en la resolución de problemas.

En relación con el análisis de la instrucción, el grupo nº 3 señaló que éste "*se materializó a través del diseño de cuatro subunidades didácticas centradas en el estudio de la circunferencia y el círculo, las cuales guardan una estrecha relación con las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele, pretendiendo que los estudiantes alcancen las competencias matemáticas previstas por medio de la realización de actividades de modelización matemática, actividades que incorporen el uso de material didáctico manipulable y de un software de geometría dinámica, así como la proyección de un video relacionado con el número Pi (Π)*".

En el Cuadro 104, tomado de la unidad didáctica sobre la circunferencia y el círculo, se describen las cuatro subunidades didácticas, en atención a: contenido, intencionalidad didáctica y actividades previstas. Nótese que, para el desarrollo de las actividades planificadas, contemplaron el uso de los siguientes materiales y recursos didácticos: "(a) *<u>Calculadora</u> (ésta se utilizará para hallar el cociente entre la longitud y el diámetro de una circunferencia), (b) <u>Software de Geometría Dinámica como el Cabri Geometry II Plus</u> (se les mostrarán a los estudiantes construcciones relevantes de la circunferencia, el círculo y los polígonos regulares y, luego, se les pedirá que realicen construcciones de polígonos inscritos en una circunferencia), (c) <u>Geoplano circular</u> (el mismo se utilizará para introducir la noción de rectas tangentes y rectas secantes y, con ello, poder diferenciarlas), y (d)* Objetos del entorno que tengan forma circular *(estos nos servirán para identificar los elementos de una circunferencia y del círculo, así como distinguir entre circunferencia y círculo)*".

Cuadro 104

Descripción de las actividades didácticas diseñadas para el estudio de la circunferencia y el círculo

Denominación	Contenido	Intencionalidad Didáctica	Actividades previstas
La Circunferencia y El Círculo en el Mundo Real	Representación de la circunferencia y el círculo en el mundo real. Relación existente entre la longitud de una circunferencia y el diámetro; es decir, existencia del número Pi (π).	Entender el porqué de la existencia del número Pi (π), a través de la relación existente entre el diámetro y longitud de una circunferencia.	Traer al aula de clase objetos en forma circular para efectuar mediciones y, luego, calcular el cociente dado por la longitud y el diámetro de la circunferencia, y comprender con ello la existencia del número Pi (π).
Reseña Histórica del número π.	Evolución histórica del número π.	Identificar los aportes de distintas civilizaciones al estudio del número pi (π).	Desarrollo de un guión de observación de un video relacionado con el número Pi (π).
La Circunferencia, El Círculo y sus Elementos	Circunferencia: Definición, elementos, longitud. Rectas exteriores, rectas tangentes y rectas secantes a una circunferencia. Círculo: Definición, elementos, área, etc.	Propiciar el reconocimiento de relaciones y propiedades entre los elementos de una circunferencia y un círculo.	Se realizarán construcciones geométricas de la circunferencia y el círculo, con la finalidad de identificar sus elementos y las relaciones existentes entre éstos.
Dibujo y Cálculo con tecnología	Construcción de polígonos inscritos en una circunferencia.	Inscribir polígonos regulares en una circunferencia, haciendo uso de un software de Geometría Dinámica (SGD). Establecer relaciones entre los elementos de un polígono regular y la circunferencia donde está inscrito.	Uso de un SGD como el Cabri Geometry II Plus para efectuar construcciones con regla y compás.

Nota: Tomado de la unidad didáctica diseñada por el grupo nº 3

Cabe señalar que para el desarrollo de estas actividades, el grupo nº 3 estimó siete (7) sesiones de clases, de cuarenta (40) minutos de duración cada una.

Cabe destacar que, a modo de conclusión, los tres grupos valoraron el análisis didáctico como una herramienta que les ayudó a diseñar la correspondiente unidad didáctica con contenido geométrico, como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 105

Valoración del análisis didáctico como herramienta para diseñar unidades didácticas con contenido geométrico

Grupo nº	Valoración
1	*Con el diseño de esta propuesta didáctica, se ha evidenciado la utilidad del análisis didáctico como una herramienta que facilitó la toma de decisiones en cuanto al alcance del tema tratado (biografía de Thales de Mileto y sus aportes al desarrollo de la Geometría en la Grecia Antigua; razones y proporciones; figuras semejantes, criterios de semejanza para triángulos; enunciado, demostración y aplicaciones del Teorema de Thales), las habilidades geométricas que se pretende sean desarrolladas y puestas en práctica por los estudiantes y la planificación de estrategias didácticas que combinaron el uso de un video educativo (con fines informativos y motivacionales), el uso del Cabri Géomètre II Plus como herramienta para realizar construcciones geométricas con regla y compás y efectuar mediciones (tareas reproducibles haciendo uso del juego geométrico) y de los juegos didácticos, valiéndose de la adaptación a estructuras conocidas como los juegos tipo memoria o tipo rally.*
2	*En el diseño y desarrollo de esta propuesta didáctica, se ha tenido la oportunidad de aplicar la noción de análisis didáctico como referente teórico que guió la ejecución de la tarea; surgiendo así la necesidad de atender diferentes significados del tema geométrico seleccionado (Teorema de Pitágoras), apoyándose en el mapa de enseñanza y aprendizaje, así como la identificación de las habilidades geométricas que se pretendía alcanzarán los estudiantes de 3er año cuando realizarán las actividades propuestas. Esto facilita la toma de decisiones por parte de los diseñadores, ya que, existe una racionalidad que la justifica*
3	*El diseño de unidades didácticas con contenido geométrico exige a los docentes de Matemática del dominio tanto del conocimiento disciplinar como del conocimiento didáctico asociado al conocimiento matemático y, por ello, se considera útil el manejo de referentes teóricos como la noción de análisis didáctico, ya que, permite centrarse en asuntos específicos relacionados con el tema a tratar (análisis de contenido), los objetivos de aprendizaje (análisis cognitivo) definidos en términos de habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico y las situaciones de enseñanza y aprendizaje (análisis de la instrucción).*

Asimismo, el grupo nº 1 expresaron que, "*en el proceso de formación inicial de los profesores de Matemática, es necesario que ejecute tareas vinculadas al diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas con contenido matemático, teniendo en consideración los programas de estudio para el área de Matemática, los libros de* *texto más empleados por los docentes, algunos referentes teóricos como el mapa de enseñanza y aprendizaje propuesto por Orellana Chacín (2002) y el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1959), con el propósito de desarrollar y poner en juego su conocimiento profesional matemático y didáctico*".

El grupo nº 2 establece que "*la matemática lúdica permite crear un ambiente que favorece el trabajo colaborativo y la socialización entre compañeros de clases en un ambiente agradable, a la vez que consolidan sus conocimientos sobre la Geometría del Triángulo y aplican el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas*".

El grupo nº 3 considera que "*el diseño y desarrollo de una unidad didáctica en Matemática debe abordarse desde una perspectiva investigativa en el ámbito de la Educación Matemática y que los futuros docentes de Matemática deben apropiarse de herramientas teóricas y metodológicas que les permitan efectuar estas tareas con eficiencia*".

Una vez analizadas cada una de estas unidades didácticas en Geometría, se han identificado ciertos rasgos relevantes:

1. Valoración de la Geometría como un área del conocimiento matemático, así como el reconocimiento de las razones que justifican su enseñanza y los fines formativos que se persiguen (ver Cuadro 94).

2. Utilidad del mapa de enseñanza y aprendizaje propuesto por Orellana Chacín (2002) como herramienta que les facilitó llevar a cabo el análisis del contenido geométrico seleccionado.

Cuadro 106
Aspectos considerados por cada uno de los grupos en su correspondiente MEA

Aspecto	Grupos		
	1	**2**	**3**
1. Fundamento Matemático	X_2	Y_4	Z_3
2. Otros temas de Matemática			Z_4
3. Mundo Real	X_3	Y_6	Z_1
4. Exploración gráfica y numérica previa a los conceptos y teoremas y en los problemas. Motivación mediante otras ciencias		Y_1	
5. Dibujo a mano alzada o cálculo manual		Y_2	

Cuadro 106 (cont.)

Aspecto	Grupos		
	1	**2**	**3**
6. Dibujo y cálculo con tecnología			$\mathbf{Z_5}$
7. Generalización. Problemas abiertos			
8. Desarrollo histórico y su utilización para la enseñanza del tópico o del tema	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{Y_3}$	$\mathbf{Z_2}$
9. Utilización de materiales (especialmente en Geometría). Juegos y matemática recreativa	$\mathbf{X_4}$	$\mathbf{Y_5}$	$\mathbf{Z^*}$
10. Didáctica del tema en consideración	$\mathbf{X^*}$		

En el Cuadro 106, se presenta un resumen de los aspectos considerados por cada uno de los grupos al momento de elaborar su MEA; el subíndice indica el lugar que ocupó cada uno de los aspectos contemplados en la secuencia didáctica seguida por cada uno de los grupos

Se observa que los aspectos comunes fueron: (a) fundamento matemático, (b) mundo real, (c) desarrollo histórico y su utilización para la enseñanza del tópico o del tema, y (d) Utilización de materiales (especialmente en Geometría). Juegos y matemática recreativa. Nótese que el estudio de la fundamentación matemática (conceptos y propiedades) no fue abordado al inicio, como suele suceder en muchas clases de Matemática; más bien el tema se introduce mediante *la presentación de una breve reseña histórica de la Geometría en la antigua Grecia y los aportes de Thales de Mileto* (Grupo nº 1), o la exploración gráfica a partir de *la construcción de diferentes tipos de triángulos* y la *identificación de sus elementos previa al estudio de definiciones y propiedades relacionadas con el estudio de la Geometría del Triángulo* (Grupo nº 2), o *las relaciones del tema sobre la circunferencia y el círculo con situaciones cotidianas u objetos del entorno próximo al estudiante* (grupo nº 3).

3. Dado que la Geometría *permite establecer relaciones espaciales con el entorno* (Grupo nº 1), los tres grupos procuraron establecer relaciones del tema tratado con situaciones del mundo real: (a) construcciones a escalas y reconocimiento de figuras semejantes en fotografías (Grupo nº 1); (b) identificación de situaciones cotidianas, donde sería factible aplicar el teorema de Pitágoras (Grupo nº 2); (c) *presentación de problemas provenientes del mundo real* tales como *hallar la relación*

entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (mediante mediciones y cálculos).

4. Aplicación del modelo de Van Hiele para la identificación de las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico, en función del tema tratado; todos los grupos trabajaron con los tres primeros niveles: reconocimiento, análisis y relación o clasificación, admitiendo así que los estudiantes de 2do y 3er año de educación media no pueden realizar una demostración de un teorema geométrico, aunque si puedan ir aproximándose al formalismo matemático, mediante la comprensión y aplicación de definiciones y propiedades, el seguimiento de una prueba presentada por el profesor y la justificación de los procedimientos empleados al resolver un problema matemático.

5. Selección o elaboración de diversos materiales y recursos didácticos, con énfasis en los ambientes tecnológicos y lúdicos, como se observa en el Cuadro 107. Cabe señalar que, aunque en el curso de RPG_AC, no se abordó, de manera explícita, lo relacionado con la matemática lúdica o recreativa, éste fue un aspecto contemplado por los grupos nº 1 y 2, quienes diseñaron algunos juegos didácticos, teniendo como referencia la estructura de juegos conocidos, con lo cual los estudiantes no tendrían que aprender a jugar, sino pudieran dedicarse a aprender o reforzar conocimientos en la medida que juegan.

Asimismo, se observa que un software de Geometría Dinámica como el Cabri II se utilizó como pizarra electrónica (Grupo nº 1) y así mostrar algunas construcciones con regla y compás, las cuales los estudiantes pudieran realizar en sus cuadernos (entorno de lápiz y papel) o, en caso de disponer de los equipos computarizados, para realizar las construcciones de polígonos inscritos en una circunferencia (Grupo nº 3). El Grupo nº 2 trabajó con las construcciones con regla y compás en un entorno de lápiz y papel.

También, se observó la utilización de recursos disponibles en internet como los videos descargados de la plataforma www.youtube.com o el blog educativo diseñado para complementar el estudio del teorema de Pitágoras.

Cuadro 107
Materiales y recursos empleados en las unidades didácticas diseñadas por los grupos nº 1, 2 y 3.

<table>
<tr><th>Grupo nº</th><th colspan="2">Materiales y recursos didácticos</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td colspan="2">Videos educativos: utilizados para introducir el tema y motivar a los estudiantes al reconocimiento de rectas paralelas y figuras semejantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Software de Geometría Dinámica: empleado como pizarra electrónica para mostrar construcciones con regla y compás relacionadas con el trazado de rectas paralelas y triángulos semejantes.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Juegos didácticos</td><td>Encuentra mi pareja (tipo memoria)</td></tr>
<tr><td>Aceptando el reto (tipo rally)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td colspan="2">Regla y compás: empleados para construir triángulos que satisfagan ciertas condiciones conocidas como LLL, LAL y ALA.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Juegos didácticos</td><td>Jugando con Ingenio (similar a un pasatiempo)</td></tr>
<tr><td>Pitagora’s Manía</td></tr>
<tr><td colspan="2">Blog “El Mundo de Pitágoras”: usado como recurso que complementa las actividades realizadas en las clases presenciales.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td colspan="2">Calculadora: usada para facilitar los cálculos aritméticos cuando se aborden problemas sobre cálculo de la longitud de una circunferencia o cálculo del área de un círculo, conocido su radio (o diámetro).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Software de Geometría Dinámica: construcción de polígonos inscritos en una circunferencia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geoplano circular: empleado para propiciar el reconocimiento de los elementos tanto de una circunferencia como de un círculo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetos del entorno que tenga forma circular: siguiendo un enfoque de laboratorio, efectuar mediciones y, a partir de ello, calcular el cociente entre la longitud y el diámetro de una circunferencia (aproximación al número pi).</td></tr>
</table>

6. La aplicación del análisis didáctico en la fase de diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico pareciera haber favorecido la correspondencia entre los contenidos tratados, los objetivos de aprendizaje y las actividades didácticas diseñadas por los profesores en formación que participaron en el curso de RPG_AC; el análisis didáctico, el MEA y el modelo de Van Hiele recibieron una valoración positiva tal como se mostró en el Cuadro 105.

Seguidamente, teniendo en cuenta las habilidades asociadas a las competencias didácticas establecidas en el Cuadro 91, se dará a conocer el análisis de las competencias didácticas puestas en práctica por los profesores en formación cuando diseñaron unidades didácticas con contenidos geométricos (ver Cuadro 108).

Cuadro 108
Competencias didáctico – matemáticas exhibidas por los profesores en formación cuando diseñaron una unidad didáctica con contenidos geométricos

Competencias didáctico-matemáticas	Habilidades didáctico - matemáticas	Grupo nº		
		1	2	3
PR.1	Identifica los conceptos y las propiedades involucradas en una tarea matemática.	+	+	+
PR.2	Reconoce y entiende los alcances y limitaciones de los conceptos matemáticos dados.	+	+	+
PR.3	Determina cuando las condiciones existentes son necesarias y/o suficientes para que un objeto matemático tenga una cierta propiedad.	-	-	-
PR.4	Tiene una comprensión básica sobre los tipos de preguntas y respuestas que pertenecen a la Matemática como asignatura para una determinada etapa educativa.	+	+	+
P y RP.1	Plantea y formula problemas y preguntas que pueden conducir a las actividades de resolución de problemas entre los estudiantes.	+	+	+
P y RP.2	Conoce y aplica distintos procedimientos para resolver un problema matemático.	-	-	-
P y RP.3	Es capaz de plantear y tratar u problema de diversas maneras, teniendo en cuenta el alcance del contenido y contexto matemático involucrado.	-	-	-
P y RP.4	Establece posibles generalizaciones del problema resuelto.	-	-	-
M.1	Establece conexiones con otros temas matemáticos o con otras áreas de conocimiento	+	+	+
A.1	Justifica la solución dada un problema matemático	-	-	-
A.2	Es capaz de seguir, caracterizar, comentar y evaluar el razonamiento de los estudiantes y, además, ayudarles a desarrollar su propia capacidad de razonamiento matemático	-	-	-
A.3	Distingue entre el momento en que una afirmación tiene la naturaleza de una prueba, y cuando es "simplemente" una buena explicación o ilustración.	-	-	-
A.4	Explica las ideas básicas de las pruebas sin tener necesariamente todos los detalles en cuenta; es decir, es capaz de revelar las ideas básicas y controlar el grado en el que la parte más técnica de la prueba deba ser incluida en un contexto de enseñanza concreta	+	+	-
R.1	Utiliza diferentes sistemas de representación.	-	-	-
R.2	Establece prioridades entre diversas formas de representación de un objeto matemático, en un contexto de enseñanza específico.	-	-	-
R.3	Ayuda a los estudiantes a establecer vínculos entre las diversas formas de representación de un objeto matemático.	-	-	-

Cuadro 108 (cont.)

Competencias didáctico-matemáticas	Habilidades didáctico - matemáticas	Grupo nº		
		1	2	3
LS.1	Usa en forma apropiada los símbolos matemáticos.	+	+	+
LS.2	Es capaz de traducir ida y vuelta entre el lenguaje matemático simbólico y el lenguaje natural, y ser capaz de estimular la traducción correspondiente entre los estudiantes.	-	-	-
LS.3	Propicia la aceptación de una serie de convenciones matemáticas.	-	-	-
C.1	Establece un diálogo sobre temas matemáticos con los estudiantes.	-	-	-
C.2	Comprende e interpreta las expresiones escritas y orales de los estudiantes.	-	-	-
C.3	Es capaz de expresarse sobre asuntos matemáticos en variadas maneras, teniendo en cuenta el nivel educativo y las circunstancias propias de una situación de enseñanza.	+	+	+
M y R.1	Conoce y utiliza diversas ayudas y herramientas que sean accesibles para las actividades matemáticas en el nivel que enseñan; actividades tales como desarrollo de conceptos, estudio de relaciones y patrones, examen de conjeturas, etc.	+	+	+
M y R.2	Utiliza programas computarizados para crear nuevas formas de trabajar con conceptos y propiedades matemáticas.	+	+	+
M y R.3	Reconoce las ventajas y las limitaciones de los diversos programas computarizados como hojas de cálculo, software de cálculo simbólico, de geometría dinámica, simuladores, paquetes estadísticos, etc.	+	+	+
M y R.4	Juzga la utilidad de estas herramientas matemáticas en función a los objetivos de aprendizaje previstos.	+	+	+
CC.1	Analiza y evalúa diversos documentos curriculares relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, como los programas de estudio y los libros de texto, con el propósito de identificar los objetivos de aprendizaje que se persiguen y el alcance de los temas a ser estudiados en cierta etapa educativa.	+	+	+
CC.2	Elabora planes de clases que contribuyan al logro de los objetivos de aprendizaje y el tratamiento didáctico – matemático del tema a ser estudiado.	+	+	+
CC.3	Establece conexiones con otros temas del programa de estudio del área de Matemática mediante la realización de la tarea planteada o con otras materias que integran el plan de estudio de cierta etapa educativa.	-	-	-
C_Apr.1	Conoce las peculiaridades del aprendizaje matemático, los posibles errores que pudieran cometer y las dificultades que confrontarían los estudiantes al realizar una tarea matemática.	+	+	+

Cuadro 108 (cont.)

Competencias didáctico-matemáticas	Habilidades didáctico - matemáticas	Grupo nº		
		1	2	3
C_Apr.2	Conoce e implementa estrategias didácticas para motivar e incentivar la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.	+	+	+
C_Apr.3	Ayuda a los estudiantes a identificar los errores cometidos y sus posibles causas, con el propósito de clarificar dudas o superar confusiones o malas interpretaciones de conceptos y propiedades matemáticas (tratamiento didáctico del error).	-	-	-
C_Apr.4	Propicia que los estudiantes establezcan relaciones del tema objeto de estudio con otros temas ya estudiados, procurando que logren ir configurando una estructura conceptual propia de la Matemática para esa etapa educativa.	+	+	+
C_Apr.5	Selecciona o diseña instrumentos que permitan revelar y evaluar los aprendizajes matemáticos de un grupo de estudiantes.	+	+	+
C_Ens.1	Planifica y lleva a cabo secuencias didácticas concretas en función de los objetivos de aprendizaje propios de la etapa educativa.	+	+	+
C_Ens.2	Selecciona o diseña tareas que motiven a los estudiantes a involucrarse en actividades propias del quehacer matemático como la resolución de problemas o la justificación de las soluciones o resultados.	+	+	+
C_Ens.3	Selecciona o elabora materiales y recursos didácticos que favorezcan el aprendizaje de un tema matemático.	+	+	+
C_Ens.4	Gestiona y regula el proceso de enseñanza y aprendizaje y la dinámica de la clase de Matemática.	-	-	-
C_Ens.5	Evalúa tanto los procesos como los productos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.	-	-	-

En cuanto a las competencias didácticas vinculadas con el conocimiento del contenido matemático, se ha observado, en función de las unidades didácticas diseñadas y las sesiones del seminario realizado en el contexto de la Fase de Ejecución de Proyectos Educativos, lo siguiente:

1. Los tres grupos fueron capaces de elaborar el MEA correspondiente al tema seleccionado, logrando así identificar las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de las tareas propuestas (**PR.1**), así como delimitar el alcance del contenido, en función de los objetivos de aprendizaje propios del área de Matemática para educación media (**PR.2 y PR.4**).

2. Aunque la resolución de problemas no fue uno de los aspectos contemplados, en forma explícita, por grupo alguno (ver Gráficos 72, 73 y 74 y Cuadro 106), se considera que sus integrantes son capaces de plantear problemas o formular preguntas que pudieran conducir a los estudiantes a involucrarse en actividades propias del quehacer matemático (**P y RP.1**).

3. Los tres grupos logran establecer relaciones con otros temas matemáticos o con otras áreas de conocimiento (aspectos nº 2 y 3 del MEA, **M.1 y CC.3**).

4. Asimismo, los grupos nº 1 y 2, teorema de Thales y Pitágoras, desarrollan las ideas básicas de las demostraciones de estos teoremas, con el propósito de propiciar su comprensión y el seguimiento de las afirmaciones y razones dadas (**A.4**). El grupo nº 1 la aborda con el juego Aceptando el reto, en el cual uno de sus objetivos ha sido "*reconstruir la demostración del Teorema de Thales, teniendo como referencia las fichas obtenidas, una vez superado el reto, en las estaciones previas*" (ver Anexo H-2), mientras que el grupo nº 2 decidió, en la subunidad didáctica nº 3 (ver Cuadro 99), mostrar algunas demostraciones del teorema de Pitágoras, con la finalidad que los estudiantes reconocieran las definiciones y propiedades involucradas en las mismas.

5. Ninguno de los grupos trató de forma explícita lo relacionado con los sistemas de representación al momento de diseñar las unidades didácticas; sin embargo, por la naturaleza de los temas estudiados, pudiera decirse que predominan los sistemas de representación simbólico (manejo de las notaciones correspondientes a los distintos objetos geométricos) y gráfico (realización de construcciones geométricas con regla y compás en entornos de lápiz y papel o en AGD).

6. Los tres grupos usaron en forma correcta la simbología matemática (**LS.1**) y, además, son capaces de expresarse sobre temas geométricos en variadas maneras, teniendo en cuenta el nivel educativo y las tareas diseñadas (**C.3**).

7. En cuanto a la selección o elaboración de materiales y recursos didácticos (ver Cuadro 107), se considera que los grupos exhibieron las correspondientes competencias didácticas, ya que, los utilizaron para propiciar la comprensión de conceptos y propiedades geométricas (**M y R.1**), la construcción de figuras geométricas (**M y R.2**) en entornos estáticos o dinámicos y el logro de los objetivos

de aprendizaje (**M y R.3**) correspondientes a cada una de las tareas matemáticas diseñadas (**M y R.4**).

8. En cuanto a las competencias curriculares, los tres grupos revisaron los programas de estudio de educación media para el área de Matemática, así como algunos libros de texto, siendo capaces de identificar los objetivos de aprendizaje que se persiguen y el alcance de los temas a ser estudiados en esta etapa educativa (**CC.1**); asimismo, lograron, en forma satisfactoria, haciendo uso del análisis didáctico, el MEA y el modelo de Van Hiele, de diseñar unidades didácticas en Geometría que pudieran contribuir al logro de los objetivos de aprendizaje y el tratamiento didáctico idóneo del tema seleccionado (**CC.2**).

9. En relación con las competencias para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje, los profesores en formación son capaces de identificar las habilidades geométricas que pretenden sean alcanzadas por los estudiantes de educación media cuando realicen las tareas matemáticas diseñadas (**C_Apr.1**) y motivar su participación activa en su ejecución de las mismas (**C_Apr.2**). Además, con las secuencias didácticas establecidas en cada una de las propuestas, han procurado ir configurando una estructura conceptual para ayudar a los estudiantes a establecer relaciones entre las definiciones y propiedades tratadas (**C_Apr.4**). Lo relativo al tratamiento didáctico del error (**C_Apr.3**) no se evidencia en las unidades didácticas analizadas, posiblemente ésta sería una competencia a estudiar durante el desarrollo de las clases planificadas.

10. Cabe destacar que, en cuanto a la selección o diseño de instrumentos que permiten revelar y evaluar los aprendizajes matemáticos de estudiantes de educación media, pareciera predominar la idea de la evaluación para el aprendizaje sobre la evaluación del aprendizaje.

11. En cuanto a las competencias para gestionar y evaluar la enseñanza, los integrantes de los tres grupos demostraron sus habilidades en la planificación de estrategias y la selección o elaboración de materiales y recursos didácticos en Geometría (**C_Ens. 1, 2 y 3**).

Cabe señalar que, en esta investigación, la tarea didáctica estuvo dirigida a diseñar una unidad didáctica con contenido geométrico y, por ello, los conocimientos y procesos didácticos activados por los participantes en el curso de RPG_AC estuvieron vinculados a la fase de diseño del análisis didáctico: (a) delimitar el alcance del contenido geométrico seleccionado teniendo como guía el MEA; (b) establecer las habilidades asociadas a los tres primeros niveles de razonamiento geométrico que aspiraban pusieran en práctica los estudiantes de educación media cuando realizaran las tareas propuestas; (c) diseñar las actividades didácticas con contenido geométrico y seleccionar los materiales y recursos a ser empleados; (d) planificar la secuencia didáctica en función del tiempo disponible para llevarla a cabo.

Además, como se mostró en el Cuadro 108, en su rol de planificador o diseñador de unidades didácticas con contenido matemático, el profesor de Matemática no sólo activa competencias didácticas propiamente dichas como la competencia curricular (CC), la competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje (C_Apr) y la competencia para gestionar y evaluar la enseñanza (C_Ens), sino que requiere exhibir sus competencias matemáticas, según la descripción didáctica propuesta por Niss y Højaard (2011). Esto pareciera ser un argumento válido para insistir en la necesidad de diseñar y gestionar tareas didáctico – matemáticas que propicien la integración del conocimiento del contenido matemático (CCM) con el conocimiento didáctico del contenido matemático (CDCM) y, por ende, de las competencias matemáticas con las competencias didácticas en la formación inicial del profesor de Matemática.

Balance general sobre las competencias didácticas

Se analizaron las unidades didácticas con contenido geométrico para educación media que fueron diseñadas por los participantes del curso de RPG_AC, siguiendo el esquema propuesto por Iglesias (2008) y reseñado por Ortiz, Iglesias y Paredes (2013), el cual está centrado en los componentes del análisis didáctico para la fase de diseño. Esto permitió analizar las competencias didácticas exhibidas por este grupo de profesores en formación, cuando realizaron la mencionada tarea, en función de los indicadores establecidos en el Cuadro 91.

En cuanto al *análisis del contenido geométrico*, se observó que éste fue favorecido por la elaboración del MEA para el tema seleccionado (teorema de Thales, teorema de Pitágoras, Circunferencia y Círculo), ya que, permite limitar el alcance y el tratamiento didáctico del tema y, de esta manera, emprender el diseño de la correspondiente unidad didáctica (Competencia curricular, CC. 1 y 2; Pensar y Razonar, PR. 1, 2 y 4). Además, con el establecimiento de la secuencia didáctica, los profesores en formación procuraron que los estudiantes de educación media comprendieran la estructura conceptual del tema tratado (Competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje, C_Apr. 4). Para lograrlo, fueron capaces de plantear problemas o formular preguntas tendientes a propiciar la participación de los estudiantes de educación media en las tareas propuestas (Plantear y resolver problemas, P y RP. 1; Competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje, C_Apr. 2). Además, establecieron relaciones con otros temas matemáticos o con situaciones del mundo real (Modelar, M. 1 y Competencia Curricular, CC.3).

En lo que respecta al *análisis cognitivo*, la aplicación del modelo de Van Hiele facilitó la identificación de las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico en función del tema tratado (Competencia para propiciar, revelar y evaluar el aprendizaje, C_Apr. 1) y de los objetivos de aprendizaje (Competencia Curricular, CC. 1).

En cuanto al *análisis de la instrucción*, para la selección o elaboración de materiales y recursos didácticos, se enfatizó en ambientes tecnológicos (uso de videos, diseño de un blog y empleo del Cabri II Plus como pizarra electrónica) y lúdicos (diseño de juegos didácticos) y se incorporó su uso en actividades de enseñanza y aprendizaje específicas (Competencia para gestionar y evaluar la enseñanza, C_Ens. 1, 2 y 3). Desarrollaron las ideas básicas de las demostraciones de los teoremas de Thales y Pitágoras, con el propósito de familiarizar a los estudiantes con los procesos de justificación en Matemática (Argumentar, A. 4).

En general, el diseño de las unidades didácticas, con contenido geométrico para educación media, que fueron realizadas por los participantes, propició la puesta en juego de competencias didácticas relevantes para la formación de los profesores, las cuales no sólo están vinculadas con los componentes del conocimiento didáctico del contenido matemático, sino con el conocimiento del contenido matemático y las competencias matemáticas, en atención a la descripción propuesta por Niss y Højgaard (2011).

Por otro lado, se considera que las competencias didácticas descritas en el Cuadro 91, contribuyen al desarrollo de una macro competencia, en el sentido propuesto por Font (2011), ya que se contemplan tanto los conocimientos como las habilidades que se requieren para llevar a cabo el análisis didáctico de un contenido matemático en la fase de diseño de una unidad didáctica.

Además, esto coincide con el valor formativo que autores como Lupiañez (2013) le atribuyen al análisis didáctico: “la estructura propuesta para el análisis didáctico constituye una herramienta útil para el profesor, que les permite planificar sus actuaciones profesionales de una manera fundamentada, sistemática y justificada” (p. 101); tal como se ha podido observar en las unidades didácticas diseñadas por los participantes en el curso de RPG_AC. En otras palabras, los profesores en formación aplicaron el análisis didáctico en forma *fundamentada* (teniendo como referencia los referentes teóricos dados a conocer: la elaboración de un MEA, la aplicación del modelo de Van Hiele y la selección de materiales y recursos didácticos), *sistemática* (siguiendo, paso por paso, el procedimiento de planificación propuesto por Iglesias (2008)) y *justificada* (dando las razones que justificaron la toma de decisiones didácticas).

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

Uno de los componentes clave de la formación inicial de los profesores de Matemática, es la formación en Geometría y su Didáctica. En ese sentido, se han emprendido acciones que se han concretado en: diseñar y desarrollar el curso de RPG_AC (Iglesias, 2000), que incorpora el uso de un Software de Geometría Dinámica (SGD); diseñar estrategias, materiales y recursos susceptibles de ser empleados en la educación media y la formación docente (Iglesias, 2009; Arrieche e Iglesias, 2010); asumir el rediseño de los cursos de Geometría I y Geometría II (ver anexos B-1 y B-2); procurar la integración de referentes teóricos útiles para la planificación de unidades didácticas con contenidos geométricos (Iglesias, 2008; Ortiz, Iglesias y Paredes, 2013); registrar y mantener activa una línea de investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría y dirigir algunos trabajos de grado de maestría (Iglesias, 2007). Este bagaje y las experiencias docentes e investigativas han servido como soporte para llevar a feliz término esta investigación.

En esta investigación se ha logrado establecer relaciones entre los dominios de los conocimientos matemáticos para la enseñanza (Hill et al., 2008) y las competencias didáctico – matemáticas (Azcárate, 1998; Godino, 2009; Niss y Højgaard, 2011) y, además, definir indicadores tanto para las competencias matemáticas como para las didácticas (ver Cuadros 18 y 91). Estos indicadores han guardado relación con los contenidos y objetivos de aprendizaje previstos para cada uno de los tres talleres que conformaron el curso de RPG_AC y que fueron descritos en el Capítulo IV; asimismo, tales indicadores han facilitado el análisis de las competencias matemáticas y didácticas de los profesores en formación cuando ejecutaron ciertas tareas didáctico – matemáticas.

El establecimiento de determinadas relaciones entre conocimientos y competencias ha permitido visualizar la integración de los componentes de las competencias matemáticas y didácticas que se pretende sean alcanzadas por un profesor de Matemática durante su proceso formativo, en función a tres elementos clave: conocimientos, procesos y tareas; elementos que se considera son necesarios tener en cuenta cuando se aborda el diseño y desarrollo de propuestas formativas en Matemática y su Didáctica, como lo es el curso de RPG_AC (ver Gráfico 75).

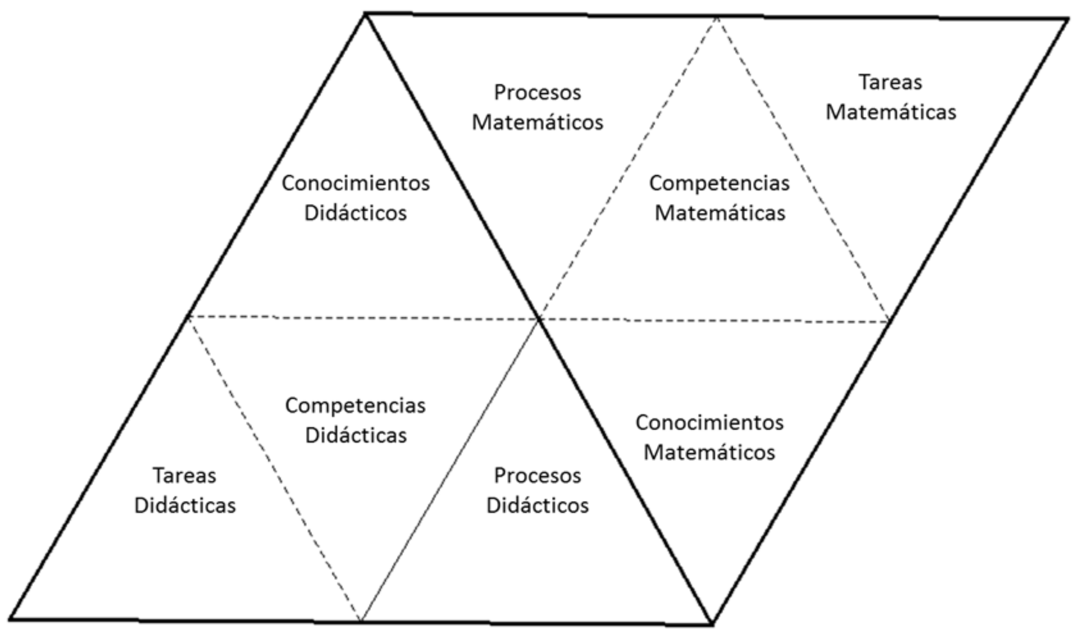


***Gráfico 75*. Componentes de las competencias profesionales de un profesor de Matemática.**

En este caso, por ejemplo, los conocimientos matemáticos se refieren al conocimiento de los contenidos matemáticos (definiciones y propiedades) y la manera cómo se organizan y validan siguiendo el método axiomático, así como su aplicación en la resolución de problemas, con lo cual se abarcan las dimensiones sustantiva y sintáctica del conocimiento del contenido matemático (Grossman, Wilson y Shulman, 2005). Además, en el proceso de comprensión y construcción del conocimiento matemático intervienen procesos de razonamiento propios del quehacer matemático como reconocimiento, definición, clasificación y demostración (Gutiérrez y Jaime, 1998), los cuales se activan al ejecutar determinada tarea (García Quiroga y otros, 2013; Marín, 2013). En el curso de RPG_AC, las tareas planteadas enfatizaron en el contexto intramatemático; obviamente, ésta es apenas un tipo de tarea matemática que pudiera proponerse a los profesores en formación y es necesario seguir trabajando en el diseño de tareas que propicien la integración de los dominios de los conocimientos matemáticos para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008).

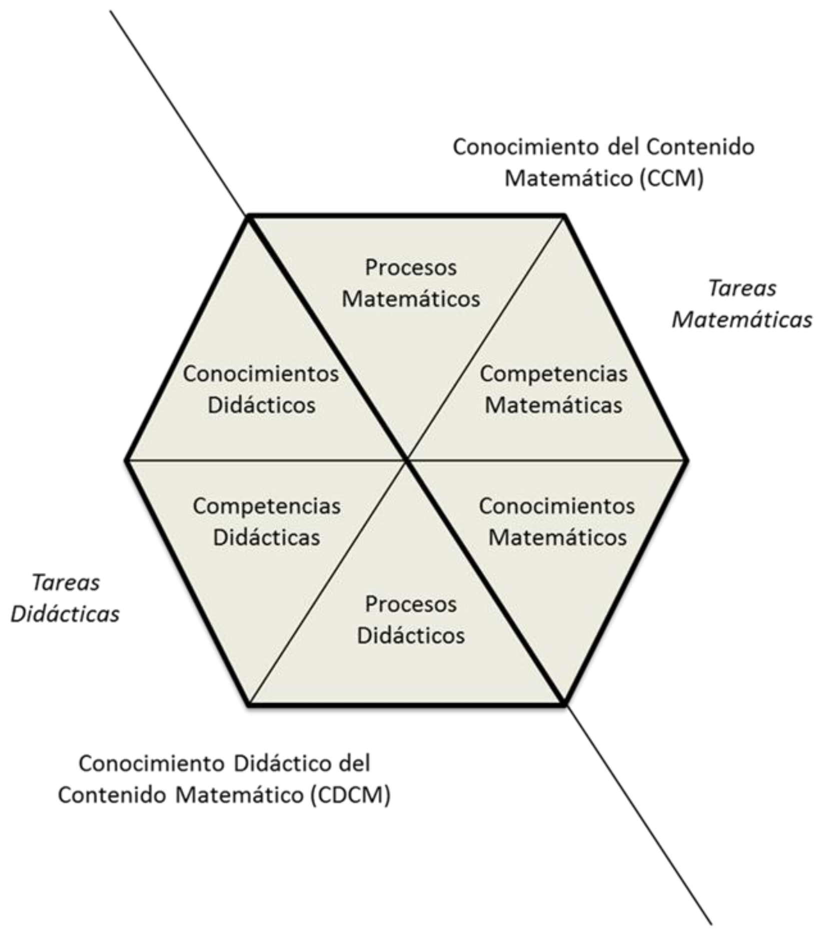


***Gráfico 76*. Integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática (parte 1).**

En el Gráfico 76, a partir de lo mostrado en el Gráfico 75, con un hexágono regular (dividido en dos trapecios isósceles por uno de sus ejes de simetría), se pretende representar la integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática, en término de los dominios de los conocimientos matemáticos para la enseñanza (Hill et al., 2008), donde convergen (mediante ángulos opuestos por el vértice) los conocimientos, los procesos de razonamiento y las competencias didáctico – matemáticas; de manera que, las tareas didáctico – matemáticas son entendidas como oportunidades para propiciar, poner en práctica y evaluar los conocimientos y las competencias profesionales de los profesores en formación.

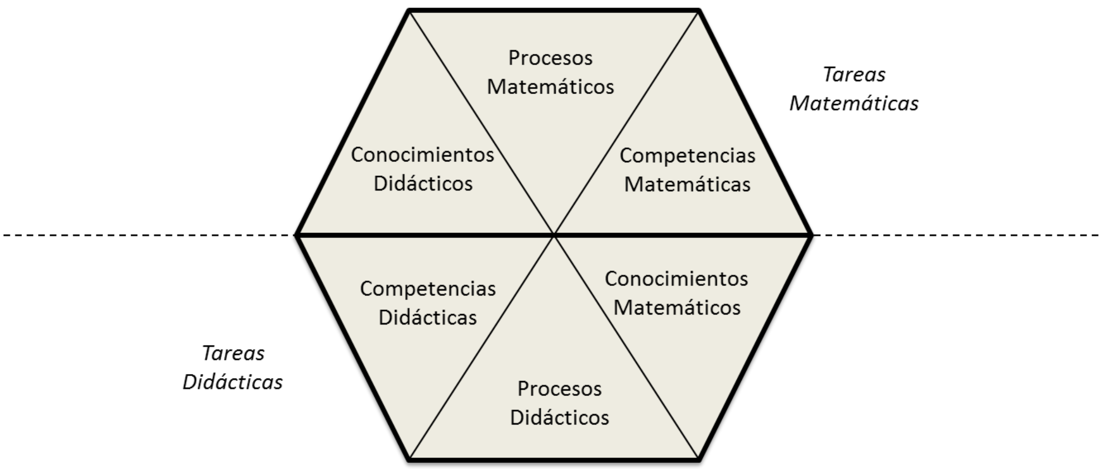


***Gráfico 77*. Integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática (parte 2).**

Además, como un hexágono posee otros dos ejes de simetría, es posible identificar, describir y analizar, por una parte, (a) los conocimientos didácticos y competencias matemáticas que el profesor de Matemática pone en juego para propiciar, revelar y evaluar el proceso de aprendizaje de la Matemática, a partir del diseño y gestión de ciertas tareas matemáticas, así como (b) los conocimientos matemáticos y competencias didácticas que el profesor de Matemática pone en juego para gestionar y evaluar el proceso de enseñanza de la Matemática, a partir del diseño y gestión de tareas didácticas (ver Gráfico 77); y, por otra parte, identificar, describir y analizar (c) los conocimientos y competencias didácticas que el profesor de Matemática pone en juego para propiciar, revelar y evaluar el proceso de aprendizaje de la Matemática, a partir del diseño y gestión de ciertas tareas didácticas asociadas al quehacer matemático, así como (d) los conocimientos y competencias matemáticas que el profesor de Matemática pone en juego para gestionar y evaluar elproceso de enseñanza de la Matemática, a partir del diseño y gestión de tareas matemáticas (ver Gráfico 78).

Lo mostrado en los Gráficos 77 y 78, pudiera servir de guía a los profesores que laboran en las instituciones de formación docente para diseñar y gestionar tareas didáctico – matemáticas que propicien el desarrollo de conocimientos y competencias profesionales en el profesor en formación, así como su evaluación.

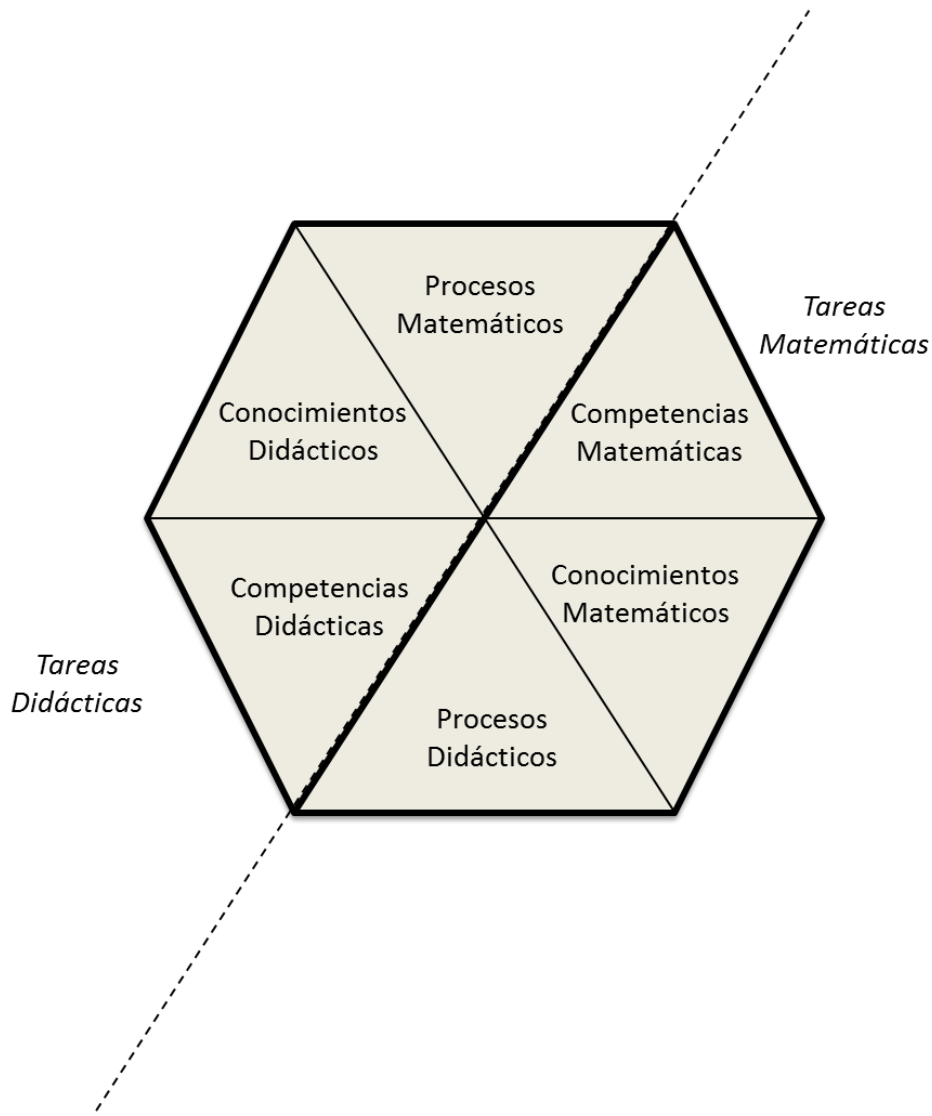


***Gráfico 78*. Integración de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemática (parte 3).**

En cuanto al objetivo específico nº 1: "*Caracterizar el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora*", es importante resaltar que en el curso de RPG_AC, se ha procurado superar una organización lineal del contenido geométrico, como suele suceder en los cursos que siguen una organización rigurosamente axiomática de los contenidos en definiciones, axiomas y teoremas; con lo cual los profesores en formación se ven en la necesidad de establecer conexiones entre los conocimientos previos y aquellos que se requieren emplear cuando realizan una tarea. De esta manera, se ha pretendido que los participantes asumieran las actividades propuestas en los talleres como oportunidades para aprender y no sólo como actividades para evaluar los aprendizajes logrados.

También la organización de las tareas matemáticas siguiendo el esquema indicado: construir →explorar → conjeturar → validar, se ha considerado el idóneo para integrar el uso de un SGD; ambiente que favorece la elaboración de construcciones geométricas con regla y compás, así como la transformación, en forma dinámica, una figura (con la herramienta de arrastre de puntos o líneas) y observar en tiempo real las características que permanecen invariantes; esto pudiera coadyuvar a la formulación de conjeturas que requerirían ser validadas. Sin embargo, los participantes en el curso de RPG_AC no lograron seguir el mencionado esquema, por el simple uso del Cabri II; fue necesario que se generara un ambiente que propiciara y valorara la participación activa de los profesores en formación en la ejecución de tareas, en las cuales se ha tenido la intención de alcanzar un justo equilibrio entre el contexto de descubrimiento (acciones heurísticas) y el contexto de justificación (prácticas argumentativas). Esto implica que el profesor de un curso como el de RPG_AC tiene que respetar el ritmo de aprendizaje de sus estudiantes, mantener con ellos un diálogo que los conduzca a centrar su atención en cuestiones geométricas, discutir las ideas centrales en las cuales sustentan sus argumentos y revisar la consistencia de las justificaciones dadas (explicaciones y pruebas).

En lo que respecta al objetivo específico nº 2: "*Describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática a los software de Geometría Dinámica cuando* *abordan, a partir de la resolución de problemas, las demostraciones en Geometría*", tal como se señaló en el Capítulo V, se consideraron dos categorías: (a) uso técnico del software (construcción, verificación de relaciones y apariencia de la figura), en atención a las herramientas disponibles en el Cabri II Plus (ver Cuadros 34, 35 y 36); (b) uso heurístico del software (construcción, exploración, formulación de conjeturas y validación), en atención a las acciones realizadas por los profesores en formación cuando abordaron las tareas planteadas en los talleres de resolución de problemas geométricos. La descripción del uso técnico fue favorecida por la disponibilidad de herramientas como "revisar la construcción" y "mostrar la descripción", mientras que la descripción del uso heurístico fue posible establecerla a partir de la revisión de los informes de trabajo y las grabaciones de audio y video. Además, estos dos diferentes tipos de uso de un SGD se complementan entre sí; por ejemplo, el uso de las herramientas de verificación de relaciones y medidas (ver Cuadro 35) resulta útil en la exploración de una construcción geométrica y la identificación de patrones y regularidades (las llamadas características geométricas invariantes). Por ende, se considera que es clave que los usuarios de un SGD estén familiarizados con el entorno informático y conozcan las herramientas disponibles y sus utilidades, para así centrar su atención en las acciones heurísticas (construir, explorar, formular conjeturas y validarlas), las cuales están estrechamente vinculadas con el proceso de resolución de problemas geométricos.

En cuanto al objetivo específico nº 3: "Clasificar las justificaciones que dan los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas y abordan la demostración en un ambiente de Geometría Dinámica", se asumieron dos criterios, en función a la revisión de fuentes documentales: (a) la justificación como producto final de un proceso de validación matemática (Balacheff, 2000); (b) la justificación como práctica argumentativa (Flores, 2007). De modo que, en función a las descripciones ofrecidas en los Cuadros 38 y 39 y la revisión de las producciones orales y escritas de los participantes en el curso de RPG_AC, se observó una tendencia a dar explicaciones, partiendo del reconocimiento de las relaciones existentes entre los diferentes objetos que conformaban las construcciones realizadas por ellos y apelando a definiciones y propiedades conocidas, pero sin llegar a establecer, en forma rigurosa, una cadena de razonamiento lógico – deductiva. En estos casos, además, se evidenció que ponían en juego esquemas de argumentación tanto fácticos (hacían un recuento del procedimiento de construcción empleado) como empíricos (medían ángulos y segmentos que conformaban una figura). Sin embargo, en atención a las actividades propuestas en cada uno de los talleres, también fueron capaces de elaborar una cadena de razonamiento lógico – deductiva y, por ende, de presentar pruebas, siguiendo, por lo general, un esquema de afirmaciones y razones; de esta manera, se observó que los participantes en el curso de RPG_AC siguieron un esquema de argumentación analítico, apoyado en esquemas de argumentación tanto fácticos como empíricos.

Asimismo, respecto al objetivo específico nº 4: "*Analizar las competencias matemáticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando resuelven problemas y abordan la demostración en ambientes de Geometría Dinámica*"; se evidenció la puesta en práctica de las distintas competencias matemáticas, teniendo como referencia a las habilidades geométricas asociadas a cada una de ellas y los niveles de razonamiento geométrico (ver Cuadro 18). En función a las actividades propuestas en los talleres, los participantes, haciendo un uso eficiente del Cabri II (*competencia de materiales y recursos*), construyeron figuras geométricas, partiendo de las condiciones dadas y las relaciones existentes entre los objetos geométricos involucrados, identificando cada uno de ellos (*competencia de representación*). Seguidamente, ellos fueron capaces de explorar las figuras, reconocer características invariantes y tratar de validarlas (*competencia de pensar y razonar matemáticamente*). Obviamente, en la validación de conjeturas y la prueba de propiedades enunciadas, los profesores en formación manifestaron determinados esquemas de argumentación y ofrecieron explicaciones y pruebas, basadas en definiciones y propiedades conocidas (*competencia de argumentación*). Además, la demostración matemática cobra pleno sentido cuando logra ser comunicada y compartida con la audiencia; por ello, en el curso de RPG_AC, además de los informes escritos, los distintos grupos de trabajo presentaron en forma oral sus producciones, las cuales debían ser seguidas y validadas tanto por la autora en su condición de facilitadora como sus compañeros de clases (*competencia de comunicación*).

También, respecto al objetivo número 5: "*Analizar las competencias didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática cuando diseñan actividades de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, dirigidas a estudiantes de Educación Básica*"; se logró validar la descripción didáctica de las competencias matemáticas de un profesor realizada por Niss y Højgaard (2011), así como las habilidades asociadas a los dominios del conocimiento didáctico del contenido matemático, cuando se analizaron las competencias didácticas exhibidas por los profesores en formación cuando diseñaron unidades didácticas con contenidos geométricos para educación media (ver Capítulo VI); con esta tarea didáctico – matemática, los participantes emplearon el análisis didáctico como una herramienta teórico – metodológica que les facilitó la tarea planificadora, centrándose en cuestiones propias del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría: (a) la naturaleza y el alcance de los contenidos geométricos; (b) las habilidades que se pretende sean puestas en práctica por los estudiantes de educación media, en atención a los niveles de razonamiento geométrico y las competencias matemáticas; (c) la selección o elaboración de materiales y recursos didácticos que favorezcan el aprendizaje de los temas geométricos; (d) la valoración del desempeño de los estudiantes.

Finalmente, los aportes mostrados anteriormente dan cuenta del logro de los objetivos generales de la investigación, es decir, estudiar las competencias matemáticas y las competencias didácticas puestas en práctica por los futuros docentes de Matemática, cuando resuelven problemas geométricos y cuando diseñan actividades de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, dirigidas a estudiantes de Educación Media.

REFERENCIAS

Aguilar, R. e Iglesias, M. (2013). La Geometría de los Cuadriláteros en los Libros de Texto de Educación Primaria. *Paradigma*, Vol. XXXIV, Nº 2, 151 – 173.

Alsina, C. (1999). Intuición y Deducción en Geometría. En E. Veloso, H. Fonseca, J.P. da Ponte y P. Abrantes (Eds.), *Ensino da Geometria no virar do milenio (pp. 33 - 41).* Departamento de Educação da Facultade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J.M. y Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Aravena Díaz, M. y Caamaño Espinoza, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule, Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (2), 139 – 178.

Arrieche, B. e Iglesias, M. (2010). Explorando ángulos e triángulos com dobraduras em papel. *Boletim GEPEM*, 57, 105-117.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 66 – 72.

Assude, T. (2005). Time management in the work economy of a class. A case study: Integration of Cabry in primary school mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* 59, 183 – 203.

Azcárate, P. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas: Análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 129 - 142.

Azcárate Goded, P. (2004). *Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos*. Ponencia presentada en el Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Universidade da Coruña.

Báez, R. (2010). *Propuesta didáctica para el curso de Geometría de la especialidad de Educación Integral del Instituto Pedagógico Rural "El Mácaro". Evaluación de una unidad didáctica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Bainville, E. (2003). *Cabri Géomètre II Plus. Manual del usuario*. Grenoble, Francia: Cabrilog.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de Matemática*. Bogotá: Una Empresa Docente de la Universidad de los Andes.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows Mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29 (3), 14 - 46.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389 - 407.

Barroso Campos, R. y Gavilán Izquierdo, J.M. (1999). El ordenador en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas: una propuesta. *Educación Matemática*, 11 (2), 95 – 103.

Barroso Campos, R. y Gavilán Izquierdo, J.M. (2003). Resolución de problemas de geometría con Cabri II. *Números*, 54, 23 – 30.

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty Maletá, M., Siufi, G. y Wagenaar, R. (2007). *Reflexiones y Perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe Final: Proyecto Tuning – América Látina 2004-2007*. Bilbao: Publicaciones de la Universidad de Deusto.

Blanco, L.J. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la Geometría. En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 93 - 124). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración: Una relación compleja, productiva e inevitable en las Matemáticas y en la Educación Matemática [Documento en línea]. *La lettre de la Preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 99 07/08.* Disponible en: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeIT.html [Consulta: 2012, Mayo 4]

Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18 (1), 32 – 42. Traducción del original inglés: Pablo Manzano Bernárdez.

Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1), 31 – 48.

Camacho, M., Socas, M. y Hernández, J. (1998). An análisis of future mathematics teacher’s conceptions and attitudes toward mathematics. *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 29 (3), 317 – 324.

Campistrous Pérez, L.A. y López Fernández, J.M. (2001). La calculadora como herramienta heurística. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas* n° 28, 84 – 99.

Cardeñoso, J. M. y Azcárate, M. P. (2002). Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional (AIP). En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 181 - 226). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Cardeñoso, J.M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El Desarrollo Profesional de los Profesores de Matemáticas como Campo de Investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro (pp. 233 – 244)*. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420 – 464). New York: Macmillan Publishing.

Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2002). Introducción. En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 9-18). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid: C.I.D.E., M.E.C.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. En M. M. Lindquist y A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 1 – 16). Reston, VA: N. C. T. M.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Villiers, M. (1999 a). El futuro de la Geometría en la Escuela Secundaría [Documento en Línea]. Traducido al español por Víctor Larios Osorio. Disponible en: http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/Materiales.htm [Consulta: 2012, Marzo 12]

De Villiers, M. (1999 b). *The Role and Function of Proof with Sketchpad*. En Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad. United States of America: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 400 - 431.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Euclides. (1991). *Elementos. Libros I – IV*. Madrid: Gredos. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños.

Fetisov, A.I. (1973). *La Demostración en Geometría*. México: Editorial Limusa – Wiley.

Finzer, W. y Jackiw, N. (1998). *Dynamic manipulation of mathematical objects* [Documento en línea]. Ponencia presentada en Technology and Standards 2000 Conference. Disponible en:

http://mathforum.org/technology/papers/papers/s2k/index.htm [Consulta: 2012, Marzo 19]

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, 19 (1), 63-98.

Flores Martínez, P. (1998). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada.

Font Moll, V. (2011). Competencias Profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 9 – 25.

Fritzler Happach, W. (1997). Triángulos y Cuadriláteros Inscritos en un Círculo. Una aplicación del software educativo "Cabri – Géomètre". *Educación Matemática*, 9 (2), Agosto 1997, 116 – 136.

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analizing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 163 – 183.

Galvis, L. J. (2010). *Estudio de la geometría del espacio mediante la metodología enseñanza y aprendizaje por proyectos*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

García, R. (2009). *Estudio de las funciones reales de una variable real en un ambiente de geometría dinámica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

García Quiroga, B. y otros. (2013). *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje*. Florencia, Colombia: Universidad de Amazonia.

García, M. y Sánchez, V. (2002). Una Propuesta de Formación de Maestros desde la Educación Matemática: Adoptando una perspectiva situada. En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 61-91). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Gary, T. (1997). Geometer`s Sketchpad in the Classroom. En J. R. King y D. Schattschneider (Eds.). *Geometry Turned on: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington: Mathematical Association of America.

Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 85 - 92.

Gimeno Sacristán, J. (1998). *El curriculum una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13 – 31.

Gómez, P. y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez-Chacón, I.M. (2002). Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En L.C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 19 - 59). Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Gómez-Chacón, I.M. (2005). Tendencias y retos en formación de Profesores en Matemáticas. Vivir el presente y crear futuro en la cooperación Europa – Latinoamérica. En I.M. Gómez-Chacón y E. Planchart (eds.), *Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica* (pp. 15 – 31). Bilbao: Universidad de Deusto.

González, F. (1993). Aprender a Enseñar Matemática: Elementos para configurar una estrategia. *Enseñanza de la Matemática*, 2 (2), 4 – 22.

González, F. (2000a). *Programa ALIEM XXI. Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el Siglo XXI*. Documento presentado en la V Reunión de Didáctica Matemática del Cono Sur, del 10 al 14 de Enero del 2000. Universidad de Santiago de Chile.

González, F. (2000b). Los nuevos roles del profesor de Matemática: retos de la formación de docentes para el Siglo XXI. *Paradigma*, XXI (1), 139 – 172.

González, F. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de Matemática. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 11 (1), 47 – 59.

González López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 277 – 290). Granada: Universidad de Granada.

González López, M.J. y Lupiáñez Gómez, J.L. (2001). Formación inicial de profesores de matemáticas de secundarias: Actividades basadas en la utilización de software de geometría dinámica. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 28, 110 – 125.

Gravina, M.A. (1996). Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria [Documento en línea]. Ponencia presentada en VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, MG, 1-13. Disponible en: http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm#indice [Consulta: 2012, Abril 19]

Grossman, P. L., Wilson, S. M. y Shulman, L. S. (2005). Profesores de Sustancia: El conocimiento de la material para la enseñanza. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2), 1-30. (Trabajo original publicado en ingles en 1989).

Gutiérez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele Levels of Reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2 y 3), 27 – 46.

Gutiérrez, A. (2000). Aportaciones de la investigación psicológica al aprendizaje de las matemáticas en secundaria. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 24, 23 – 33.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55 – 70.

Hadas, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 127 – 150.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44 (1-2), 5 – 23.

Hanna, G. y De Villiers, M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En G. Hanna y M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 1 – 10). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (2002). Another Approach to Proof: Arguments from Physics. *ZDM*, 34 (1), 1 – 8.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teching of Proof. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (2 volumes)*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Heinze, A. y Kwak, J. Y. (2002). Informal prerequisites for informal proofs. *ZDM*, 34 (1), 9 – 16.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70 – 95). Cambridge University Press.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific

Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X. Nº 2, 213 – 223.

Hoffer, A. (1981). Geometry is More Than Proof. *Mathematics Teacher*, 74 (1), 11 – 18.

Hoyles, C. y Lagrange, J. B. (2006). *The 17th ICMI Study, Technology Revisited*. Study Conference, Hanoi Institute of Technology, December 03-08, 2006

Huertos Rodríguez, M. (1995). El microordenador como instrumento de enseñanza individualizada. *Epsilon*, 33, 251 - 260.

Iglesias, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Iglesias, M. (2007). La Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. Una experiencia desde el CEINEM – NT. En J. Ortiz Buitrago y M. Iglesias Inojosa (Eds.), *Memorias. VI Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 211 – 225). Maracay: Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua.

Iglesias, M. (2008). *Proyecto Docente en el área de Geometría y su Didáctica*. Trabajo de ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Iglesias, M. (2009). Ideas para Enseñar. El Tangram en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17, 117 – 126.

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2013). La Demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 230- 247). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Jahn, A.P. (2002). "Locus" and "Trace" in Cabri – Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 78 - 84.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Valencia, España.

Jaime, A. (1998). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría? En A. Gutiérrez y A. Jaime (Eds.), *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática* (pp. 23 – 43). Bogotá: Una empresa docente.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295 – 384). Sevilla: Alfar.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Student´s interpretations when using Dynamic Geometry Software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 55 – 85.

Jones, K., Lagrange, J. y Lemut, E. (2002). Introduction to WG2. Tools and Technologies in Mathematical Didactics. En J. Novotná (Ed.), *Proceedings of European Research in Mathematics Education II*. Prague: Charles University, Faculty of Education.

Kadunz, G. (2002). Macros and Modules in Geometry. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 73 - 77.

Kemmis, S. (1998). *El curriculum: más allá de la teoría de la reproducción*. (Tercera edición). Madrid: Morata.

Kilpatrick, J. (1995). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y Dificultades de los Estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación. Historia.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

King, J.R. y Schattscheneider, D. Preface: Making Geometry Dynamic. (1997). En J. R. King y D. Schattscheneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington: Mathematical Association of America.

Laborde, C. (1997). Cabri – Geómetra o una nueva relación con la Geometría. En L. Puig (ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp. 33 – 48). Bogotá: Una empresa Docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. E*ducational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 151 – 161.

Larios-Osorio, V. (2009). Geometrical Proof in the Institutional Classroom Environment. En F. L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics, Volume 2* (pp. 59 – 63). The Departament of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan.

Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 42, 105–119.

Linares, O. (2008). *Evaluación de una unidad didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje del teorema de Pitágoras en un ambiente de geometría dinámica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Llinares, S. (2007). *Formación de Profesores de Matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, julio 2007.

Loureiro, C. (1999). Computadores no Ensino da Geometria. En E. Veloso, H. Fonseca, J. P. da Ponte y P. Abrantes (Eds.), *Ensino da Geometria no virar do milenio (pp. 43 – 50)*. Departamento de Educação da Facultade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Luengo González, R., Blanco Nieto, L., Mendoza García, M., Sánchez Pesquero, C., Márquez Zurita, L. y Casas García, L.M. (1997). *Proporcionalidad Geometrica y Semejanza*. Madrid: Síntesis.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada – España.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perpectiva curricular. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 81 - 101). Granada: Comares.

Mammana, C. y Villani, V. (1994). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Discussion Document for an ICMI Study. *L' Enseignement Mathématique*, 40, 345 – 357.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. En C. Mammana y V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study (pp. 1 – 8)*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: Instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 103 - 120). Granada: Comares.

Mariotti, M.A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. *La lettre de la preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 98 11/12. Disponible en: http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112.html

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of Dynamic Software Environment. E*ducational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 25 - 53.

Mariotti, M. A. y Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 40 (3), 341 – 344.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a Dynamic Computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44 (1-2),* 87 – 125.

Miles, M.B. y Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Newbury Park, CA: Sage.

Mills, J. y Tall, D. (1988). From the visual to the logical in mathematics. *Bullettin of I.M.A.*, 21 11/12 Nov – Dec, 176 – 183.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington, Delaware, E.U.A: Addison – Wesley Iberoamericana, S.A.

Moreno, Z. (2006). *Una propuesta didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en 8° grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos, San Juan de los Morros.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (M. Fernández, Trad.). Sevilla: SAEM Thales.

Niss, M. y Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. (English edition). Roskilde University, Department of Sciencie, Systems and Models, IMFUFA.

Orellana Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática* 11(2), 21- 42.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2005). *La definición y selección de competencias clave. Resumen Ejecutivo* [Documento en Línea], Disponible en: http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco/en/index/02.html [Consulta: 2013, Noviembre 26]

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2002). *Conocimientos y aptitudes para la vida. Primeros resultados del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) 2000 de la OCDE*. México: Santillana.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia / Secretaría General de Educación / Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (I.N.E.C.S.E.).

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2006). *PISA 2006. Marco de la Evaluación Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. Madrid: Santillana.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2009). *PISA 2009. Assessment Framework: Key competencies in reading, mathematics and science*. París: Autor.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. París: Autor.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Granada, Granada – España.

Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Granada: Comares.

Pérez, J. C. (2008). *La calculadora graficadora en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría de la circunferencia y del círculo a nivel de 7º grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Pérez, M. (2010). *La metodología de enseñanza – aprendizaje por proyectos en la formación inicial del maestro de educación integral en geometría*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Pérez Jiménez, A. (1993). Cabri - Géomètre, un programa para trabajar en clase. *Epsilon*, 26, 93 - 102.

Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Ponte, J. da. (1995). Novas tecnologías na aula de Matemática. *Educacao e Matemática*, 34, 2º trimestre de 1995, 2 – 9.

Posamentier, A. S. (2002). *Advanced Euclidean Geometry*. USA: Key College Publishing.

Posner, G.J. (2000). *Análisis del Currículo*. (Segunda edición). Colombia: Mc Graw – Hill.

Potari, D. (2013). Introduction to the papers and posters of WG17: From a study of teaching practices to issues in teacher education [Documento en línea]. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education, CERME 8 (pp. 2896-2907).* Ankara, Turkey. Disponible en: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/index.php?slab=proceedings [Consulta: 2014, Enero 26]

Reiss, K. y Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM*, 34 (1), 29 – 35.

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A. y Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 40 (3). 455 – 467.

Rico, L., Castro, E. y Coriat, M. (1997). Revisión Teórica sobre la Noción de Currículo. En L. Rico Romero (Ed.), *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria* (pp. 77 – 150) . Madrid: Síntesis.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 1 - 22). Granada: Comares.

Rico Romero, L. y Lupiánez Gómez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Ruiz-Hidalgo, J.F. y Fernández-Plaza, J.A. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante el uso del análisis didáctico. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 231 – 251). Granada: Comares.

Sabariego Puig, M. (2012). La Investigación Educativa: Génesis, Evolución y Características. En R. Bisquera Alzina (Coord.), *Metodología de la Investigación Educativa* (pp. 51 – 87). Madrid: La Muralla.

Sagástegui, D. (2004). Una apuesta por la cultura: el aprendizaje situado. *Sinéctica*, 24, 30 – 39.

Sánchez, R. (2008). *El plegado de papel y las construcciones con regla y compás en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría del triángulo a nivel de 7º grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Sánchez, J. e Iglesias, M. (2012). El desempeño de los docentes de matemática y sus necesidades formativas. *Paradigma*, Vol. XXXIII (1), 155 – 173.

Sarasua, J. M., Ruiz de Gauna, J. G. y Arrieta, M. (2013). Prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diferentes etapas educativas. *Revista de Psicodidáctica*, 18 (2), 313 – 329.

Schumann, H. (1996). The Influence of Interactive Tools in Geometry Learning. En J. M. Laborde (Ed.), *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (pp. 157 – 187). Berlin: Springer.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria (pp. 83 – 149)*. Madrid: Síntesis.

Serres, y. (2007). *El rol de las prácticas en la formación de los docentes de Matemática*. Tesis de doctorado no publicada, Instituto Pedagógico Nacional, México.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2), 1-30. (Trabajo original publicado en ingles en 1987).

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologías de las Matemáticas y la Educación Matemática. [Documento en Línea] Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/escorial/SIERLERM.html [Consulta: 2012, Diciembre 12]

Sinclair, M.P. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanyng materials. *Educational Studies in Mathematics 52*, 289 - 317.

Siñeriz, L. E. (2007). Los griegos, la heurística, la regla y el compás. En R.S. Abrate y M. D. Pochulu (comps.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática* (pp. 193 – 215). Villa María: Universidad de Villa María.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y Desarrollo del Currículo*. Madrid: Morata.

Sträßer, R. (2002). Research on Dynamic Geometry Software (DGS) – an introduction. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 65.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (2006). *Manual de Trabajos de Grado de Expecialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Caracas: FEDEUPEL.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry*. Chicago: University of Chicago.

Valverde, G., Castro, E. y Molina, M. (2013). Empleo del análisis didáctico en un experimento de enseñanza con futuros maestros de educación primaria. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 212 - 229). Granada: Comares.

Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Real de Utrecht: Utrecht, Holanda. Disponible en:

http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Van Hiele, P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP* 198, 199-205. Traducido al español por Ricardo Barroso. Disponible en:

http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/aprgeorefer.html

Veloso, E. y Ponte, J.P. da. (1999). Introdução. En E. Veloso, H. Fonseca, J. P. da Ponte y P. Abrantes (Eds.), *Ensino da Geometria no virar do milenio (pp. 1 – 5).* Departamento de Educação da Facultade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Yerushalmy, M. (1991). Enhancing acquisition of basic geometrical concepts with the use of the Geometric Supposer. *Journal Educational Computing Research*, 7 (4), 407 – 420.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. Thousand Oaks, United States of America: Sage.

SOFTWARE

Cabri – Géomètre II. Copyright Laboratorio de Estructuras Discretas y de Didáctica (IMAG) de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, 1997 – 1999. Editor: Texas Instruments.

[ANEXO A]
[Ponencia sobre la demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica]

LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA DESDE UNA PERSPECTIVA EPISTEMOLÓGICA

Martha Iglesias Inojosa[1] y José Ortiz Buitrago[2]
[1]Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay y [2]Universidad de Carabobo, Núcleo Aragua
mmiglesias@gmail.com y ortizbuitrago@gmail.com
Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría

RESUMEN

Se presenta una aproximación al estudio de la demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica, teniendo como referencia dos asuntos esenciales de la Teoría del Conocimiento, como lo son la forma de conocimiento y el criterio de verdad; para ello, se han planteado, en el campo de la Matemática y de la Educación Matemática, las siguientes interrogantes: ¿El conocimiento matemático es racional o puede ser intuitivo? ¿Cómo se sabe que el conocimiento matemático es verdadero? En la búsqueda de respuesta a estas interrogantes se han revisado algunas investigaciones sobre intuición y demostración mencionadas por D'Amore (2006) y entre las cuales destacan los trabajos realizados por Fischbein (1987), Duval (1999), Balacheff (2000) y Harel y Sowder (2007); encontrándose que la introducción del método axiomático contribuyó a la evolución de la Matemática como disciplina científica y, además, trajo consigo a los métodos de demostración como formas aceptadas de validación de las verdades matemáticas. Sin embargo, en el ámbito educativo, esto ha ocasionado una sobrevaloración de los llamados contextos de justificación, descuidando así lo relacionado con el descubrimiento del conocimiento matemático. Esto último pareciera estar asociado a un conjunto de procesos como construir, explorar, visualizar, conjeturar y verificar, los cuales conducirían a sentir la necesidad de justificación; siendo esta necesidad lo que impulsaría a los profesores y estudiantes a dar una explicación, presentar una prueba o realizar una demostración formal. Asimismo, estos autores destacan las relaciones existentes entre la intuición, la demostración y la argumentación; obligándonos a tener en cuenta aspectos relacionados con las intuiciones matemáticas, las prácticas argumentativas y las acciones de proceso y producto propias de la actividad demostrativa a la hora de analizar las acciones y las producciones de los estudiantes para profesor de Matemática cuando resuelvan un problema geométrico en un ambiente de Geometría Dinámica.

Palabras clave: Teoría del Conocimiento, procesos de justificación, verdades matemáticas.

Introducción

La *Demostración Matemática* se estudia desde diferentes perspectivas: *Histórica* (evolución histórica de la Matemática y, en particular, de la Geometría y la demostración y sus implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje), *Epistemológica* (rasgos característicos del conocimiento matemático, fuentes o procedencia, criterios de validación y relación entre el sujeto que conoce y el objeto matemático), *Cognitiva* (desarrollo del pensamiento matemático, dificultades confrontadas, errores cometidos y competencias matemáticas alcanzadas y puestas en práctica) y *Didáctica* (estrategias, materiales y recursos didácticos que favorezcan el abordaje y la comprensión de la actividad demostrativa).

En el contexto de la Línea de Investigación en *Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría* adscrita al *Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías* (CEINEM – NT) de la *Universidad Pedagógica Experimental Libertador - Instituto Pedagógico de Maracay*, se ha enfatizado en las *perspectivas cognitiva* (la demostración como objeto de aprendizaje) *y didáctica* (la demostración como objeto de enseñanza). Desde la *perspectiva cognitiva*, se ha venido estudiando la evolución del *Pensamiento Geométrico*; entendido éste como la dinámica cognitiva que se produce cuando una persona – sea docente, sea estudiante o sea un estudioso – está abordando una tarea (resolver un problema, construir un modelo matemático, realizar una demostración) que implica un objeto matemático directo (definiciones y proposiciones matemáticas) o indirecto (los procesos de validación matemática como la demostración, entre otros) asociado con la Geometría. Y, en cuanto a la *perspectiva didáctica*, la actividad investigativa ha estado orientada a diseñar, poner en práctica y evaluar los resultados (productos y procesos) de unidades didácticas con contenido geométrico, teniendo como sustento distintos referentes teóricos y metodológicos.

No obstante, el énfasis en lo cognitivo y lo didáctico en los estudios hasta ahora realizados o dirigidos por los autores, también es importante abordar el estudio de la demostración matemática desde una perspectiva epistemológica, ya que, ésta es una actividad propia y distintiva del quehacer matemático, por tratarse de un objeto matemático indirecto relacionado con el carácter lógico – deductivo de la Matemática como disciplina científica.

En este orden de ideas, en este trabajo se pretende dar a conocer una aproximación al estudio de la demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica, teniendo como referencia dos asuntos esenciales de la Teoría del Conocimiento como lo son las formas del conocimiento humano y el criterio de la verdad (León Rugeles, 2011). Para ello, se han planteado en el campo de la Matemática y de la Educación Matemática las siguientes dos preguntas asociadas a los asuntos antes mencionados:

1. *Formas del conocimiento matemático*: ¿El conocimiento matemático es racional o puede ser intuitivo?

2. *El criterio de verdad del conocimiento matemático*: ¿Cómo se sabe que el conocimiento matemático es verdadero?

En la búsqueda de respuesta a estas interrogantes se han revisado algunas investigaciones sobre intuición y demostración mencionadas por D'Amore (2006) en su obra compilatoria intitulada *Didáctica de la Matemática* y entre las cuales destacan los trabajos realizados por Fischbein (1987), Duval (1999), Balacheff (2000), Harel y Sowder (2007) y complementado por los trabajos de Fetisov (1973), Perry Carrasco, Camargo Uribe, Samper de Caicedo y Rojas Morales (2006) y Flores (2007).

También, cabe señalar que se ha seleccionado este trabajo, debido a la realización de un proyecto de investigación, más ambicioso, donde se estudian las competencias matemáticas y didácticas que ponen en práctica los profesores en formación cuando abordan la demostración en Geometría.

¿Qué es una Demostración Matemática?

Teniendo en cuenta la evolución histórica de la Matemática como disciplina científica, se puede afirmar que tanto la inducción como la deducción han sido dos formas o caminos de llegar al conocimiento matemático. *La Matemática*, en sus inicios, *se caracterizó por su carácter empírico – práctico*, ya que se dedicaba a la resolución de problemas provenientes de las prácticas cotidianas realizadas por los seres humanos (problemas de reparto, medición de extensiones de tierra, construcción de templos y graneros, etc.), destacándose así el uso instrumental del conocimiento matemático. De manera que el principal propósito de los primeros matemáticos fue desarrollar algoritmos o procedimientos de cálculo que les permitieran resolver situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, unos 300 años A.C, con la publicación del libro Elementos - obra compilatoria del conocimiento aritmético y geométrico existente para su época - el matemático griego Euclides introduce el llamado *método axiomático*, el cual se convierte en el método privilegiado para organizar y validar el conocimiento matemático. Así, pues, *la Matemática* abandona su carácter empírico – práctico y *se convierte en la disciplina lógico – deductiva por excelencia* y se comienza a distinguir entre la *Matemática Pura* y la *Matemática Aplicada*.

Refiriéndose al caso de la Geometría, Fetisov (1973) afirmó que

> "Por supuesto, los primeros conocimientos geométricos del hombre se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. No obstante, conforme creció el conjunto de conocimientos geométricos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras, por medio de la deducción, sin recurrir a las observaciones o a los experimentos" (p. 16)

El uso del método deductivo para obtener nuevas proposiciones geométricas a partir de otras conocidas sirvió como base para introducir la noción de sistema axiomático en Matemática y, en particular, en Aritmética y Geometría. De esta manera, no es fortuito que, históricamente, la Geometría Euclidiana sea la más connotada representante de una teoría o un sistema axiomático. Por lo antes señalado, puede decirse que la *Demostración Matemática* como objeto formal está asociada al desarrollo de una *teoría axiomática* cuyos componentes son: (1) Conceptos no definidos o términos primitivos. (2) Postulados o axiomas. (3) Conceptos definidos o definiciones propiamente dichas. (4) Teoremas, Lemas y Corolarios. (5) Métodos de demostración (directos e indirectos); permitiendo decir que: "Una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y propiedades previamente establecidas" (Fetisov, 1973, p. 17).

Asimismo, Balacheff (2000, p. 2) señala que “la demostración es una herramienta esencial de prueba; ésta conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez” y seguidamente añade que “es también el objeto de estudio de la lógica”; estos son los dos aspectos principales de la demostración en lo relativo a la comunidad matemática.

Cabe señalar que la pregunta clave para un matemático al momento de iniciar el desarrollo de una teoría axiomática es la siguiente: ¿Cuáles proposiciones se aceptan sin demostración?, ya que, estas proposiciones serán los postulados o axiomas que servirán de base para la construcción de la teoría; de modo que la *verdad del conocimiento matemático* es absoluta en el seno de una teoría matemática, pero relativa al conjunto de axiomas seleccionados; así, por ejemplo, las llamadas Geometrías No Euclidianas fueron desarrolladas a partir de la aceptación de los primeros cuatro axiomas asumidos por Euclides en su obra Elementos y la negación del célebre quinto postulado, en los esfuerzos realizados, a través de varios siglos, por demostrar la independencia de este postulado (es decir, por demostrar que el quinto postulado no podía deducirse a partir de los cuatro postulados precedentes). Es necesario indicar que los primeros cuatro postulados admitidos por Euclides hacen referencia a situaciones geométricas fáciles de aceptar como verdaderas: (1) Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una única línea recta. (2) Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente. (3) Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una única circunferencia. (4) Todos los ángulos rectos son iguales; mientras que el quinto postulado hace referencia a una situación que no es fácil de aceptar como evidente: “Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos, y la suma de estos es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado”. Actualmente, el quinto postulado es conocido como el postulado de las paralelas y el enunciado equivalente más conocido establece que por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela.

Además, los axiomas seleccionados deben satisfacer dos características relevantes: *Consistencia* (en el seno de una teoría axiomática es imposible que sean verdaderas una proposición p y su negación) e *Independencia* (Ningún axioma puede deducirse de los precedentes).

También se ha señalado el asunto de la *Completitud*, pero Kurt Gödel, en 1931, publicó un artículo, el cual ha sido considerado una de las más importantes contribuciones a la lógica y a la Matemática de los últimos siglos; en este artículo, Gödel enuncia y demuestra el Teorema de la Incompletitud de la Aritmética: "*Todo sistema formal deductivo que añada, cuando menos, al aparato de la lógica elemental los principios y reglas de la Aritmética se enfrentará fatalmente con proposiciones bien construidas que no podrá ni demostrar ni refutar y que, por lo tanto son "indecidibles*". En otras palabras, la presencia de tales proposiciones delata que el sistema axiomático en cuestión es "incompleto". Este resultado tuvo consecuencias innegables en el quehacer matemático. Al respecto, el reconocido matemático Von Neumann señaló que "*el objeto de la lógica ha cambiado por completo su naturaleza y posibilidades con esta aportación*"; en el prólogo del libro intitulado "El Teorema de Gödel" (Nagel y Newman, 2000, p. 11), se señala lo siguiente: "Mas un descubrimiento científico de semejante magnitud no puede menos de tener repercusiones filosóficas", ya que "Gödel puso coto con su descubrimiento al imperialismo de la razón lógica, representada por el logicismo de Russell o el formalismo de Hilbert".

Al respecto, valdría la pena añadir que la existencia de tales proposiciones indecidibles y el riego de toparse con ellas no le ha impedido a los matemáticos seguir esforzándose por demostrar algunas conjeturas, tal como lo hizo Andrews Wiles, matemático británico, que logró demostrar, en 1993, el llamado "último Teorema de Fermat" (No existe solución con números enteros no nulos para la ecuación: $x^n + y^n = z^n$ si n es un entero más grande que dos). Wiles se sintió, desde niño, fascinado por este enunciado matemático, y decidió dedicarle su vida a la demostración del mismo. Duró ocho años desarrollando la demostración, la cual ocupa más de cien páginas. Hubiera sido una tragedia personal para Wiles, dedicar su vida a la demostración de una proposición indecidible.

Además, desde un punto de vista matemático, es preciso dar respuesta a ciertas interrogantes: ¿Qué condiciones debe reunir una demostración? ¿Qué significa hacer una demostración matemática? ¿Cómo se valida una demostración? Estos son elementos que es importante tenerlos en cuenta. Y son preguntas asociadas a la *perspectiva epistemológica.* De modo que hasta este apartado, se ha enfatizado en la demostración, teniendo en cuenta el significado formal de la Matemática, estableciéndose que la demostración es una herramienta de prueba, una manera de validar una proposición matemática; una proposición matemática es verdadera si es un axioma o postulado en el seno de una teoría axiomática o si es demostrada haciendo uso de los métodos conocidos. Además, la prueba debe ser comunicada y, además, sometida a escrutinio por integrantes de la comunidad científica.

Intuición y Demostración

Para Sierpinska y Lerman (1996, p. 3)

> La epistemología se ocupa en sí misma con una 'reconstrucción racional' de los procesos de pensamiento científico, esto es con la descripción de cómo los procesos científicos se desarrollarían si 'factores irracionales' no interfirieran. Las 'reconstrucciones racionales' quieren decir descripciones de los procesos de pensamiento de los científicos, no cuando están descubriendo algo, sino cuando están intentando comunicar y justificar sus descubrimientos. Esto es, presentaciones del **'contexto de justificación'** del pensamiento científico.

Entonces, hasta aquí, se ha enfatizado en lo que se conoce con el nombre de *contexto de justificación*, pero se ha ignorado lo relacionado con el *contexto de descubrimiento del conocimiento matemático*; contexto en el cual aparecen asuntos vinculados con la evidencia empírica, la intuición y la convicción; al respecto, Sierpinska y Lerman (1996) expresan que para los representantes del Fundacionalismo en la Filosofía de la Matemática "los procesos de hechos del descubrimiento científico y del impacto sobre ellos de los factores cognitivos, sociales e histórico-culturales pertenecen no a la epistemología sino a los dominios empíricos de la psicología, sociología e historia del conocimiento" (p. 3). Por ello, los asuntos vinculados al contexto de descubrimiento han venido siendo abordados por la

Psicología de la Educación Matemática, destacando los trabajos realizados por Efraim Fischbein, los cuales tienen implicaciones didácticas significativas.

En relación a lo antes mencionado, D'Amore (2006) destaca que, en la historia del pensamiento filosófico, existe un ir y venir entre las siguientes dos tesis: si es más perfecta como forma de conocimiento la que deriva del intuir o la que deriva del razonar; es decir, existe un ir y venir entre las tesis centradas en el contexto de justificación o las tesis centradas en el contexto de descubrimiento del conocimiento matemático. Sin entrar en este debate, es oportuno señalar que las investigaciones realizadas por Fischbein (1987) han dejado en claro la relación existente entre intuición y demostración en el campo de la Matemática y, además, como este asunto está vinculado a la necesidad de certeza que tienen los seres humanos y, en particular, los hombres y mujeres dedicados a las ciencias; al respecto, este autor expresa que

> Es por la lucha para hacer explícita y para purificar la estructura formal, deductiva de la ciencia que los científicos y filósofos han descubierto los efectos fundamentales (tanto positivos como negativos) de los mecanismos intuitivos de comprender, resolver, inventar y aprender. La contribución de los matemáticos ha sido la más significativa, probablemente porque las matemáticas, por su propia naturaleza, es la más adecuada para alcanzar una estructura axiomatizada. Es en el curso del pensamiento matemático que las cualidades de un modelo formal, ideal por un lado y las limitaciones concretas, psicológicas, por el otro, parecen tan bruscamente contrastantes. (p. 8)

Dejando claro que la intuición es una forma de conocimiento que está relacionada con ciertas tareas intelectuales como comprender la definición de un concepto, resolver un problema, crear un algoritmo o procedimiento, realizar una demostración en Matemática; así como la necesidad de conocer si las proposiciones intuitivamente aceptadas como evidentes (sin recurrir a la demostración) son realmente verdaderas. Surgiendo así lo que se conoce como "el problema de la evidencia", el cual Fischbein (1987) describe de la siguiente manera:

> Al tratar de definir los conceptos utilizados y para construir estructuras deductivas, los matemáticos han de tener el máximo cuidado para no depender de lo intuitivo, de lo aceptado implícitamente, de la evidencia. (…). Tratando de construir una estructura lógica – deductiva, los matemáticos tenían, en primer lugar, que aceptar un grupo de

> proposiciones iniciales. El criterio utilizado fue el de la (aparente) evidencia: si uno tiene que aceptar inicialmente algunas proposiciones no probadas como puntos de partida, es evidente que uno trata de elegir entre aquellas proposiciones que puedan ser aceptadas sin pruebas. (p. 8)

De manera tal que los matemáticos tienen que ser capaces de distinguir entre las proposiciones directamente aceptables por evidentes (axiomas o postulados) y aquellas propiedades que tienen que ser probadas (teoremas), con el propósito de estructurar una teoría axiomática que satisfaga los requerimientos establecidos: consistencia e independencia. Y esto representa un verdadero reto universal, ya que, a través de la historia de la Matemática (y de las Ciencias en general), un conjunto de revoluciones científicas han contribuido a "la noción de que la evidencia (es decir, la evidencia intuitiva) no es sinónimo de certeza" (Fischbein, 1987, p. 10). Sin embargo, los matemáticos no pueden renunciar a la evidencia intuitiva; ellos tienen que seguir arriesgándose y hacer uso de su intuición matemática, especialmente al momento de resolver un problema y hacer una demostración, tal como lo afirma Fischbein (1987, p. 56):

> La intuición cumple, en el plano intelectual, la función desempeñada por la percepción a nivel sensorial: la intuición es la antesala directa a la acción cognitiva (mental o práctica). Se organiza la información en una estructura de comportamiento significativo y creíble intrínsecamente.

De lo antes expuesto, se puede afirmar que la intuición se acepta como una particular forma de conocimiento por lo que la idea, el concepto resulta inmediatamente presente a la conciencia sin que eso dependa de algún proceso lógico y racional (D'Amore, 2006) y, además, que la evidencia es una característica general del conocimiento intuitivo. Así, pues, los matemáticos suelen recurrir a la intuición para seleccionar los axiomas o postulados que aceptarán por evidencia y que les servirán de base para construir una teoría axiomática.

Asimismo, los matemáticos acostumbran hacer usos de modelos que favorecen la comprensión de ciertas nociones matemáticas y que favorecen el desarrollo del conocimiento intuitivo mediante el establecimiento de relaciones entre los objetos matemáticos involucrados o el descubrimiento de ciertas propiedades invariantes.

Para comprender la relación entre intuición y demostración, es recomendable revisar los trabajos de Balacheff (2000), en los cuales este autor, entre varios asuntos, ha analizado la complejidad de la noción de prueba matemática a nivel teórico, con el fin de distinguir el significado de los verbos explicar, probar y demostrar y sus implicaciones en las investigaciones sobre el aprendizaje de la demostración; al respecto, Balacheff (2000) señala que

> Los verbos explicar, probar y demostrar son considerados frecuentemente como sinónimos en la práctica de la enseñanza de las matemáticas; (…). Ellos conducen a amalgamar diferentes niveles de actividad de los alumnos. Es necesario distinguirlos. Trataremos de mostrar este fenómeno a través de la complejidad del problema del aprendizaje de la demostración (p. 11).

Para precisar el significado de los términos explicación, prueba, demostración, razonamiento y procesos de validación, Balacheff (2000) comienza señalando que

> El paso inicial hace referencia a lo que los matemáticos llaman a menudo "intuición". Esta se remite a los significados, es decir, a la comprensión de la validez de una aserción, no por medio de la lógica, sino a través de las relaciones con el cuerpo de los conocimientos matemáticos (p. 11).

Realizada esta aclaratoria, Balachaeff (2000) procede a establecer las siguientes definiciones:

Explicación: Ésta establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en los conocimientos y en lo que constituye la racionalidad (reglas de decisión de la verdad) de la persona que la expresa (en términos lingüísticos, sujeto locutor), haciendo uso esencialmente de la lengua natural. En la explicación, la verdad de una proposición ya ha sido aceptada por el sujeto locutor, pero no necesariamente por la audiencia (o por los integrantes de una comunidad).

Prueba: es una explicación reconocida y aceptada por una comunidad, una vez que la misma ha sido dada a conocer o comunicada por el sujeto locutor. Dicha aceptación no es definitiva, ya que, puede cambiar con el avance de los conocimientos y las reglas en las cuales se sustenta.

Demostración: Es el tipo de prueba predominante en Matemática. Una demostración "se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas" (p. 13). Como forma discursiva, la demostración se caracteriza por el rigor formal y el empleo del lenguaje simbólico; además, es un tipo de prueba que requiere ser validada por la comunidad matemática para ser debidamente aceptada.

Razonamiento: Es la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información.

Procesos de validación: Es una forma de razonamiento cuando tenga como propósito asegurarse de la validez de una proposición y producir una explicación, una prueba o una demostración.

Una vez establecidas estas definiciones, Balacheff (2000) enfatiza en las dimensiones sociales de los procesos de validación de las pruebas y de las demostraciones; al respecto, este autor expresa que:

> Uno de los principales medios que permiten transformar una situación de decisión en una situación de prueba es someterla a debate para garantizar o desconocer su validez. (…). En una situación de decisión, las operaciones intelectuales del razonamiento hipotético – deductivo (…) pueden ser puestas en práctica sin que, por consiguiente, sea producida una prueba. (…). Por el contrario las situaciones en las cuales los estudiantes tienen que producir soluciones comunes a un problema (…) necesitan la formación progresiva de un lenguaje común, adecuado a los objetos y a las relaciones en juego. Necesita también de la elaboración o el reconocimiento de un sistema común de decisión y prueba para los grupos de trabajos constituidos (p. 17).

De esta manera, cualquier investigación que se pretenda realizar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración debería tener en cuenta los fenómenos socio-afectivos que intervienen en todo proceso de interacción social y, además, pareciera razonable pensar en una perspectiva socio-cognitiva a la hora de analizar las actividades y producciones de los estudiantes cuando abordan procesos de validación de una proposición matemática.

Asimismo, Balacheff (2000) menciona algunos elementos necesarios para emprender un proceso de prueba para la solución de un problema:

1. La identificación de un riesgo generado por la incertidumbre en la motivación de un individuo; es decir, la toma de conciencia del riesgo que implica admitir un enunciado falso o rechazar uno verdadero.

2. El deseo de certidumbre; es decir, la búsqueda de la verdad o el deseo de saber.

Además, Balacheff (2000) ha realizado sus investigaciones sobre el aprendizaje de la demostración en el contexto de la educación secundaria francesa, ya que, en la misma se produce el paso de la Geometría Práctica a la Geometría Deductiva y, por ello, demuestra su interés por los procesos de validación en el ámbito escolar y, en particular, por la microgénesis de la prueba en el contexto de ciertas situaciones didácticas.

Por otra parte, Balacheff (2000) distingue entre el discurso argumentativo natural y el discurso argumentativo formal, cuando establece que: “Distanciarse del “discurso argumentativo natural” para elaborar un “discurso argumentativo formal” basado en un lenguaje operativo, permite el cálculo de las proposiciones y las relaciones que garantizan las pruebas de nivel elevado, sobre todo las demostraciones” (p. 20).

Argumentación y Demostración

Esto nos lleva a considerar las relaciones entre argumentación y demostración que han sido investigadas por Duval (1999), quien tiene dos ámbitos de investigación, uno es el campo de los registros semióticos; el otro es la diferencia entre argumentar y demostrar, en sus aspectos didácticos.

Según Duval (1999), argumentar y demostrar son actividades diferentes al menos en la mente del docente, pero no tan diferentes en las expectativas y en los primeros pasos de los estudiantes. Ambas actividades tienen una base lingüística muy semejante y esta es una de las razones por las cuales a los estudiantes les cuesta trabajo entender la diferencia entre las dos actividades.

Duval (1999) distingue y estudia los dos tipos de pasajes que caracterizan el funcionamiento de un proceso de razonamiento: (1) *La inferencia*, el pasaje de las proposiciones dadas como premisas o hipótesis a una proposición dada como conclusión o tesis y (2) *La concatenación*, la transición que lleva de un paso de razonamiento al siguiente. Asimismo, este autor señala que en las argumentaciones las proposiciones no tienen un reconocido estatuto operativo y que, por ende, la distinción entre contenido y estatuto operativo de las proposiciones se tiene sólo en el razonamiento deductivo; y, además, que en las argumentaciones, la inferencia se debe a relaciones semánticas entre ellas, más cercanas a la retórica que a la lógica formal (como en el caso de las demostraciones). Este autor destaca que existen diferencias notables de funcionamiento entre el modo deductivo del razonar y el modo argumentativo:

1. El modo argumentativo aparece como más natural mientras que el razonamiento deductivo se expresa, se hace, se desarrolla, se explica al interior del mismo discurso natural.

2. Toda proposición tiene dos valores, uno lógico (V o F) y uno epistémico (evidente, verosímil, incierto, conjetural, absurdo, etc.) y, por ello, no se garantiza que dos proposiciones verdaderas tengan el mismo valor epistémico. En Matemática, nos ocupamos, entre las proposiciones verdaderas, de las apodícticas (es decir aquellas cuya certeza se debe a condiciones necesarias).

3. En el curso de la demostración, el valor epistémico de la proposición se mueve del contenido al estatuto operativo; es decir, se resalta la función que cumple una proposición en el seno de una teoría axiomática (axioma o teorema) o en el contenido de una proposición molecular (hipótesis o tesis).

De modo que, en Matemática se debe examinar esta forma de lógica natural, dado que es la usualmente recurrente en el discurso en lengua común, y es en lengua común que se hace la Didáctica de la Matemática; sin embargo, la aceptación de esta forma de lógica en las clases de matemática es relativamente reciente. Y es en tal contexto que Duval (1999) busca entender si el pasaje de la argumentación a la demostración es un pasaje que crea una ruptura cognitiva o si en cambio existe una especie de continuidad.

Además, Duval (1999) considera tres modalidades de razonamiento:

Argumentación: “una forma de razonamiento natural, que no se deja describir ni evaluar según los clásicos criterios lógicos” (p. 3) y, la misma se halla estrechamente vinculada con la justificación de una afirmación o una tesis.

Demostración: es un razonamiento válido, es una verdadera prueba y la única aceptable en Matemática.

Explicación: “Da una o más razones para volver comprensible un dato (un fenómeno, un resultado, un comportamiento, etc.)”. (p.9)

También, Duval (1999) introduce una distinción entre las argumentaciones retóricas y las argumentaciones heurísticas. Para este autor, una argumentación retórica es una argumentación para convencer al interlocutor o a sí mismo, mientras que una argumentación heurística es una argumentación que se pone en acto en Matemática para avanzar en la resolución de un problema. Al respecto, Duval (1999) resalta que

> Una argumentación heurística requiere la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones, que sea de naturaleza deductiva y no sólo de naturaleza semántica. (p. 30)

Asimismo, Duval (1999) puntualiza que “una argumentación heurística debe implicar algunos subprogramas de razonamiento válido, ¡aunque no se sepa aún como ligarlos para llegar a un árbol deductivo completo que corresponda a una demostración!” (p.p. 29 y 30).

De modo que, es necesario que el profesor de Matemática tenga en consideración diversas formas discursivas susceptibles de ser puestas en práctica por sus alumnos ante la exigencia de justificación de una afirmación o una tesis; por ello, el profesor de Matemática debe diseñar situaciones donde los estudiantes se vean exigidos a producir razones (dar respuestas a preguntas del tipo ¿por qué?) y, además, a examinar la aceptabilidad de las razones expuestas (dar respuestas a preguntas que requieren de una explicación).

A continuación, se muestra un cuadro comparativo entre argumentación y demostración, teniendo en cuenta los aportes de D’Amore (2006):

Cuadro 1
Comparación entre Argumentación y Demostración

<table>
<tr><th>Argumentación</th><th>Demostración</th></tr>
<tr><td>Proporcionar argumentos, es decir razones a favor o en contra de una determinada tesis.</td><td>Trata de la verdad de una conclusión, o por lo menos su relación necesaria con las premisas.</td></tr>
<tr><td>Para la retórica antigua, la argumentación era vista como un discurso para convencer a los demás.</td><td rowspan="2">Y la demostración para convencerse a sí mismos, a su vez distinguida en demostración para convencer (¿Es verdad?) y demostración para entender (¿Por qué es verdad?).</td></tr>
<tr><td>La argumentación es el corazón del discurso persuasivo. En ella se aducen las pruebas y se impugnan las tesis del adversario.</td></tr>
<tr><td>Una argumentación no tiene jamás el rigor que obliga a una “buena” demostración. Su validez es una cuestión de grado: es más o menos fuerte.</td><td>Una demostración formal es correcta o no es correcta, no hay vía intermedia. Y si es correcta, es autosuficiente.</td></tr>
<tr><td>En una argumentación nos apoyamos en la lógica natural.</td><td>En la demostración, en la lógica formal.</td></tr>
<tr><td>Una argumentación puede tomar en cuenta el momento en el que se desarrolla.</td><td>La demostración al contrario es a-temporal.</td></tr>
<tr><td>En la argumentación se tiene la presentación de varias tesis y su verificación o refutación son simples razonamientos, con ejemplos inmediatos o con pruebas experimentales.</td><td>Y eso se halla en contraposición a las demostraciones que requieren en cambio razonamientos articulados y muchas veces lejanos de la verificación intuitiva inmediata.</td></tr>
</table>

En este cuadro se logra apreciar que la demostración – como proceso - puede ser entendida como una práctica argumentativa orientada por las leyes de la lógica formal o reglas de inferencia y dirigida a entender el porqué es válida una proposición matemática y convencer a otros y quizá a uno mismo de su validez.

Otros educadores matemáticos como Harel y Sowder (2007) han dirigido sus trabajos hacia la prueba como instrumento de la cognición individual y atribuyen las respuestas de los alumnos al funcionamiento de esquemas generales de la cognición cuya diferenciación se proponen comprender.

En el contexto latinoamericano destacan las investigaciones realizadas por Perry Carrasco, Camargo Uribe, Samper de Caicedo y Rojas Morales (2006) y Flores (2007), las cuales se ubican en el contexto de la formación inicial y permanente de los profesores de Matemática.

Perry Carrasco y otras (2006) desarrollaron una investigación que "pretendía identificar experiencias significativas con potencial para aportar a la construcción de un ambiente de aprendizaje favorable al desarrollo de la competencia demostrativa, en las que la geometría dinámica pudiera jugar un papel importante" (p. 11). Para ello, estas investigadoras formularon un constructo denominado *actividad demostrativa* desde la perspectiva de la Educación Matemática, teniendo en consideración "el aprovechamiento de la justificación como recurso para la comprensión de ideas geométricas y a la adquisición de herramientas para la comunicación de éstas y para su validación" (pp. 22 y 23). En el mencionado constructo, las autoras identifican *acciones de proceso* (visualización, exploración, conjeturación y verificación) y *acciones de producto* (explicación, prueba y presentación sistemática) y, además, proponen a la argumentación como el puente entre las acciones de proceso y las acciones de producto y viéndola como "el razonamiento asociado a todas las acciones, el cual podría considerar como el proceso mental que las estaba soportando" (p. 26).

Por un lado, las acciones de proceso están asociadas a la heurística y las mismas son realizadas con un doble propósito:

> Comprender el contenido geométrico implicado y buscar cómo justificar el hecho geométrico que subyace a la solución del problema; es decir, tales acciones, por un lado, deben generar la necesidad de justificar y, por otro, proveer elementos para satisfacer esa necesidad, circunstancia que

> debe tener como consecuencia que el estudiante se haga más responsable de la verdad (p. 58)

Y por el otro lado, las acciones de producto están relacionadas con la práctica de justificar, lo cual obliga a movilizar el razonamiento argumentativo con el propósito de formular explicaciones, pruebas o demostraciones formales.

Así, pues, Perry Carrasco y otras (2006) logran vincular los procesos y productos asociados a la actividad demostrativa, especialmente en el ámbito educativo y, además, resaltan el papel que juega el razonamiento argumentativo conjuntamente con el razonamiento deductivo a la hora de validar una proposición matemática. En nuestro caso, consideramos a la demostración en el contexto de una práctica argumentativa, la cual está vinculada con procesos y productos propios del quehacer matemático. Por ello, la demostración como proceso conlleva a la realización de un conjunto de acciones asociadas a ciertas formas de razonamiento, con la finalidad de cumplir con las funciones asociadas a la actividad demostrativa (De Villiers, 1993) como lo son: descubrir nuevos resultados o reconocer patrones y regularidades al explorar una construcción geométrica, dar una explicación o justificación de la validez de una proposición, verificar el cumplimiento de ciertas relaciones entre objetos geométricos, comunicar ideas matemáticas y sistematizar los hallazgos en el contexto de una teoría axiomática como lo es la Geometría Euclidiana. Esto conduciría a la presentación de explicaciones, pruebas o demostraciones formales.

En este orden de ideas, Flores (2007) destaca que "la función de una práctica argumentativa es convencer a otros individuos de un resultado o una conjetura" (p. 71) y, por ello, introduce la noción de *esquemas de argumentación* en vez de la noción de *esquemas de pruebas* utilizados por Balacheff (2000) y Harel y Sowder (2007). Según Flores (2007), los esquemas de argumentación pueden ser autoritarios, simbólicos, fácticos, empíricos y analíticos y, por lo general, "en un principio los esquemas de argumentación suelen ser exclusivamente autoritarios, rituales y fácticos o una combinación de ellos. Conforme se avanza en el desarrollo de las prácticas argumentativas los esquemas se vuelven empíricos y analíticos" (p. 72). Asimismo, este autor señala que en los esquemas de argumentación empíricos y analíticos es factible detectar el uso del razonamiento deductivo. En consecuencia, él asume a la demostración o prueba como el resultado de una práctica argumentativa que se apoya en esquemas analíticos cuyos razonamientos son válidos desde el punto de vista de la lógica formal. Para nosotros, la propuesta de Flores es considerada como apropiada, ya que, teniendo en cuenta el conjunto de acciones realizadas por un individuo cuando resuelve un problema matemático (construcción, exploración, formulación de conjeturas y verificación cuasi-empírica) y las formas de razonamiento que pone en práctica (intuitivo, empírico y deductivo), es posible identificar, describir y analizar los esquemas de argumentación que privilegia.

Consideraciones finales

La introducción del método axiomático contribuyó a la evolución de la Matemática como disciplina científica y, además, trajo consigo a los métodos de demostración directos e indirectos como formas aceptadas de validación de las verdades matemáticas. La Geometría Euclidiana es un ejemplo prototípico de una teoría axiomática, teniendo como punto de partida los Elementos de Euclides; obra en la cual se introducen ciertos términos geométricos no definidos y algunos axiomas (verdades evidentes y aceptadas sin demostración) como puntos de partida para ir estableciendo nuevas definiciones y demostrando un conjunto de teoremas, haciendo uso de las reglas de inferencia propias de la lógica formal. Así, desde el punto de vista de las disciplinas científicas, la Matemática es la ciencia formal por excelencia.

Sin embargo, en el ámbito educativo, esto ha ocasionado una sobrevaloración de los llamados contextos de justificación, descuidando así lo relacionado con el descubrimiento del conocimiento matemático. Esto último pareciera estar asociado a un conjunto de acciones o procesos como construir, explorar, visualizar, conjeturar y verificar, las cuales son acciones que conducirían a sentir la necesidad de justificación; siendo esta necesidad lo que impulsaría a los profesores y estudiantes a dar una explicación, presentar una prueba o realizar una demostración formal. Esta necesidad es la que compartimos, como un elemento generador de interés, para abordar, o no, una demostración en el ámbito de la educación matemática.

Asimismo, algunos autores destacan las relaciones existentes entre la intuición, la demostración y la argumentación; obligándonos a tener en cuenta aspectos relacionados con las intuiciones matemáticas, las prácticas argumentativas y las acciones de proceso y producto propias de la actividad demostrativa a la hora de analizar las acciones y las producciones de los estudiantes para profesor de Matemática cuando resuelvan un problema geométrico en un ambiente de Geometría Dinámica. En nuestro grupo de investigación se han realizado experiencias que contemplan estas relaciones y las cuales han dado como resultado que la elaboración y exploración de construcciones con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica y la mediación oportuna del docente propician que los estudiantes centren su atención en las relaciones existentes entre los objetos geométricos (iniciales, auxiliares y finales) involucrados en tales construcciones, surgiendo así la necesidad de validar sus conjeturas, ya sea mediante la verificación cuasi-empírica, la presentación de una explicación o de una prueba formal.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de Matemática*. Bogotá: Una Empresa Docente de la Universidad de los Andes.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Villiers, M. (1993). El Papel y la Función de la Demostración en Matemáticas. *Epsilon*, 26, 15–29.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fetisov, A.I. (1973). *La Demostración en Geometría*. México: Editorial Limusa – Wiley, S.A.

Fischbein, E. (1987). *Intuition* in *science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, abril, 19 (1), 63-98.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teching of Proof. En F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (2 volumes). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

León Rugeles, F. (2011). *Teoría del Conocimiento*. Valencia: Universidad de Carabobo.

Nagel, E. y Newman, J.R. (1999). *El Teorema de Gödel*. Tercera edición. Madrid: Editorial Tecnos.

Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). *Epistemologías de las Matemáticas y la Educación Matemática*. [Documento en Línea] Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/escorial/SIERLERM.html [Consulta: 2012, Diciembre 12]

Ponencia disponible en:

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2013). La Demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 230- 247). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

[ANEXO B-1]
[Programa del curso de Geometría I]

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO
“RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MARACAY

PROGRAMA DE CURSO O FASE

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN

Especialidad:	**MATEMÁTICA**
Componente:	Formación Especializada
Denominación del curso:	**GEOMETRÍA I**
Código:	**832007**
Nº de Unidades de Crédito:	3
Nº de Horas Semanales:	Teóricas: 2 y Prácticas: 3.
Tipo de curso o fase:	Homologado Obligatorio.
Área:	**GEOMETRÍA.**
Nível:	Fundamentación.
Prelación:	Ninguna.
Autor (es):	----------
Fecha de elaboración:	Abril 2006
Fecha de revisión y rediseño:	Abril 2008
Aprobación por la Unidad de Currículo:	

Sello

2. FUNDAMENTACIÓN

La Geometría adquiere gran importancia a través de la resolución de problemas, por medio de éstos el estudiante adquiere dominio sobre la asignatura y le permite avanzar paso a paso y en forma segura en ese grandioso edificio que es la Geometría. El curso de Geometría I está dirigido a los estudiantes de la especialidad de Matemática, tiene carácter teórico -práctico y es un enfoque moderno de la Geometría de Euclides, en el cual se suministran las herramientas indispensables para la comprensión de otras ramas de la Matemática. Con este curso se pretende proporcionar al participante un conjunto de experiencias que le permitan profundizar - conceptual y procedimentalmente - los conocimientos geométricos adquiridos en los niveles educativos anteriores, a través del desarrollo axiomático de algunos temas de la Geometría Euclidiana.

3. OBJETIVOS

1. Aplicar los conceptos, principios y técnicas propias de la Geometría Plana y del Espacio en la resolución de problemas.

2. Complementar el desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico - deductivo del estudiante, a fin de lograr una formación integral del mismo.

3. Proporcionarle los conocimientos fundamentales que le permitan abordar eficazmente en el curso de Geometría II.

4. CONTENIDOS

Unidad I: Evolución Histórica de la Geometría. Sistema Axiomático.

- La Geometría en su contexto histórico: (1) La Geometría en las antiguas civilizaciones (Egipto, Babilonia, China, India y las Culturas Prehispánicas); (2) La Geometría como construcción teórica. Aportes de Thales, Pitágoras y Euclides; (3) La Geometría como objeto de investigación. Tres problemas difíciles (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo), una síntesis constructivista (Euclides) y el método de agotamiento (Arquímedes); (4) La Geometría en la época postgriega. El surgimiento de la trigonometría y los trabajos de Tolomeo. Kepler y Descartes; (5) Las Geometrías No Euclidianas: Gauss, Bolyai, Lobatchevsky y Riemann; (6) La Geometría en el siglo XX. Los aportes de Félix Klein y David Hilbert y (7) La Geometría en el Siglo XXI. Teselaciones y Fractales.

- Método y Sistema Axiomático: Componentes de una teoría axiomática (términos no definidos, definiciones, axiomas, teoremas y métodos de demostración). La demostración en Geometría.

Unidad II: Puntos, Rectas y Planos. Axiomas de Orden y Axiomas de

Incidencia.

Esta unidad didáctica está orientada a estudiar las relaciones existentes entre puntos, rectas y planos; relaciones expresadas a través de los axiomas o postulados de incidencia y de orden. Asimismo, serán estudiadas ciertas definiciones y propiedades relacionadas con sistema de coordenada (recta numérica), distancia entre dos puntos, relación “estar entre”, segmento, semirrecta, semirrectas opuestas, punto medio de un segmento, etc.

Unidad III: Ángulos.

Esta unidad didáctica está dirigida a estudiar las definiciones y propiedades básicas relacionadas con ángulo, medida angular, clasificación de los ángulos según su medida, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, par lineal, bisectriz de un ángulo, rectas secantes, ángulos opuestos por el vértice, rectas perpendiculares, mediatriz de un segmento, etc.

Unidad IV: Triángulos.

Esta unidad didáctica está orientada a estudiar las definiciones y propiedades básicas relacionadas con la Geometría del Triángulo: definición, elementos de un triángulo, clasificación de los triángulos según las medidas de sus lados, clasificación de los triángulos según las medidas de sus ángulos, rectas notables de un triángulo (medianas, bisectrices, mediatrices y alturas), triángulos congruentes, criterios y teoremas de congruencia.

Unidad V: Paralelismo y Cuadriláteros.

Esta unidad didáctica está orientada, en primer lugar, a estudiar las definiciones y propiedades básicas relacionadas con las rectas paralelas, en especial, lo relacionado con rectas paralelas cortadas por una secante. En segundo lugar, se estudiarán las definiciones y propiedades básicas relacionadas con la Geometría de los cuadriláteros: definición, elementos de un cuadrilátero, clasificación de los cuadriláteros según la relación de paralelismo entre sus lados opuestos, propiedades de los paralelogramos, tipos de paralelogramos, propiedades de los rombos, rectángulos y cuadrados.

5. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

El desarrollo del curso puede llevarse a cabo de manera efectiva, realizando

- Discusión dirigida acerca de la historia de la Geometría.
- Revisión de programas de Educación Básica, Media, Diversificada y Profesional, para vincularlos con temas tratados en este curso.
- Trabajo y discusión en pequeños grupos y relación de plenarias para obtener conclusiones acerca de las estrategias metodológicas sugeridas por los estudiantes para la enseñanza de la Geometría.

- Exposiciones por parte del docente.
- Resolución de problemas. Talleres y uso de materiales y recursos manipulables.

6. MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

- Pizarra, marcadores y borrador.
- Retroproyector y transparencias.
- Video beam y proyección de diapositivas.
- Instrumentos de dibujo: regla, escuadras, compás y transportador.
- Materiales manipulables: Geoplano, Tangram, plegado de papel, plantillas de trama cuadrada, plantillas de trama circular, etc.
- Fuentes documentales impresas y en formato electrónico.

7. EVALUACIÓN

- Trabajo de indagación documental sobre la evolución histórica de la Geometría.
- Pruebas.
- Talleres o trabajos prácticos.
- Intervenciones.
- Exposiciones.

8. REFERENCIAS

Ballester, C. (1992). *Geometría*. Caracas: Fondo Editorial del CENAMEC.

Calendarios Matemáticos del Cenamec. (1992 – 2002). Caracas: Fondo Editorial del CENAMEC.

Fetisov, A.I. (1973). *La Demostración en Geometría*. México: Editorial Limusa – Wiley, S.A.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Caracas: Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Rincón Abella, G. (1994). *Un Recorrido por la Geometría*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Salazar, J. y Rojas Jiménez, J. (2005). *Geometría*. Caracas: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Várilly, J.C. (2001). La Geometría en su contexto histórico. *Matemáticas, Ciencias y*

Sociedad, Órgano de información, divulgación y formación del Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta – Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, N° 2, Año 2001.

[ANEXO B-2]
[Programa del curso de Geometría II]

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO
"RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA"
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MARACAY

PROGRAMA DE CURSO O FASE

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN

Especialidad:	**MATEMÁTICA.**
Componente:	Formación Especializada.
Denominación del curso:	**GEOMETRÍA II.**
Código:	**832008.**
Nº de Unidades de Crédito:	3.
Nº de Horas Semanales:	Teóricas: 2 y Prácticas: 3.
Tipo de curso o fase:	Homologado Obligatorio.
Área:	**GEOMETRÍA.**
Nível:	Fundamentación.
Prelación:	**GEOMETRÍA I.**
Autor (es):	---------------
Fecha de elaboración:	Abril 2004.
Fecha de revisión y rediseño:	Abril 2006.
Aprobación por la Unidad de Currículo:	

Sello

2. FUNDAMENTACIÓN

El curso de Geometría II es una continuación de Geometría I y tiene como propósito proporcionar al participante un conjunto de experiencias de aprendizaje que le permitan complementar el estudio de la Geometría, análisis y ejemplificación de las definiciones, principios, teoremas fundamentales y problemas relacionados con construcciones geométricas, proporcionalidad, semejanza de triángulos, circunferencia, polígonos, áreas de regiones poligonales, sólidos y sus volúmenes, con el fin de que alcance una visión global de esta disciplina como modelo, por excelencia, de una teoría matemática. Se ha intentado cubrir con este programa las expectativas del futuro egresado de esta especialidad entre las cuales pueden mencionarse:

- Optimizar el nivel de conocimientos en la asignatura lo cual conlleve a mejorar las cualidades del futuro docente tanto en el aspecto de contenido específico como pedagógico.

- Conocer los alcances o aplicaciones de esta asignatura hacia otras áreas del conocimiento.

3. OBJETIVOS

1. Analizar definiciones, principios y teoremas relativos a los diversos temas tratados en el curso.

2. Demostrar proposiciones relativas a los contenidos propios del curso, empleando el método axiomático.

3. Resolver problemas que requieran de la aplicación de los principios, métodos y técnicas relacionadas con los conceptos geométricos estudiados en el curso.

4. CONTENIDOS

Unidad I: Semejanza de Triángulos y Desigualdades Geométricas.

Esta unidad didáctica está orientada al estudio de las definiciones y propiedades básicas relacionadas con la semejanza de triángulos (triángulos semejantes, criterios de semejanza y teoremas de semejanza). Asimismo, se estudiarán las definiciones y propiedades básicas relacionadas con desigualdades geométricas.

Unidad II: Área y perímetro de Regiones Poligonales.

Esta unidad didáctica está dirigida a la deducción de las fórmulas para el cálculo de área de figuras poligonales y su correspondiente aplicación en la resolución de problemas geométricos. Además, se calculará el perímetro de figuras poligonales.

Unidad III: Circunferencia y Círculo.

Esta unidad didáctica está dirigida al estudio de la Geometría de la Circunferencia y del Círculo.

Unidad IV: Construcciones Geométricas con Regla y Compás.

Esta unidad didáctica está orientada a la realización de ciertas construcciones geométricas con regla y compás y su correspondiente validación a través de definiciones y propiedades previamente estudiadas.

Unidad V: Cuerpos Geométricos.

Esta unidad esta orientada al estudio de las definiciones y propiedades básicas relacionadas con los cuerpos geométricos y la deducción de las fórmulas para el cálculo de volumen.

5. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

El desarrollo del curso puede llevarse a cabo de manera efectiva, realizando

- Revisión de programas de Educación Básica, Media, Diversificada y Profesional, para vincularlos con temas tratados en este curso.
- Trabajo y discusión en pequeños grupos y relación de plenarias para obtener conclusiones acerca de las estrategias metodológicas sugeridas por los estudiantes para la enseñanza de la Geometría.
- Exposiciones por parte del docente.
- Resolución de problemas. Talleres y uso de materiales y recursos manipulables.

6. MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

- Pizarra, marcadores y borrador.
- Retroproyector y transparencias.
- Video beam y proyección de diapositivas.
- Instrumentos de dibujo: regla, escuadras, compás y transportador.
- Materiales manipulables: Geoplano, Tangram, plegado de papel, plantillas de trama cuadrada, plantillas de trama circular, etc.
- Fuentes documentales impresas y en formato electrónico.

7. EVALUACIÓN

- Trabajo de indagación documental sobre la evolución histórica de la Geometría.
- Pruebas.
- Talleres o trabajos prácticos.
- Intervenciones.
- Exposiciones.

8. REFERENCIAS

Ballester, C. (1992). *Geometría*. Caracas: Fondo Editorial del CENAMEC.

Calendarios Matemáticos del Cenamec. (1992 – 2002). Caracas: Fondo Editorial del CENAMEC.

Fetisov, A.I. (1973). *La Demostración en Geometría*. México: Editorial Limusa – Wiley, S.A.

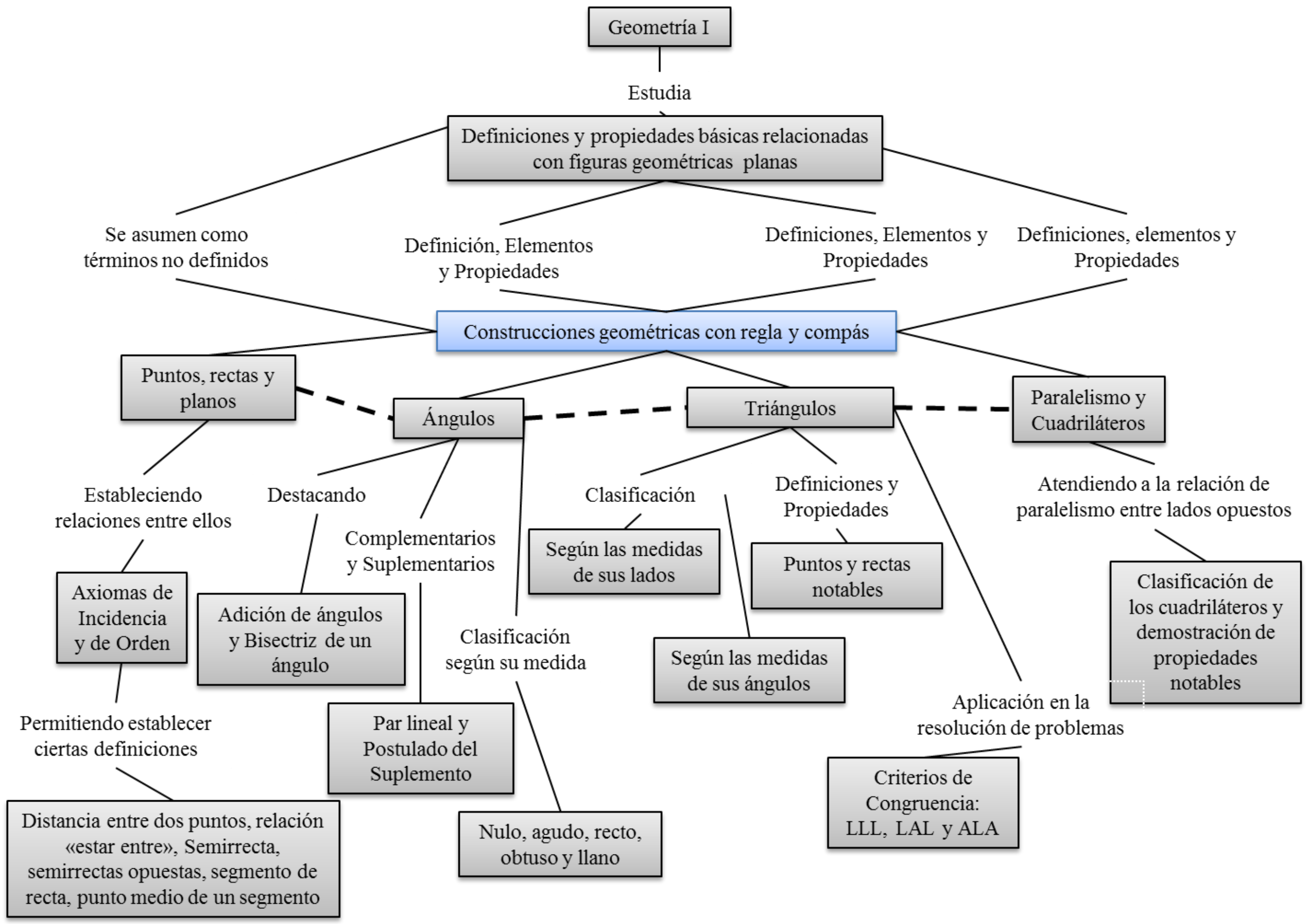
Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Caracas: Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Rincón Abella, G. (1994). *Un Recorrido por la Geometría*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

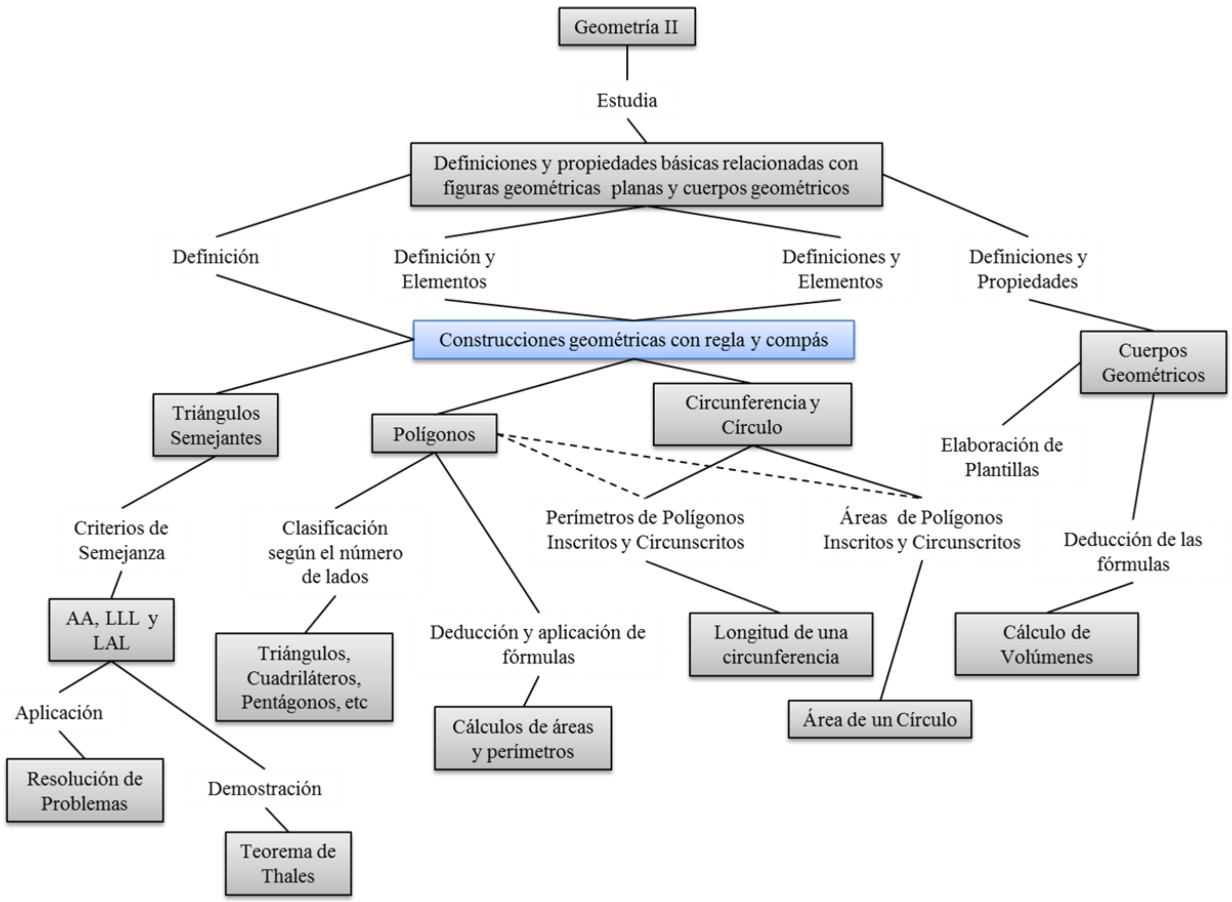
Salazar, J. y Rojas Jiménez, J. (2005). *Geometría*. Caracas: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Várilly, J.C. (2001). La Geometría en su contexto histórico. *Matemáticas, Ciencias y Sociedad*, Órgano de información, divulgación y formación del Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta – Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, N° 2, Año 2001.

[ANEXO C-1]
[Mapa conceptual con los contenidos del curso de Geometría I]



[ANEXO C-2]
[Mapa conceptual con los contenidos del curso de Geometría II]



[ANEXO D]
[Inventario de las actividades dirigidas correspondientes al taller nº 1]

Actividades dirigidas propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG_AC													
Actividades dirigidas: Lea atentamente el procedimiento señalado en cada una de las actividades propuestas y, luego, aplíquelo haciendo uso del Cabri II.													
Aspectos considerados	Siguen las instrucciones dadas y aplican el procedimiento indicado						Justifican las afirmaciones						Método de construcción
Grupo nº	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
7. Construcción de un “compás”.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	Método de los dos lugares
8. Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Método de los dos lugares
9. Construcción de un ángulo que mida 60º usando solamente regla y compás.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Método de los dos lugares
10. Construcción de un ángulo que mida 45º usando solamente regla y compás.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Método de los dos lugares
11. Trazado de la bisectriz de un ángulo dado.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Método de los dos lugares
12. División de un segmento de recta en n partes iguales.	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	Método de la figura semejante

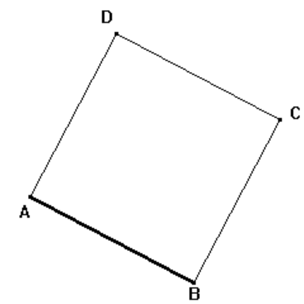
[ANEXO E]
[Inventario de las actividades libres correspondientes al taller nº 1]

Actividades libres propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG_AC

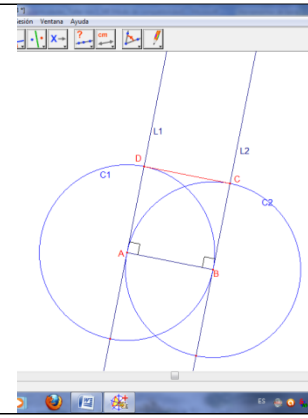
Actividades libres: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada.

Aspectos considerados	Describen el procedimiento empleado para construir la figura						Justifican las afirmaciones						Método de construcción
Grupo nº	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
7. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados.	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	Método de la figura auxiliar
8. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	Método de la figura auxiliar
9. Construcción de un triángulo dadas las medidas de un par de ángulos y la longitud del lado comprendido entre ellos.	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-	-	Método de la figura auxiliar
10. Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial).	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	-	Método de los dos lugares
11. Construir un triángulo equilátero ABC dado uno de sus lados.	+	-	+	+	+	+	+	-	-	-	+	-	Método de los dos lugares
12. Construir un rombo PQRS dadas sus diagonales PR y QS.	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	Método de los dos lugares
13. Construcción Extra	-	+	+	+	+	+	-	+	-	-	+	+	Revisar cada una de las construcciones realizadas
14. Construcción Extra	-	+	+	+	+	+	-	+	-	-	+	+	

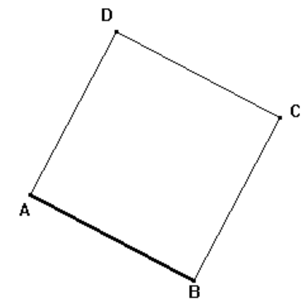
[ANEXO F-1]
[Construcción nº 2 de un cuadrado, dado uno de sus lados]

Taller n° 1 sobre Construcciones Geométricas con Regla y Compás	**Martha Iglesias Inojosa**
Parte 2: Actividades Libres	**Construcción 2**
Actividad nº 4: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada y, luego, guarda la construcción como una macro y denomínalas cuadrado, triángulo equilátero y rombo respectivamente. Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial). En la siguiente figura, se partió del lado AB, para construir el cuadrado ABCD.	

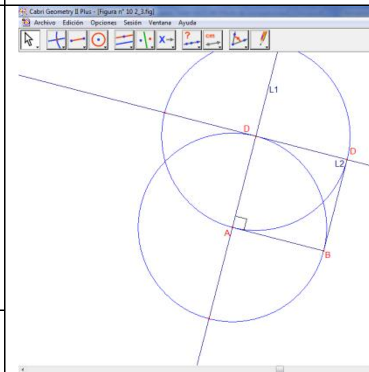
Método	Método de los Dos Lugares	Secuencia		
Instrucciones	Herramientas empleadas	Si	No	Observaciones
Dado un segmento de extremos A y B	A Punto B Punto Segmento: A, B	1 2 3		
Se trazan una recta L_1 perpendicular al segmento AB en A y una recta L_2 perpendicular al segmento AB en B. Entonces los ángulos con vértice en A y en B son ángulos rectos.	L_1 Recta (Recta perpendicular): A, _ L_2 Recta (Recta perpendicular): B, _	4 5		
Con el compás, haciendo centro en A y pasando por el punto B, se traza una	C_1 Círculo: A, B Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1 D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1	6 7 8		

circunferencia C_1 que corta a la recta L_1 en D. Así, los segmentos AB y AD son congruentes por ser radios de una misma circunferencia.	ángulo: D, A, B ángulo: C, B, A	9 10		
Con el compás, haciendo centro en B y pasando por el punto A, se traza una circunferencia C_2 que corta a la recta L_2 en C. Así, los segmentos AB y BC son congruentes por ser radios de una misma circunferencia.	C_2 Círculo: B, A Punto (Punto(s) de intersección): L_2, C_2 C Punto (Punto(s) de intersección): L_2, C_2	11 12 13		
Se traza el segmento CD.	Segmento: D, C	15		
				Hasta aquí se tiene que en el cuadrilátero ABCD se cumple que AB = AD = BC y que los ángulos < DAB y < CBA son rectos. Haría falta probar que AB = AD = DC = CD y que los ángulos < ADC y < BCD son ángulos rectos.
En el plano E, las rectas L_1 y L_2 son paralelas por ser rectas perpendiculares a la recta AB en A y B respectivamente. De modo que, los segmentos AD y BC son paralelos y congruentes en el cuadrilátero ABCD y, por ello, tal cuadrilátero es un paralelogramo y, por propiedades de los paralelogramos, se establece que AB = CD, m (< ADC) 0 90º y m (< BCD) = 90º.				

[ANEXO F-2]
[Construcción nº 3 de un cuadrado, dado uno de sus lados]

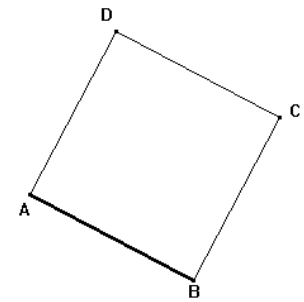
Taller n° 1 sobre Construcciones Geométricas con Regla y Compás	**Martha Iglesias Inojosa**
Parte 2: Actividades Libres	**Construcción 3**
Actividad nº 4: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada y, luego, guarda la construcción como una macro y denomínalas cuadrado, triángulo equilátero y rombo respectivamente. Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial). En la siguiente figura, se partió del lado AB, para construir el cuadrado ABCD.	

Método	Método de los Dos Lugares	Secuencia		
Instrucciones	Herramientas empleadas	Si	No	Observaciones
Dado un segmento de extremos A y B	A Punto B Punto Segmento: A, B	1 2 3		
Se traza una recta L_1 perpendicular al segmento AB en A; de modo que < B es un ángulo recto.	L_1 Recta (Recta perpendicular): A, _	4		
Con el compás, haciendo centro en A y pasando por el punto B, se traza una circunferencia C_1 que corta a la recta L_1 en D. Así, los segmentos AB y AD son congruentes por ser radios de	C_1 Círculo: A, B Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1 D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1	5 6 7		

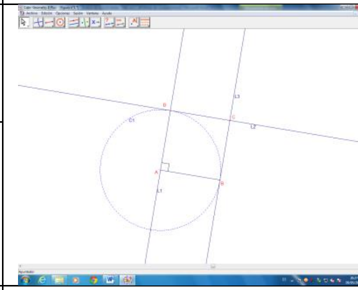
una misma circunferencia.				
Por el punto D se traza una recta L_2 paralela al segmento AB.	L_2 Recta (Recta paralela): D, _ L_1 corta a las rectas paralelas AB y L_2 en los puntos A y B respectivamente; así, se tiene que, por ser AAI y aplicando el teorema PAI, < BAD y < ADE son ángulos rectos. Además, < ADE y < ADC forman un par lineal y, por el postulado del suplemento, tales ángulos son suplementarios y como < ADE es un ángulo recto, también lo es < ADC.	8		
Se traza una circunferencia con centro en D y radio AD que corta a la recta L_2 en C. De esta manera, AD = CD	C_2 Círculo: D, A C Punto (Punto(s) de intersección): L2, C_2 Punto (Punto(s) de intersección): L2, C_2	9 10 11		
Se traza el segmento BC	Segmento: C, B ángulo: B, A, D	12 13		Hasta aquí se tiene que en el cuadrilátero ABCD se cumple que AB = AD = CD y que <BAD es un ángulo recto. Haría falta probar que AB = AD = CD = BC y que los ángulos restantes son rectos.
Y como los segmentos AB y CD son paralelos y congruentes, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, estableciéndose que AD = BC, m (< BCD) = 90º = m (< ABC)				

[ANEXO F-3]

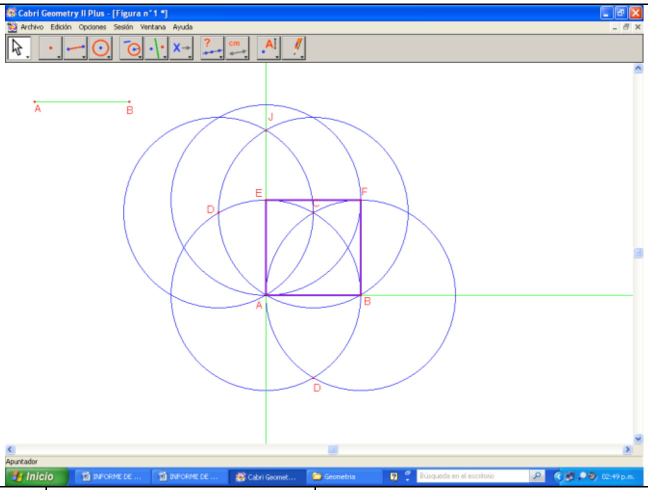
[Construcción nº 4 de un cuadrado, dado uno de sus lados]

Taller n° 1 sobre Construcciones Geométricas con Regla y Compás	**Martha Iglesias Inojosa**
Parte 2: Actividades Libres	**Construcción 4**
Actividad nº 4: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada y, luego, guarda la construcción como una macro y denomínalas cuadrado, triángulo equilátero y rombo respectivamente. Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial). En la siguiente figura, se partió del lado AB, para construir el cuadrado ABCD.	

Método	Método de los Dos Lugares		Secuencia		
Instrucciones	Herramientas empleadas		Si	No	Observaciones
Dado un segmento de extremos A y B.	A B 	Punto Punto Segmento: A, B	1 2 3		
Se traza una recta L_1 perpendicular al segmento AB en A. Así, m (< A) = 90º	L_1	Recta (Recta perpendicular): A, Segmento AB	4		
Con el compás, haciendo centro en A y pasando por el punto B, se traza una circunferencia C_1 que corta a la recta L_1 en D. Así, los segmentos AB y AD son congruentes por ser radios de una misma circunferencia.	C_1 D	Círculo: A, B Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1 Punto (Punto(s) de intersección): L_1, C_1	5 6 7		

Por el punto D se traza una recta L_2 paralela al segmento AB.	L2 Recta (Recta paralela): D, Segmento AB	8		
Por el punto B se traza una recta L_1 paralela al segmento AD.	L3 Recta (Recta paralela): B, L1	9		
Se halla el punto e intersección de las rectas L_2 y L_3	C Punto (Punto(s) de intersección): L3, L2 ángulo: B, A, D	10 11		Hasta aquí se tiene que en el cuadrilátero ABCD se cumple que AB = AD = CD y que <BAD es un ángulo recto. Haría falta probar que AB = AD = CD = BC y que los ángulos restantes son rectos.
Por construcción, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo con un ángulo recto en A y, por ello, los restantes ángulos son rectos y, además, por ser lados opuestos de un paralelogramo, AD = BC, con AB = AD; por lo cual, AB = BC = CD = AD; es decir, tal cuadrilátero es un cuadrado.				

[ANEXO G]
[Construcción de un cuadrado realizada por el Grupo nº 3]

Taller n° 1 sobre Construcciones Geométricas con Regla y Compás	**Andrea Osorio**
Parte 2: Actividades Libres	**Carmen Gil**
Actividad nº 4: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada y, luego, guarda la construcción como una macro y denomínalas cuadrado, triángulo equilátero y rombo respectivamente. Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial). En la siguiente figura, se partió del lado AB, para construir el cuadrado ABCD.	

Instrucciones	Herramientas empleadas		Si	No	Observaciones
Se traza el segmento A’B’ conocido.	A A’ B’	Punto Semirrecta: A Punto Punto Segmento: A, B	1 2 3 4 5		Parten de las condiciones iniciales: construir un cuadrado, dado uno de sus lados. Para ello, trazan una semirrecta con origen en A y un segmento auxiliar A’B’ que da la longitud de un lado del cuadrado.
Con el compás se traza una circunferencia de radio A’B’ desde el punto A y luego desde	C_1 B C_2	Círculo (Compás): A, A’B’ Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Círculo: B, A	6 7 8		Trazan una circunferencia C_1 con centro en A y radio A’B’ y otra circunferencia C_2 con

el punto B de manera de hallar los puntos C y D’.	C **D’**	Punto (Punto(s) de intersección): _, _ **Punto (Punto(s) de intersección): _, _**	9 10		centro en B y radio A’B’, las cuales se intersecan en los puntos C y **D’**. De donde se establece que AB = A’B’; AC = AB (por ser radios de C_1) y BC = AB (por ser radios de C_2). Por construcción de la mediatriz de un segmento, la recta CD’ es la mediatriz del segmento AB.
Desde el punto C trazar una circunferencia de radio AC obteniéndose el punto D, inmediatamente se sitúa en dicho punto (D) y trazar otra circunferencia de radio DC formándose el punto J.	C_3 D C_4 J	Círculo: C, A Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Círculo: D, C Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Recta: J, A	11 12 13 14 15		Trazan una circunferencia C_3 con centro en C y radio CA y ubican su intersección con la circunferencia con centro en A y radio AB. A tal punto también lo denotan con la letra D y para facilitar la revisión de esta construcción el primer punto D fue renombrado como D’. Así se cumple que AC = DC. Seguidamente, trazan una circunferencia C_4 con centro en D y radio DC. Y buscan el punto de intersección de tal circunferencia C_3 con la circunferencia con centro en C y radio CA (punto J); de modo que DC = AB y la recta AJ es la mediatriz del segmento BB’’. Donde el punto B’’ está en la

				semirrecta opuesta a la semirrecta AB. Esto garantiza que el < JAB sea un ángulo recto.
Trazar el segmento que forman los puntos J y A y hallar el punto E en la intersección del círculo y el segmento JA.	E C_5 Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Círculo: E, A	16 17		Trazaron la recta AJ, la cual interseca a la circunferencia con centro C_1 en A y radio AB en un punto E (nótese que AE = AB, por ser radios de una misma circunferencia).
Trazar una circunferencia de centro en E con radio EA y conseguir el punto F de intersección entre las dos circunferencias. Unir los puntos y formar los segmentos BF y EF respectivamente, obteniéndose así un cuadrado ABFE.	F Punto (Punto(s) de intersección): _, _ Segmento: E, F Segmento: F, B Segmento: E, A Segmento: A, B	18 19 20 21 22		Trazaron una circunferencia C_5 con centro en E y radio EA, la cual interseca a la circunferencia con centro en B y radio AB en el punto F. Y por ser radios de las circunferencias C_2 y C_5, EF = AE. Hasta aquí tiene que AB= AE = EF y < EAB es recto. Haría falta probar que AB = AE = EF = BF y que los restantes ángulos internos son rectos. La clave pareciera estar en probar que el cuadrilátero ABFE es un paralelogramo, ya que, si un paralelogramo tiene un ángulo recto, los restantes ángulos internos son rectos y AE = BF por ser lados opuestos de un paralelogramo.

[ANEXO H-1]
[Descripción del juego Encuentra mi Pareja diseñado por el grupo nº 1 como parte de los materiales y recursos didácticos]

Título	**Área de conocimiento**	**Contenidos**
Encuentra mi Pareja	Matemática	Proporcionalidad y Semejanza geométrica
Objetivo Lúdico	Reconocer pares de segmentos proporcionales o pares de figuras semejantes, entendidas estás como figuras que tienen la misma forma y no necesariamente el mismo tamaño.	
Acciones Lúdicas	En una superficie plana, se colocan volteadas, por lo menos, treinta (30) tarjetas con figuras geométricas, cada uno de los estudiantes escogerá un par de tarjetas, procurando formar una pareja ya sea de segmentos proporcionales (para lo cual quizá tenga que calcular la razón entre sus longitudes para decidir si son proporcionales) o figuras semejantes (para lo cual necesita aplicar algún criterio de semejanza para triángulos). El docente debe procurar que cada uno de los estudiantes explique la razón por la cual las figuras que escogió son semejantes o los segmentos son proporcionales.	
Reglas de Juego	Similares al juego tipo memoria	

[ANEXO H-2]
[Descripción del juego Aceptando el Reto diseñado por el grupo nº 1 como parte de los materiales y recursos didácticos]

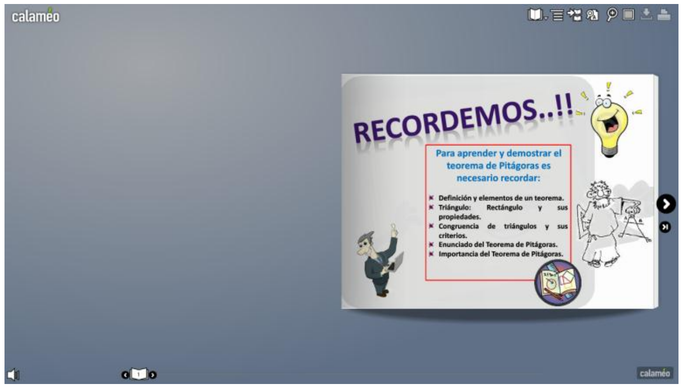
Título	Área de conocimiento	Contenidos
Aceptando el Reto	Matemática	Proporcionalidad y Semejanza geométrica; enunciado, demostración y aplicación del Teorema de Thales
Objetivo Lúdico	• Establecer el enunciado del Teorema de Thales (Estación 1). • Reconocer figuras semejantes, a partir de la observación de tarjetas con diversas imágenes del entorno cercano (estación 2). • Aplicar el Teorema de Thales en la resolución de triángulos (Estación 3). • Reconstruir la demostración del Teorema de Thales, teniendo como referencia las fichas obtenidas, una vez superado el reto, en las estaciones previas (Estación 4).	

[ANEXO I-1]
[Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2]
[Descripción de la actividad nº 1: A través del tiempo]

Pantalla

El objetivo de la actividad o ejercicio.	Que el estudiante conozca el origen del teorema de Pitágoras y su recorrido a lo largo del tiempo. Por lo que podrá responder a preguntas tales como: a) ¿Quién fue Pitágoras? b) ¿Cómo surge el teorema de Pitágoras? c) ¿Cuáles fueron las civilizaciones donde se evidenció el uso del teorema?
La forma de trabajo	Que el estudiante busque, en el blog, la información denominada “A través del tiempo”, la lea y, en el cuaderno de Matemática, haga una síntesis de esta lectura. También se le recomienda buscar otras fuentes de información para complementar la lectura realizada.
Evaluación	Cada uno de los estudiantes realizará la lectura de su resumen y, además, se les pedirá que den su opinión sobre el tema estudiado.
Material y lugar	Computadora con conexión a internet y cuaderno de la asignatura. Ya sea desde la comodidad del hogar, o de una sala de usos múltiples como los cybers, o la sala de informática de la institución.

[ANEXO I-2]
[Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2]
[Descripción de la actividad nº 2: Recordemos]

<table>
<tr><th colspan="2">Pantalla</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>El objetivo de la actividad o ejercicio.</td><td>Que el estudiante repase los conocimientos previos y necesarios para la comprensión del Teorema de Pitágoras. Por lo que podrá responder a preguntas tales como:
a) ¿Qué es un triángulo rectángulo?
b) ¿Cuáles son las propiedades de los triángulos?
c) ¿Qué es un teorema?
d) ¿Cuáles son los elementos de un teorema?
e) ¿Cuál es la importancia del teorema de Pitágoras?</td></tr>
<tr><td>La forma de trabajo</td><td>Que el estudiante busque, en el blog, la información denominada “¡Recordemos!”, la lea y, en el cuaderno de Matemática, haga una síntesis de esta lectura. También se le recomienda buscar otras fuentes de información para complementar la lectura realizada.</td></tr>
<tr><td>Evaluación</td><td>El docente dirigirá una discusión sobre los temas relacionados con la Geometría del Triángulo y el Teorema de Pitágoras, para reforzar lo presentado en el blog; de esta manera, se podrá apreciar el dominio de los conocimientos geométricos por parte de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Material y lugar</td><td>Computadora con conexión a internet y cuaderno de la asignatura.
Ya sea desde la comodidad del hogar, o de una sala de usos múltiples como los cybers, o la sala de informática de la institución.
Aula de clases.</td></tr>
</table>

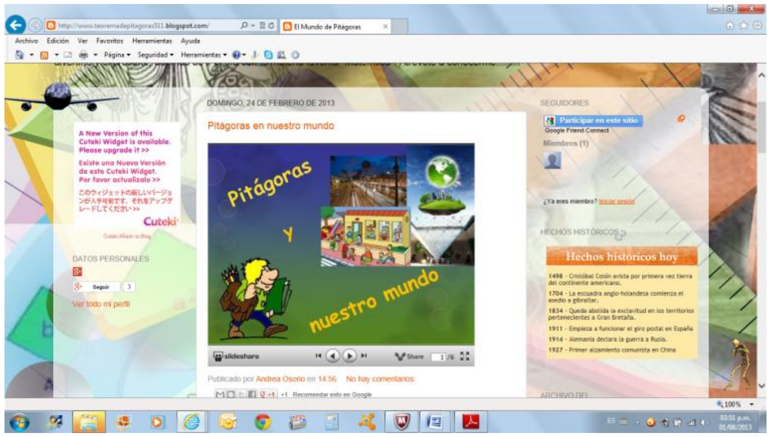
[ANEXO I-3]
[Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2]
[Descripción de la actividad nº 3: Demostrando]

Pantalla

El objetivo de la actividad o ejercicio.	Que el estudiante analice y comprenda una de las demostraciones del teorema de Pitágoras; por medio de una construcción interactiva. De esta manera el estudiante podrá: a) Entender el enunciado del teorema. b) Asimilar de manera eficaz lo planteado en el teorema. c) Conjeturar y validar algunos aspectos de la demostración.
La forma de trabajo	Que el estudiante busque, en el blog, la información denominada "Demostración", la lea y, en una hoja blanca, responda a las interrogantes planteadas en la demostración.
Evaluación	Revisión de las respuestas dadas por los estudiantes, procurando mediante una discusión dirigida clarificar dudas o corregir algún error cometido.
Material y lugar	Computadora con conexión a internet y hojas blancas. Ya sea desde la comodidad del hogar, o de una sala de usos múltiples como los cybers, o la sala de informática de la institución. Aula de clases.

[ANEXO I-4]
[Actividades del Blog El Mundo de Pitágoras diseñadas por el grupo nº 2]
[Descripción de la actividad nº 4: Pitágoras y nuestro mundo]

Pantalla



El objetivo de la actividad o ejercicio.	Conocer la relación existente entre el teorema de Pitágoras, el teorema de Euclides y el Teorema de Tales. Establecer el uso que se le ha dado al teorema de Pitágoras en la arquitectura y en la jerga mundial. De esta manera podrá: • Establecer semejanzas y diferencias entre los teoremas mencionados anteriormente. • Explorar las construcciones y deducir su relación matemática (teorema de Pitágoras).
La forma de trabajo	Que el estudiante busque, en el blog, la información denominada “Pitágoras y nuestro mundo”, la lea y, en el cuaderno de Matemática, haga una síntesis de esta lectura. También se le recomienda buscar otras fuentes de información para complementar la lectura realizada.
Evaluación	Peguntas realizadas a lo largo de la clase acerca del teorema de Pitágoras y la relación con la cotidianidad.
Material y lugar	Computadora con conexión a internet y cuaderno de la asignatura. Ya sea desde la comodidad del hogar, o de una sala de usos múltiples como los cybers, o la sala de informática de la institución. Aula de clases.

[Anexo J]

[Habilidades asociados a los niveles de razonamiento geométrico para el estudio de la circunferencia y el círculo; cuadro elaborado por el grupo nº 3]

	Reconocimiento	***Análisis***	***Relaciones, Clasificación u Ordenamiento.***
Visuales	Identifica en objetos del entorno dibujos y construcciones propias a las formas de circunferencia, círculo y esfera. Reconoce algunos elementos en estos objetos geométricos tales como: radio, diámetro, rectas secantes y tangentes, ángulos inscritos, etc.	Identifica ángulos inscritos en una circunferencia. Reconoce las posiciones relativas entre: un punto y la circunferencia, una recta y la circunferencia. Reconoce las posiciones relativas entre dos circunferencia.	
Verbales	Utiliza adecuadamente las palabras radio, diámetro y centro de una circunferencia.	Expresa en forma oral y escrita los resultados obtenidos. Formula diferencias entre la circunferencia y el círculo.	
De dibujo.	Traza circunferencias y círculos utilizando diferentes estrategias. Dibuja y recorta figuras planas.	Traza circunferencias y círculos y reconoce sus elementos. Construye segmentos circulares, sectores circulares y ángulos inscritos en la circunferencia. Traza rectas tangentes, secantes y exteriores a una circunferencia.	Construye circunferencia conociendo ciertos elementos. Traza polígonos regulares inscritos en una circunferencia.
Aplicadas		Identifica y relaciona los elementos de una circunferencia: radio, diámetro, cuerda y arco.	Resuelve problemas en los cuales utilizan las relaciones entre los elementos de circunferencias y círculos. Resuelve problemas de cálculo de áreas, perímetros y volúmenes.

CURRICULUM VITAE

Martha Iglesias Inojosa,

Profesora de Matemática, con Maestría en Enseñanza de la Matemática, en la Categoría de Agregado y a Dedicación Exclusiva en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Coordinadora de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría y miembro activo del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías; así como del Núcleo de Investigación en Educación Matemática; ambas unidades funcionan en la UPEL Maracay.

Investigadora B (convocatoria 2011) / Investigadora A (convocatoria 2013) acreditada por el Programa de Estímulo a la Investigación e Innovación.

Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua.

Participante como ponente en eventos regionales, nacionales e internacionales en Educación Matemática como el Congreso Venezolano en Educación Matemática y la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Integrante de la delegación Venezolana en la Escuela – Seminario Internacional "Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática", CANP, San José de Costa Rica, 2012.