REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL “GERVASIO RUBIO”

CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMETRICOS EN EDUCACIÓN MEDIA

Tesis presentada como requisito parcial para optar al grado de Doctor en Educación

Rubio, abril 2022

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL “GERVASIO RUBIO”

CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMETRICOS EN EDUCACIÓN MEDIA

Tesis presentada como requisito parcial para optar al grado de Doctor en Educación

Autor: Yudith Liliana Contreras Santander
Tutor: Dr. Roberto Carlos Ontiveros Cepeda

Rubio, abril 2022

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL "GERVASIO RUBIO"
SECRETARÍA

A C T A

Reunidos el dia sàbado, treinta del mes de abril de dosmil veintidós, en la sede de la Subdirección de Investigación y Postgrado, del Instituto Pedagógico Rural "Gervasio Rubio," los Doctores : ***ROBERTO ONTIVEROS (TUTOR), RAMÓN TORRES, CARLOS GÁMEZ, YANIRA MORA Y ALEXANDER CONTRERAS****, Cédulas de Identidad Números V.-11.108.034, V.-12.204.625, V.- 14.605.720, V.- 9.231.572 y V.-10.157.089, respectivamente, jurados designados en el Consejo Directivo N° 527, con fecha del 22 de septiembre de 2020, de conformidad con el Artículo 164 del Reglamento de Estudios de Postgrado Conducentes a Títulos Académicos, para evaluar la Tesis Doctoral Titulada:* ***"CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMETRICOS EN EDUCACIÓN MEDIA"****, presentado por la participante* ***CONTRERAS SANTANDER, YUDITH LILIANA****, cédula de ciudadanía* ***N° CC.-37.392.326*** */ pasaporte* ***N° P.- AY948471****, como requisito parcial para optar al título de* ***Doctor en Educación****, acuerdan, de conformidad con lo estipulado en los Artículos 177 y 178 del Reglamento de Estudios de Postgrado de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador el siguiente veredicto:* ***APROBADO****, en fe de lo cual firmamos.*

DR. ROBERTO ONTIVEROS
C.I.N° V.- 11.108.034
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO
TUTOR

DR. RAMÓN TORRES
C.I.N° V.- 12.204.625
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO

DR. CARLOS GÁMEZ
C.I.N° V.- 14.605.720
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO

DRA. YANIRA MORA
C.I.N° V.- 9.231.572
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL GERVASIO RUBIO

DR. ALEXÁNDER CONTRERAS
C.I.N° V.- 10.157.089
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA

SUB-DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

CONTENIDO GENERAL

Lista de cuadros

Lista de gráficas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL "GERVASIO RUBIO"
Subdirección de Investigación y Postgrado
Doctorado en Educación

CONSTRUCTOS TEORICOS SOBRE EL RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMETRICOS EN EDUCACIÓN MEDIA

Autor: Yudith Liliana Contreras Santander
Tutor: Dr. Roberto Carlos Ontiveros Cepeda
Fecha: abril 2022

Resumen

La presente investigación está centrada en generar constructos teóricos desde el campo de la matemática que promuevan el desarrollo del razonamiento y argumentación en los estudiantes frente a la resolución de problemas trigonométricos, con el fin de aportar elementos fundamentales al proceso de enseñanza donde se reflexione la construcción critica del conocimiento matemático, tomando en cuenta las dificultades de enseñanza y aprendizaje que a nivel histórico ha presentado esta ciencia, así mismo también se propone aportar a la línea de investigación Educación Matemática del Núcleo de Investigación Didáctica y Tecnología Educativa (NIDITE) de UPEL-IPRGR. Se realiza un abordaje teórico como referente del estudio para una mayor comprensión de la realidad desde los postulados sobre razonamiento y argumentación de Toulmin (1958), Duval (1999b), Perelman y Olbrechts-Tyteca (1958), Borwein (2009) que orientan la forma en cómo construye un pasaje de razonamiento en una argumentación a partir de la resolución de problemas, y su importancia en el proceso de enseñanza. Se asume una postura desde el paradigma interpretativo, enfoque cualitativo bajo métodos hermenéuticos de interaccionismo simbólico y teoría fundamentada, así mismo se realiza acercamiento como fuente de información a 6 estudiantes de grado decimo y 4 maestros mediante la técnica de entrevista en profundidad. El estudio evidencia que la resolución de problemas trigonométricos es fundamental en la enseñanza de la matemática para promover el razonamiento y la argumentación, donde emergen aspectos relacionados con el lenguaje matemático, la contextualización, que orientan al desarrollo de competencias matemáticas, buscando responder a las exigencias actuales de formación, de esta manera surgen tres constructos, los cuales son: (1) concepción del maestro: enseñanza de la matemática y razonamiento lógico; (2) concepción del estudiante: estrategias, competencias y procesos matemáticos y (3) razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos.

Palabras clave: Razonamiento matemático, argumentación matemática, lenguaje matemático, resolución de problemas.

Introducción

El presente documento muestra los resultados de la investigación titulada "constructos teóricos sobre el razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media", el cual fue realizado en el marco formativo del doctorado en educación.

Teniendo en cuenta las dificultades presentes en el proceso de enseñanza, el estudio tiene como objetivo generar constructos teóricos sobre el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media. Como apoyo para la interpretación y reconocimiento del objeto de estudio se abordaron posturas teóricas que permitieron tener una mirada amplia de la investigación desde sus categorías centrales, por ende se abordó lo plantado por Perelman y Olbrechts-Tyteca (1958), Duval (1999a), Toulmin (1958), Borwein (2009) relacionados con el razonamiento y la argumentación; así como también Pierce (1974) y Duval (1999b) desde la semiótica, y Polya (1945) Shoenfeld (1985) desde la resolución de problemas.

La ubicación de estos aportes teóricos ayuda a realizar un acercamiento y comprensión del objeto de estudio, y su importancia en el proceso de enseñanza de la matemática, pues se reconoce que a partir del razonamiento y la argumentación se puede impactar de manera significativa en la formación de área.

Para el abordaje y comprensión del objeto de estudio, se ubica metodológicamente bajo el paradigma interpretativo, enfoque cualitativo, métodos hermenéuticos, que permitan un mayor indagación y acercamiento a la realidad estudiada desde una ruta acorde a las necesidades del estudio. Luego la investigación tiene un carácter inductivo que permite obtener los datos directamente del contexto natural, en este caso de estudiantes y docentes quienes son los sujetos implicados en este proceso y desde los cuales se puede comprender este problema objeto de estudio, porque es el docente quien promueve los escenarios que permiten el desarrollo del razonamiento y la argumentación en el aula y es el estudiante quien al enfrentarse a problemas matemáticos demuestra el dominio disciplinar, la aplicación del área en su realidad o contexto y por ende el desarrollo del razonamiento y la argumentación.

Posterior a lo metodológico se realiza en el cuarto capitulo la interpretación de resultados, donde se esboza la categorización, estructuración y contrastación correspondiente a la entrevista aplicada a docentes y estudiantes, donde se identifican recurrencias y emergencia de categorías que permiten una mayor comprensión del objeto de estudio, además se realiza la contrastación y triangulación de hallazgos, dando lugar en el capítulo 5 a constructos teóricos sobre el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos, los cuales son: (1) concepción del maestro: enseñanza de la matemática y razonamiento lógico; (2) concepción del estudiante: estrategias, competencias y procesos matemáticos y (3) razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos.

Luego, se espera que el estudio sea un apoyo en la reflexión de la práctica del maestro, pues se busca generar un impacto significativo en los procesos de enseñanza dadas las dificultades que son evidenciables en la resolución de problemas trigonométricos. Así mismo, se busca impactar a nivel pedagógico, pues la enseñanza de la matemática debe empezar a verse desde enfoques diferentes al tradicional, para generar mayor motivación en los estudiantes, e impacto significativo en el desarrollo de competencias, que permita responder a las exigencias actuales de formación.

CAPITULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Planteamiento del problema

La argumentación es objeto de estudio de diferentes disciplinas, ha sido considerada una competencia fundamental abordada desde el currículo, razón por la que resulta esencial desde el contexto educativo desarrollar estudios que permitan analizarla y fortalecer los procesos que se realizan al interior del aula, por lo tanto, es necesario entender primero su importancia a nivel histórico, donde la argumentación es reconocida como un medio de comunicación del ser humano, que inicia su recorrido desde la retórica antigua, centrándose en lo opinable desde la formación de un hombre político, lo que le permitió ser considerada como una disciplina, pero con el auge del positivismo fue deslegitimada, aun así continuaba impartiéndose de manera técnica, haciendo parte de los procesos formativos.

Posteriormente, su evolución muestra un renacimiento o recuperación con la teoría de la argumentación desde la perspectiva filosófica de Perelman y Olbrechts-Tyteca (1958) y Toulmin (1958), las cuales centran su importancia en el análisis de la estructura argumentativa de manera generalizada que puede ser abordada desde cualquier área de conocimiento. Por lo tanto, la argumentación ha sido retomada en el campo educativo desde diferentes autores, en procesos de investigación donde se reconoce la importancia de desarrollar la competencia argumentativa en las todas áreas de conocimiento, con el fin de formar personas con mayor actitud participativa, reflexiva y critica frente al conocimiento.

De esta manera desarrollar la competencia de argumentación en el aula resulta fundamental y para ello se requiere que el estudiante realice razonamientos matemáticos que le permitan crear argumentos válidos, como lo menciona el marco de referencia de las pruebas PISA, OCDE (2018), donde se deja claro que la capacidad de razonar lógicamente y presentar argumentos convincentes es una habilidad que cada día se hace más importante.

Así mismo, Ortega, Márquez, Badillo y Rodríguez (2018) mencionan que es una práctica epistémica indispensable para la construcción conjunta de la ciencia escolar, por ello debe ser reconocida por el docente con el fin de transformar el aula promoviendo escenarios que permitan mayor participación por parte del estudiante, buscando así que el discente plantee soluciones frente a una situación determinada, analice propuestas de otros compañeros, y tome una postura crítica frente al conocimiento, cambiando su propia perspectiva o la de los demás desde argumentos construidos a partir de razonamientos válidos a nivel disciplinar.

La vinculación del razonamiento y la argumentación en los procesos formativos se evidencia desde documentos orientadores oficiales para la planeación de aula, como los estándares de competencia en las áreas de lenguaje, matemática, ciencias y ciudadanas planteados por el Ministerio de Educación (2006), los procesos de evaluación nacional descritos en el marco de referencia del ICFES (2019) y marco de referencia a nivel internacional de pruebas PISA, OCDE (2018), donde desde las diferentes áreas se promueve la formación y evaluación por competencias, haciendo referencia al razonamiento y argumentación como una competencia que es transversal en todas las disciplinas, en primer lugar porque se aborda desde los estándares de competencia en todas las áreas y además en el caso particular de matemática se evidencia relación en las competencias evaluadas desde las pruebas nacionales e internacionales.

Ahora bien, desde el campo matemático en el cual se aborda este estudio, de acuerdo al ICFES (2019), la argumentación matemática se asume que como aquella que:

> Se relaciona con los procesos de razonamiento y comunicación, con la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en diversas situaciones, siempre justificando por qué o cómo se llegó a estas, a través de ejemplos y contraejemplos, o señalando y reflexionando sobre inconsistencias presentes. Con el desarrollo de esta competencia se espera que un estudiante justifique la aceptación o el rechazo de afirmaciones,

> interpretaciones y estrategias de solución basado en propiedades, hechos, supuestos, resultados o verbalizando procedimientos matemáticos (p. 29).

De esta manera, se entiende que el razonamiento y la argumentación forman parte del currículo escolar en el área de matemática, para el caso del presente estudio en educación media, el cual guarda coherencia con los estándares de competencia propuestos por el Ministerio de Educación (2006), por ende, debe reflexionarse desde el quehacer docente, más aun reconociendo a nivel histórico que la disciplina matemática tradicionalmente por el manejo de su lenguaje y estructura se ha presentado de manera instruccional bajo una serie de procedimientos formales que en muchas ocasiones no se aplican a la vida cotidiana, complejizando así el entendimiento de la misma. Esta visión de la matemática evidencia dificultades de comprensión por parte del estudiante quien en muchas ocasiones no le encuentra sentido a la matemática al no poderla relacionar con su entorno, reduciendo los contenidos de la disciplina a una simple memorización y repetición (Marin, Castillo, Torregroza y Peña, 2018). Dichas falencias son evidenciables tanto en el aula como en los procesos de evaluación nacional e internacional, desde los resultados académicos de los estudiantes.

A nivel internacional, González (2019) en su informe presentado sobre las pruebas PISA 2018, Latinoamérica se ubica por debajo del promedio mundial, en el caso de Colombia se encuentra en el puesto 69 de los 79 países, y aunque a nivel histórico ha presentado un aumento en el puntaje, este no resulta significativo, lo que muestra un bajo nivel de competencias, que en el caso de matemáticas, dichas competencias son coherentes con las evaluadas por el ICFES a nivel nacional desde las pruebas saber 11. En el caso de las pruebas PISA, se centran en el razonamiento matemático frente a la resolución de problemas, buscando desde la capacidad de razonamiento que el estudiante interprete, formule, emplee y evalué, presentando argumentos de forma convincente, al igual que las competencias a nivel nacional, de interpretación, formulación y argumentación junto a los procesos de comunicación, razonamiento, modelación, que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas.

Frente al deficiente desempeño que se ha evidenciado en las pruebas, el informe emitido por la UNESCO (2017), muestra la preocupación sobre el bajo nivel de competencias alcanzado por los niños y adolescentes, mostrando que 6 de cada 10 estudiantes no logran los niveles mínimos de competencias tanto en lectura como en matemática, indicando una crisis de aprendizaje que requiere reformas en los planes de estudio con el fin de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Debido a esto, se requiere un gran compromiso por reestructurar aspectos a nivel curricular desde el área de matemática estableciendo una relación entre contenidos (pensamientos matemáticos), la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático, el cual está relacionado con el pensamiento formal, jugando un papel fundamental en la construcción del conocimiento matemático. De esta manera el razonamiento es un proceso de involucra la interpretación, formulación, argumentación o integración de ideas de forma coherentes al momento de resolver problemas, por lo tanto, estos aspectos no deben tratarse de manera aislada, y deben vincularse en la enseñanza de la matemática, para ello se requiere de la reflexión del maestro desde su práctica, con el fin de apostarle a un mejoramiento en la calidad educativa y por ende al desarrollo de competencias.

A nivel general desde la planeación curricular del área de matemática en la institución educativa San José donde se desarrolla el estudio, se evidencia una estructuración de los desempeños de cada grado frente a los pensamientos matemáticos los cuales, deben desarrollarse a partir de la relación de aspectos mencionados anteriormente, y es el docente quien desde su práctica debe establecer esta conexión, orientado a un aprendizaje significativo del área.

Aunque se reflexiona sobre la necesidad de realizar una reforma en la planeación, siempre se evidencian bajos resultados mostrados en los procesos evaluativos que se asocian al campo formativo del área, entendiendo así que existe una estrecha relación entre enseñanza y evaluación, luego es necesario revisar y analizar desde el campo disciplinar causas asociadas, frente a ello, estudios como el de Olave (2013) mencionan que esta disciplina se ha limitado a la enseñanza de problemas estandarizados de forma mecánica y descontextualizada haciendo que los estudiantes piensen que la matemática requiere solo de memorizar definiciones y procesos sin sentido.

Esta visión mecanicista de la matemática obstaculiza el desarrollo del razonamiento y la argumentación, frente a esto, debe entenderse que, si no se promueve el razonamiento deductivo o inductivo, las matemáticas serían solo una constante aplicación de procedimientos o imitación de ejemplos sin reflexionar el sentido que estos tienen, lo que genera dificultad para que el estudiante pueda desenvolverse en escenarios de su cotidianidad donde requiere la aplicación de conocimientos básicos en matemática. Este aspecto es evidenciable desde la experiencia de aula en el colegio San José, donde se lleva a cabo la investigación, desde el informe institucional del área de matemática (2020), donde se entiende que el estudiante prefiere el desarrollo de ejercicios mecánicos que no establecen ningún tipo de relación con la realidad, dado que al enfrentarse a situaciones problema difícilmente proponen estrategias de solución desde los conocimientos básicos en el área, luego no se reconoce la importancia de la aplicación de conceptos matemáticos en el contexto.

Así mismo, Razo (2018), Lever y López (2020) mencionan que son escasas o a nivel superficial las oportunidades que tienen los estudiantes para razonar y argumentar, limitándose a la repetición, generando desmotivación en el proceso de aprendizaje al no encontrarle utilidad a la matemática, las habilidades que se proponen son básicas, los contenidos se encuentran descontextualizados y poco enfocados en la resolución de problemas, no se retoman los saberes previos de los estudiantes y su relación con el contexto, esto evidencia un proceso de enseñanza enfocado en lo tradicional, desde clases magistrales con pocas estrategias que no generan mayores retos a nivel cognitivo en los estudiantes.

También es evidente que desde el desarrollo práctico de la matemática al interior del aula se encuentran dificultades relacionadas con el trabajo individualizado que allí se realiza, por la visión mecanicista que ha tenido la enseñanza de esta ciencia sobre todo en el aspecto evaluativo, lo que genera falencias al promover escenarios participativos, pues la mejor estrategia es mediante un trabajo en grupo bien estructurado, fundamentado en la resolución de problemáticas contextualizadas y bajo la elaboración de preguntas que enriquezcan el desarrollo del razonamiento y la argumentación.

Al respecto, Chico (2015) y Goizueta (2015) en sus estudios dan cuenta que la mejor manera de promover el razonamiento y la argumentación es mediante el trabajo en grupo bajo la estrategia de resolución de problemas, se entiende la complejidad del aprendizaje de las matemáticas desde la interacción con el otro, siendo de esta manera los procesos sociales una parte integral de la actividad matemática, donde el mismo estudiante es capaz de razonar y validar su construcción matemática al interior del aula, por ende puede modelar situaciones desde su participación y elaboración colectiva, dejando de lado el modelo matemático construido para satisfacer las indicaciones del profesor, este último en muchas ocasiones condiciona la producción matemática, orientando ideas sobre la unicidad de una solución y con ello se obstaculiza un buen proceso argumentativo a partir del razonamiento que pueda realizar el estudiante.

Dadas estas situaciones de la matemática tradicional o mecanicista, el trabajo individual guiado y esperado por el maestro, que dificulta el desarrollo de competencias matemáticas, debe repensarse, y aunque diferentes estudios han mostrado esta preocupación poco se ha realizado a nivel practico en el aula, lo que es evidente desde la pruebas estandarizadas e inclusive desde pruebas internas como en el caso de la institución donde se desarrolla el estudio, cuyo promedio a nivel del área de matemática es básico, como lo muestran los informes anuales de la plataforma institucional, que se analizan en los planes de mejoramiento al inicio del año escolar.

Luego es un reto promover los procesos formativos del área desde diferentes estrategias, como por ejemplo desde la resolución de problemas que sean contextualizados, porque a partir de ellos entra en juego el desarrollo del razonamiento matemático el cual le permite al estudiante crear y evaluar argumentos, a partir de reflexionar sobre la situación planteada, proponer posibles estrategias de solución, analizarlas y determinar su aplicación en la solución del problema, esto muestra que el razonamiento y la resolución de problemas se superponen permitiendo crear argumentos matemáticos válidos que permitan fortalecer el pensamiento formal.

Ahora bien, además de las dificultades mencionadas anteriormente, debe valorarse que existe un factor importante que emerge del razonamiento y la argumentación cuando se trabaja resolución de problemas, y este es el lenguaje matemático, el cual es considerado como la forma de comunicación de esta ciencia, y allí se presentan muchos errores de comprensión por parte del discente, aspecto que ha sido de interés a nivel histórico desde diferentes investigaciones, al respecto Rico (1995), Ortega y Ortega (2001), Radillo, Nesterova, Ulloa y Pantoja (2005), Lozada (2016), Gámez (2017), entre otros estudios, donde se evidencia el manejo de las representaciones semióticas de la disciplina conlleva a la presentación de errores, en muchos casos la comprensión de este lenguaje resulta complejo para los educandos, porque puede asemejarse al aprendizaje de un idioma extranjero, luego son muy pocos los que son capaces de trasladar un idioma cotidiano o conceptual como generalmente se presentan la situaciones problema a un idioma algebraico o simbólico y viceversa.

Esta dificultad relacionada con el uso adecuado de la simbología matemática, obstaculiza la comprensión semántica de los textos o enunciados matemáticos, lo que conlleva a errores en la resolución de problemas y por ende al desarrollo de la argumentación, como lo menciona Gámez (2017), los estudiantes presentan dificultades "al momento de argumentar, comprender, analizar y hacer uso adecuado de la simbología empleada en cualquier razonamiento matemático" (p. 23).

Este aspecto es fundamental y es una de las falencias que se encuentra en el aula desde el contexto donde se desarrolla el estudio y en otros escenarios como lo muestran las investigaciones nombradas anteriormente, al enfrentar al estudiante a una situación problema, esta se le presenta en un lenguaje común que él debe interpretar y pasar a lenguaje matemático desde representaciones gráficas y algebraicas, donde generalmente, primero se evidencia dificultades de comprensión de los enunciados, y esto termina siendo un obstáculo al realizar razonamientos que busquen la formulación de estrategias de solución, que requieren manejo de conceptos básicos y de un lenguaje propio de la disciplina, dificultando así la elaboración de una argumentación la cual se construye desde que el estudiante interpreta la situación problema.

Así mismo, Salazar, Contreras y Jaimes (2016), identifican errores asociados al uso del lenguaje con base en preconceptos erróneos o vacíos conceptuales por parte del estudiante y esto impacta en el razonamiento y la argumentación. Cuando el estudiante se enfrenta a situaciones problema debe producir argumentos desde la disciplina y para comunicarlos debe hacer uso de la simbología apropiada, la cual es esencial en todo razonamiento matemático, para ello debe establecer relación o conexión entre los argumentos, necesitando así claridad en los conceptos matemáticos, de lo contrario, se presentará errores tanto en el lenguaje como en la argumentación.

Esta problemática se encuentra asociada a que la enseñanza de la matemática desde la educación básica y media ha tenido una mirada tecnicista-mecanicista relacionada con el uso de técnicas algorítmicas sencillas, por esta razón, cuando el estudiante tiene que enfrentarse a situaciones problema reales que deben ser modeladas desde procesos matemáticos, se presentan deficiencias al no comprender los enunciados, lo que implica el no manejo de conceptos y simbología matemática apropiada, generando así fracaso al momento de argumentar, debido a que el estudiante no comprende y por ende no puede transformar el lenguaje común a un lenguaje matemático.

Ahora bien, se han desarrollado diferentes estudios sobre argumentación matemática, como los planteados por Duval (1999a), León y Calderón (2003), Santander, Torres y Mora (2017), donde se evidencian diferentes dificultades al desarrollar razonamientos matemáticos validos en la resolución de problema, los cuales también son evidentes en el escenario donde se desarrolla la presente investigación: Primero, la posición epistémica semántica, -asociada a la interpretación y comprensión de los estudiantes frente al enunciado de la situación problema-.

Segundo, la posición epistémica teórica, -pues al tener problemas desde lo semántico esto genera falencias en el uso de preconceptos o el saber matemático y por ende del lenguaje matemático, para la elaboración de razonamientos validos que permita obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas, que involucran el desarrollo del argumento. En algunas ocasiones las premisas no muestran conexión lógica o no tienen coherencia con la situación planteada, por falta de contextualización, tal como se evidencia en el escenario donde se lleva a cabo esta investigación, pues generalmente los estudiantes tienden a dar soluciones repetitivas de acuerdo a modelos preestablecidos por la visión mecanicista de la disciplina que se ha mencionado anteriormente-.

Tercero, una posición epistémica lógica, -donde se determina el valor de verdad de las premisas que conforman la argumentación, la cual evidencia dificultades pues está asociada a lo semántico y teórico, por ende, pueden presentarse premisas verdaderas, pero sin sentido frente a la situación problema planteada-. Estas tres posiciones son evidentes en el contexto del estudio al momento de resolver problemas, dada las dificultades de comprensión de enunciados, vacíos conceptuales, simbología errónea que conlleva a razonamientos matemáticos donde se evidencia una argumentación deficiente.

Se ha mencionado que un aspecto fundamental en la enseñanza de la matemática más allá de lo tradicional es centrar los procesos formativos desde la resolución del problemas, situación que se ha analizado desde diferentes investigaciones y bajo una variedad de contenidos específicos, para el caso del presente estudio, se realiza un abordaje desde problemas trigonométricos asociados a la resolución de triángulos, teniendo en cuenta las dificultades que se presentan en el desarrollo de este tema en el escenario de la investigación, y así mismo se ha determinado desde autores como Algarín y Fiallo (2013), Guerrero y Vega (2016), Zubieta (2018), Andrade, Alcivar, Palma y Ampuero (2020), que resultan limitados los estudios asociados a la resolución de problemas trigonométricos, centrando su enseñanza de manera superficial en la práctica de ejercicios repetitivos, por lo tanto, esto genera dificultades en el aprendizaje por la poca comprensión del tema.

Además, dentro de la organización curricular está presente la enseñanza de la trigonometría, y el contexto donde se lleva a cabo la investigación se desarrolla en grado decimo y depende de conceptos previos que debe manejar el estudiante que llega a este grado. En este grado, por el desempeño académico que presentan los estudiantes, que en este caso es básico, como se evidencia en el informe institucional del área de matemática (2021), donde se hace evidente la dificultad que presentan los discentes cuando se enfrentan a problemas, pues difícilmente pueden reconocer los conceptos básicos necesarios para abordar la problemática y realizar el uso de la simbología y representación apropiada, impactando de esta manera la producción argumentativa.

También se visualiza desde las pruebas saber once, que el campo de razonamiento y argumentación matemática presenta resultados que superan la media nacional, y en los dos últimos años se han visto afectados, en este caso debe tenerse en cuenta que por razones de pandemia se trabajó gran parte del tiempo de manera virtual haciendo aún más visibles las dificultades que ya se venían trabajando de manera presencial, en el 2019 se obtuvo un resultado de 55.48, en el año 2020 fue de 54.12 y en el año 2021 de 51.9, estos valores son sobre 100. Por lo tanto, es importante abordar este campo de la trigonometría pues allí se encuentra diferentes elementos asociados al razonamiento y la argumentación, como lo es el lenguaje matemático y la resolución de problemas.

Por lo tanto, resulta fundamental reflexionar sobre los procesos implícitos en el desarrollo del razonamiento y la argumentación a través de la resolución de problemas, en este caso de problemas trigonométricos. Esto teniendo en cuenta que es a partir de situaciones particulares concretas que se desarrolla el razonamiento, potenciando habilidades en el estudiante, donde se espera que el identifique, comprenda, organice, utilice el lenguaje de la disciplina, plantee estrategias que permitan conectar los elementos del problema y de esta manera pueda construir una argumentación matemática valida donde se justifiquen las premisas utilizadas para la solución del problema, contribuyendo así a la construcción del conocimiento matemático al interior del aula.

de acuerdo a lo planteado en el contexto y las dificultades descritas en el problema de investigación es importante hacer los siguientes interrogantes: ¿cuáles son las orientaciones teóricas sobre el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en la educación media?

¿Qué procesos están implícitos dentro del razonamiento y la argumentación matemática al momento de enfrentarse a problemas contextualizados?

¿Cuáles son los aspectos que engloba el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos?

Objetivos

Objetivo general

Generar constructos teóricos sobre el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media, en la Institución Educativa Colegio San José.

Objetivos específicos

Diagnosticar los procesos implícitos en el razonamiento y la argumentación matemática en educación media.

Reflexionar sobre los aspectos que engloba el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media.

Develar constructos teóricos de los procesos implícitos del razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media.

Justificación

Es claro que históricamente la matemática se ha orientado desde una visión técnica-mecanicista que poco interés genera en los estudiantes, evidencia de ello se presenta en el bajo rendimiento académico en esta área, mostrando dificultades asociadas a la interpretación y comprensión de enunciados matemáticos, falencias en el uso del lenguaje, vacíos conceptuales, poca contextualización y bajo reconocimiento de la utilidad matemática en la vida cotidiana.

De este modo, resulta fundamental que el proceso de enseñanza de la disciplina matemática se vea más allá de un simple conjunto de fórmulas o leyes, que se aplican de forma mecánica y repetitiva sin lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, para esto debe tenerse claro un reconocimiento epistemológico del campo matemático, que permita la construcción de escenarios propicios para el aprendizaje, y de esta manera se aproxime al estudiante a una apropiación de la disciplina que le facilite la toma de decisiones frente a la solución de los diferentes problemas reales a los que deba enfrentarse.

Además, desde las exigencias de formación en el mundo actual se requiere enfoques diferentes a la educación tradicional, y reconociendo la importancia de la naturaleza de la matemática por su aplicación de conocimientos en diferentes contextos, resulta fundamental emplear la resolución de problemas en situaciones concretas, buscando promover el desarrollo del razonamiento y argumentación en la enseñanza de la matemática.

Ahora bien, el razonamiento y la argumentación resulta esencial en cualquier área de conocimiento, permite la formación de sujetos competentes y críticos que pueden desenvolverse en cualquier contexto, como lo menciona Ortega, Márquez, Badillo y Rodríguez (2018) la argumentación es una práctica fundamental que permite fortalecer la capacidad de razonamiento y de construcción conjunta de la ciencia en el escenario escolar, porque lo que se requiere reflexionar en el contexto de aula la forma en que se construye el conocimiento matemático.

En relación con este tema, Ruíz, Villa, Torres y Berbén (2018) indican que la argumentación es una habilidad importante en el siglo XXI pero poco se sabe en cuanto a cómo los estudiantes la desarrollan y como promoverla. De esta manera resulta necesario desarrollar el proceso investigativo, que permita reconocer desde el estudiante la forma como se enfrenta a un proceso argumentativo desde la resolución de problemas trigonométricos, y como el docente desde su práctica genera escenarios que permitan promoverla, para de esta manera identificar procesos implícitos en el razonamiento y la argumentación que posibiliten derivar constructos teóricos como aporte al campo disciplinar.

De este modo, teniendo en cuenta las dificultades que generalmente se presentan en la enseñanza y aprendizaje del área matemática, el razonamiento y la argumentación resulta ser un objeto de estudio significativo de la investigación en matemática educativa, por lo tanto es importante estudiar este campo, tanto en los estudiantes como en maestros de matemáticas, con el fin de reconocer procesos formativos desde estrategias como la resolución de problemas que permita fortalecer competencias matemáticas en pro de la calidad educativa, es por ello que se aborda el fundamento teórico desde los postulados de Perelman y Olbrechts-Tyteca (1958) desde la nueva retórica y desde la argumentación planteada por Toulmin (1958) y Duval (1999b), desde donde se analiza la producción de razonamientos y argumentos, además de la resolución de problemas propuesta por Polya (1945), Shoenfeld (1989), esto permite comprender la relevancia del razonamiento y la argumentación en la disciplina matemática y de adelantar estudios que permitan profundizar en este campo.

De esta forma, el razonamiento y la argumentación es estudiado en situaciones particulares cuando el estudiante se enfrenta a problemas matemáticos, es por ello que, para el presente estudio se aborda la resolución de problemas trigonométricos en grado decimo, además se analiza las concepciones y prácticas de los maestros de matemática, ya que su intervención es importante en la construcción del saber matemático escolar presente en los estudiantes.

Es importante resaltar que se abordan problemas trigonométricos por la aplicación que estos tienen en la vida cotidiana y que además son evaluados en las pruebas aplicadas por el ICFES, además es un tema fundamental planteado en el currículo del área, y desde la trigonometría se trabajan diferentes conceptos que el estudiante debe diferenciar de acuerdo a la situación planteada, así como también el uso de una simbología asociada a dichos conceptos, que se espera que el estudiante la maneje, esto teniendo en cuenta lo que se plantea en los lineamientos curriculares (1998), donde se expresa que el estudiante desarrolle los procesos de: formular, resolver problemas, razonar, comunicar, modelar procesos. Luego, se entiende que la resolución de problemas trigonométricos tiene un impacto significativo en el razonamiento y la argumentación.

De esta manera, frente al abordaje y comprensión del objeto de estudio, es necesario mencionar la justificación metodológica, la cual, se enmarca en el paradigma naturalista, bajo métodos hermenéuticos, que permitan un mayor indagación y acercamiento a la realidad estudiada desde una ruta metodológica acorde a las necesidades del estudio.

Concretizando, desde el punto de vista práctico, el estudio servirá como fundamento al docente en el proceso de enseñanza, pues se busca generar constructos teóricos sobre el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos, de esta manera será un apoyo en la reflexión de la práctica del maestro, pues desde este constructo teórico se espera generar un impacto significativo en los procesos de enseñanza dadas las dificultades que son evidenciables en la resolución de problemas trigonométricos.

Así mismo, se busca impactar a nivel pedagógico desde el modelo de aprendizaje significativo propuesto a nivel institucional, pues al generar un constructo teórico en el razonamiento y la argumentación se espera que el maestro reflexione desde su quehacer en el aula y su planeación, dando una mirada a la matemática más allá de lo tradicional. También se propone aportar a la línea de investigación Educación Matemática del Núcleo de Investigación Didáctica y Tecnología Educativa (NIDITE) de UPEL-IPRGR.

CAPITULO II

MARCO DE REFERENCIA

A continuación, se presenta un esbozo que busca hacer una descripción histórica del objeto de estudio a través del tiempo, donde se darán a conocer datos y representantes relevantes que han aportado sus estudios y conocimientos al desarrollo de las matemáticas y su implicación en los procesos de razonamiento y argumentación.

Antecedentes de la Investigación

A continuación, se presentan una serie de investigaciones previas que sirven como antecedentes del estudio, ellas exhiben información sobre cómo mejorar los procesos involucrados en el razonamiento y la argumentación que han sido estudiados desde diferentes campos disciplinares, y en específico centrado desde el campo de las matemáticas, por esta razón, se realiza una revisión en bases de datos científicas, con el fin de reconocer diferentes investigaciones que permitan fundamentar el objeto de estudio y que han realizado diferentes aportes que sirven de base a la presente investigación. De esta manera se abordan estudios que permiten comprender las categorías de la investigación: Argumentación matemática, el Razonamiento matemático, el Lenguaje matemático y la Resolución de problemas matemáticos. Asumidas desde el contexto internacional, nacional y local. Entre los que se tiene:

A nivel internacional, se encuentra el trabajo de Crespo (2013), titulado "Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología, y presentada en el Instituto Politécnico Nacional de México – centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada en el año 2013". Este estudio doctoral sobre la argumentación matemática desde la visión de la socioepistemología, estuvo centrado en comprender el carácter sociocultural de las argumentaciones matemáticas, y se reconoce que el conocimiento matemático se sustenta básicamente en dos modos de comprensión y expresión: uno se realiza de forma directa, y corresponde a la intuición y el otro se lleva a cabo de forma reflexiva, es decir lógica.

De esta manera la postura socioepistemológica considera que la matemática no es una ciencia que surge aislada de la sociedad, sino inmersa en ella y por lo tanto recibe influencias fuertemente basadas en el pensamiento, las necesidades y características del escenario en que se desarrolla, de esta manera, se puede afirmar que las estructuras argumentativas no son inherentes de la forma de razonar del ser humano, sino que dependen del escenario en el que actúa el individuo.

A nivel metodológico esta investigación se llevó a cabo a partir del análisis de fuentes referidas al pensamiento lógico en distintos escenarios socioculturales, a fin de identificar las formas de argumentación utilizadas, y de experimentaciones realizadas con alumnos a través del análisis de sus producciones en el aula y de entrevistas y cuestionarios. Mostrando en el estudio que, para que un resultado sea considerado válido en el aula de matemática, es preciso que los alumnos lo entiendan y crean en el mismo. Si no pueden argumentar por sí mismos para realizar una demostración que tenga sentido para ellos, transfieren la validación a criterios de autoridad. Para lograr que los alumnos comprendan la necesidad de argumentar matemáticamente e incluso de demostrar propiedades matemáticas, resulta indispensable que construyan la significatividad de la argumentación.

Este estudio es fundamental, pues se reconoce el papel del docente en el proceso de enseñanza, en este caso no solo desde el saber disciplinar que maneja y que circula en el aula desde conceptos ya elaborados, sino desde la búsqueda fuera del aula, desde situaciones contextualizadas, donde el estudiante reconoce la aplicación que tiene la matemática, que puede dar claves acerca de los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se construyen. De esta manera, la escuela pasaría a ser una instancia más de aprendizaje, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

Además, es relevante para la investigación porque reconoce la importancia de la argumentación matemática, aclarando que el razonamiento es indispensable para que se dé la práctica argumentativa, la cual debe estar fundamentada en situaciones contextualizadas donde el estudiante puede establecer la relación y aplicación del conocimiento en la realidad, logrando así acercarse a un aprendizaje significativo.

Así mismo, desde la interacción en el aula y la producción del conocimiento matemático, Goizueta (2015), en su tesis doctoral, “Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas” realizada en Barcelona, planteó como objetivo principal la producción y reconocimiento de razonamientos y argumentos matemáticamente validos por parte de los estudiantes. Para la comprensión de este objeto de estudio se realiza un abordaje teórico desde una mirada filosófica y epistemológica de la matemática, abordando aspectos fundamentales de la demostración y la argumentación, con el fin de comprender la producción y validación del conocimiento matemático frente al desarrollo del razonamiento y argumentación, y así entender como esto se desarrolla en el aula de clase, por ello, es necesario comprender qué es el conocimiento matemático, su carácter y ontología, que es la argumentación y como se produce, que actividad desarrollan realmente los matemáticos y como las personas aprenden a hacer matemática, de esta manera se abordan autores como Lakatos, Wittgenstein, Sierpinska y Lerman, Perelman y Olbrechts-Tyteca, Brousseau y Toulmin.

Frente a la metodología abordada en el estudio se desarrolló un estudio cualitativo, se obtuvieron los datos en dos aulas de matemática de secundaria, a partir de un contexto de resolución de problemas que incentiva en los alumnos la necesidad de argumentar para validar la producción matemática, el estudio se caracterizó como comparativo, pues la comparación constante de situaciones similares está en la base del análisis interpretativo-inductivo, de esta manera se abordaron las bases de la teoría fundamentada.

Los resultados muestran que los alumnos tienen dificultades para establecer el estatuto epistémico de su producción matemática, pues los estudiantes no cuentan con los conocimientos matemáticos necesarios para desarrollar razonamientos que permitan un uso adecuado de argumentos en el contexto del problema propuesto, luego la posición epistémica que aborda el estudiante resulta un obstáculo en el modelamiento matemático, y es necesario que los estudiantes entiendan y aprecien la utilidad del conocimiento matemático para el modelamiento de fenómenos empíricos, es decir que se aprecie el papel de la matemática en la elaboración de teorías científicas.

Además, los resultados muestran una cultura matemática de aula donde los estudiantes no se ven capaces de validar su producción matemática y donde la actividad se relaciona con el uso de conocimientos prescritos por el profesor, quien condiciona esta producción, pues orienta hacia la unicidad de una solución. Se concluye que la formación de conocimientos meta-matemáticos debe ser el objetivo central de la educación matemática donde solamente no se produzcan y evalúen argumentos, sino que se entienda la importancia epistemológica y social de participar en la validación de estos argumentos construidos de manera colectiva en el aula.

Es fundamental el aporte de esta investigación al estudio que se desarrolla, porque se reconocen diferentes autores a nivel teórico que ayudan a fundamentar las categorías de estudio, tales como razonamiento y argumentación, entre ellos se retoma a Perelman y Olbrechts-Tyteca, y Toulmin. Además, se identifican dificultades en los estudiantes que también son visibles en el escenario donde se desarrolla la investigación, tales como vacíos conceptuales dificultando el razonamiento y la argumentación.

También De la Fuente (2016), en su estudio "Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor", realizado en Barcelona, el cual busca discernir sobre el conocimiento que debe tener el profesor de matemática para ayudar a los alumnos a construir el lenguaje matemático necesario para saber hacer, saber comunicar, y aprender a su vez nuevas matemáticas y como los profesores utilizan este conocimiento para implementar tareas en el aula, también se reconoce que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina la resolución de problemas tiene una importancia fundamental en el área. Se realiza un abordaje metodológico cualitativo-interpretativo con la participación de tres profesores analizando las tareas aplicadas en secuencias didácticas. El abordaje teórico está centrado en el conocimiento profesional del profesor, la resolución de problemas (Polya (1945), schoenfeld(1992), Puig(1996)), y el lenguaje algebraico.

Los resultados del estudio muestran que, si el docente implementa actividades de resolución de problemas y además el protagonismo lo tienen los alumnos, la habilidad para poder establecer conexiones entre diferentes representaciones de información dada les ayuda a los estudiantes a construir el lenguaje algebraico, pues la resolución de problemas sirve no solo para aprender a pensar matemáticamente sino también para aprender matemática. Además, el trabajo conjunto realizado por los docentes es fundamental frente al planteamiento de las tareas en las secuencias aplicadas, lo que ayudo a reflexionar sobre los mismos objetivos de aprendizaje, dinámicas de trabajo en el aula, y se evidenció el código "consciencia del propósito" para desplegar los mismos objetivos, esto llevo a la conexión entre las diferentes representaciones, tales como expresión verbal, tabla de valores, gráfica o algebraica. Se logro establecer conexión de la representación icónica con la algebraica y a su vez con la tabla de valores.

Este estudio es fundamental, pues permite establecer conexión entre las categorías de la presente investigación, entendiendo que la construcción de un lenguaje matemático con sentido se desarrolla desde la estrategia de resolución de problemas, el cual evidencia no solo el manejo de la semiótica sino de la argumentación matemática.

Ahora bien, también es asumida la resolución de problemas como una competencia matemática, como lo indica el estudio doctoral de Villalonga (2017), titulado "La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria", realizado en Catalunya. La finalidad de este estudio es doble, por un lado, como acción de investigación aporta evidencias y argumentaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la adquisición de la competencia de resolución de problemas y comparte instrumentos elaborados y aplicados en la investigación que ayudan al desarrollo de la competencia de resolución de problemas con el propósito que puedan ser adaptados e implementados en la práctica docente habitual. El abordaje del estudio es de carácter cualitativo, sin embargo, se introduce un pequeño análisis de carácter cuantitativo que permitió reforzar y ampliar algunas observaciones cualitativas realizadas; se contó con la participación de 6 docentes y 46 estudiantes, la construcción de instrumentos para la evaluación la resolución de problemas tomo como base las referencias consultadas y las aportaciones en el grupo de discusión.

Se evidencia que la resolución de problemas bajo una base de orientación no es un ejercicio de fácil y rápida aplicación, sino que requiere de bastante práctica y familiarización, pero genera resultados positivos en los estudiantes no expertos en cuanto a su aprendizaje en la resolución de problemas. Es necesario estructurar bien el material que se utiliza, no solo el problema en su sentido del desarrollo de competencias, pues debe percatarse que realmente se trate de un problema y no de un simple ejercicio, la base de orientación debe tener clara la cantidad y distribución de la información que ofrece, el vocabulario utilizado y la forma en que se presenta.

Con relación a los estudiantes, estos consideran que para resolver un problema este debe leerse con atención y entender lo que se expone, otros consideran que entender las cuestiones a responder es lo más importante, en general, reconocen tres aspectos comunes como datos, operaciones y resultados, al centrarse solo en estos elementos será complicado que en algún momento desarrollen o se interesen por verbalizar los procesos que llevan a cabo. El papel del docente es fundamental en la resolución de problemas, por ello debe proporcionar los recursos necesarios para fomentarlo, y la base de orientación propuesta es un intento de hacerlo, la cual genera un impacto positivo, además, se considera la rúbrica como un instrumento formativo para una evaluación reguladora de la resolución de problemas, es así como se entiende que, el desarrollo del razonamiento y la argumentación desde la resolución de problemas, exige una atención y dedicación importante por parte del maestro.

Este estudio es importante para la investigación porque se reconoce la importancia de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza como un elemento primordial que permite el desarrollo del razonamiento y la argumentación, y por ende ayuda también a comprender que existen dificultades asociadas al desarrollo de competencias, relacionadas con el trabajo en aula, la poca contextualización del conocimiento matemático a partir de situaciones, donde el estudiante esta poco familiarizado y por lo tanto esto no impacta de manera positiva a que se genere el proceso de razonamiento y argumentación.

A nivel nacional se aborda el trabajo realizado por: Gómez (2019), en su artículo denominado “El desarrollo de competencias matemáticas en la institución educativa pedro Vicente Abadía de Guacarí, Colombia” donde se da claridad que el desarrollo de Competencias Matemáticas, comienza a fortalecerse desde la básica primaria, y se continúa en este proceso en la Básica Secundaria y el resto de los niveles educativos, pues le permite al estudiante hacer uso del conocimiento matemático para resolver situaciones problémicas de su contexto, esta competencias son: la Comunicación, Representación y Modelación; Planteamiento y Resolución de Problemas; y Razonamiento y argumentación.

El estudio tiene como objetivo conocer la forma como se desarrollan las competencias matemáticas en los estudiantes de la Básica Secundaria de la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía, se realizó una encuesta a docentes y una prueba pedagógica a los estudiantes. De acuerdo con la encuesta aplicada a seis docentes responsables del área de matemáticas, estos expresan que en cada una de las clases se debe lograr que los estudiantes utilicen los conocimientos adquiridos en una variedad de contextos y situaciones intra y extra- matemáticos; sin embargo, ninguno de ellos emplea actividades que contribuyan al desarrollo de competencias en todas las clases.

Los resultados muestran que los docentes presentan dificultades al desarrollar en sus estudiantes los tres tipos de competencias (Comunicación, representación y modelación; Razonamiento y argumentación; Planteamiento y resolución de problemas). De igual forma, consideran que, si bien se presentan diferencias en cada estudiante en el desempeño entre una u otra, los resultados obtenidos muestran que existen dificultades en las tres. Un aspecto relevante detectado es que los docentes no tienen claridad de cuáles son los elementos a tener en cuenta para el desarrollo de cada una de las competencias matemáticas analizadas.

Luego de aplicarse una prueba pedagógica a 299 estudiantes de la institución educativa Pedro Vicente Abadía (106 de sexto grado, 82 de séptimo, 56 de octavo y 55 de noveno), se observa cómo ningún estudiante obtuvo nivel avanzado en la calificación de las tres competencias en los tres contenidos. En el nivel insuficiente, que es donde se ubica un estudiante cuando no demuestra los desempeños mínimos establecidos, se encuentran 141 en la competencia Comunicación, representación y modelación; 281 en Razonamiento y argumentación; y 108 en Planteamiento y resolución de problemas. De acuerdo a estos resultados y sumado a lo expresado por los docentes en cuanto al desempeño de los estudiantes en cada una de las competencias, se concluye que *es en la competencia Razonamiento y argumentación donde se presenta mayor dificultad.*

De esta manera se identifica que una de las competencias con mayor dificultad es la de razonamiento y argumentación, en la que se centra el presente proceso investigativo, buscando identificar cuáles son los procesos implícitos en el desarrollo de las mismas para de esta manera poder develar constructos teóricos que aporten en la disciplina.

Así mismo, Sánchez, L., Nieto, U., & Berrío, J. (2018). Desde su artículo "Niveles de razonamiento de los estudiantes de decimo grado basado en la caracterización por descriptores de las razones trigonométricas", donde se identifica que en el aprendizaje de la trigonometría existen muchas dificultades, uno de los problemas radica, en que el contenido de la trigonometría se les dificulta a los estudiantes al momento de relacionar los conceptos algebraicos y geométricos con la trigonometría.

Además se aborda el modelo de Van Hiele, este modelo se encuentra comprendido por dos componentes uno de ellos descriptivo, formado por los niveles de razonamiento, el cual se encarga de estudiar la manera en cómo razonan los estudiantes cuando realizan múltiples actividades de un mismo tema y la segunda componente instructiva formada por las fases de aprendizaje las cuales son de ayuda para el profesor ya que permite organizar actividades para que los estudiantes puedan dar paso de un nivel de razonamiento a otro superior; dicho Modelo explica la evolución del razonamiento geométrico y la forma que tiene el docente de ayudar al estudiante, todo esto con la finalidad de entender el uso de estrategias y métodos que favorezcan el aprendizaje de la trigonometría.

Se realizo un abordaje metodológico desde la investigación – acción, mostrando como resultados que existe confusión entre las definiciones y propiedades matemáticas, no utilizan argumentos matemáticos ni geométricos al momento de resolver problemas trigonométricos, además no interpretaron de forma adecuada algunas preguntas formuladas en la actividad lo que genero errores al momento de dar una respuesta, y por último no hacen una relación entre conceptos algebraicos y trigonométricos. Además, se pudo evidenciar que los estudiantes no hacen uso de un lenguaje formal adecuado al momento de realizar alguna conjetura, no utilizan suficientes ejemplos explicativos para dar un argumento válido a sus afirmaciones ya que algunas veces solo les basta con un ejemplo para reafirmar.

Este estudio aporta a la investigación por que muestra como frente al desarrollo del razonamiento en la resolución de problemas trigonométricos se presentan diferentes dificultades asociadas a vacíos conceptuales y el uso del lenguaje matemático, generando problemas al pasar de un lenguaje común a un lenguaje formal, y esto afecta en la argumentación, de esta manera se ayuda a fortalecer las categorías relacionadas con el presente objeto de estudio, permitiendo una, mayor comprensión del mismo.

A nivel local se encuentra el estudio de Salazar, Vera, Contreras, Gelvez, Valbuena, Barrera, Rincon (2019) en su artículo de investigación “argumentación matemática en el aula”, desarrollado en la Universidad Simón Bolívar, sede Cúcuta, donde se comparten algunos elementos de tipo comprensivo acerca de la “argumentación matemática en el aula”; cuyo análisis, se realizó a partir de dos categorías fundamentales tales como la posición epistémica, y la posición discursiva que los estudiantes develan al momento de argumentar matemáticamente a partir de la solución a una situación problema.

La investigación se desarrolló bajo el paradigma interpretativo a través del diseño de un estudio de caso dirigido por la teoría y técnica de un grupo focal, para la recolección de información. De esta manera se aplicó una situación problema a 8 estudiantes con el fin de comprender como se desarrolla su estructura argumentativa.

De esta manera se revisa la estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación desde la postura teórica propuesta por Duval, donde se tienen en cuenta premisas iniciales, términos medios y conclusión, la cual se aborda desde la resolución de problemas matemáticos, donde es necesario tener presente que la matemática requiere de un lenguaje formal y de un conjunto de conocimientos o cuerpo teórico que el estudiante debe comprender para que pueda desarrollar un proceso argumentativo a partir de razonamientos válidos.

En los hallazgos, se evidenciaron dificultades en el pasaje de lo semántico a lo teórico desde la posición epistémica; en cuanto a la posición discursiva, se reveló la presencia de formas discursivas, siendo la argumentación la menos utilizada por los estudiantes. Estas dificultades están asociadas a situaciones tales como errores conceptuales, manejo incorrecto de simbología matemática y poca contextualización de la disciplina.

De acuerdo a esto los autores proponen algunas condiciones para promover el desarrollo de la argumentación, entre ellas manifiestan que primero debe mirarse la matemática más allá de una simple reducción instruccional o mecánica, segundo, debe plantearse un plan de cualificación docente para la enseñanza de la matemática, donde se discutan aspectos sobre la didáctica específica, la argumentación, el pensamiento lógico, y la semiótica; y como tercero es necesario implementar desde la contextualización de la matemática el manejo de situaciones problema.

De esta manera, este estudio resulta fundamental para la investigación porque permite reconocer a nivel teórico el abordaje de Duval donde se analiza estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación, autor que también es retomado en el estudio. Así mismo se identifican diferentes categorías que permiten ampliar la compresión del objeto de estudio, tales como argumentación, lenguaje matemático y resolución de problemas.

También se aborda a nivel local el estudio de Salazar, Contreras y Jaimes (2016), en su artículo de investigación “Semiótica: un recurso fundamental en los procesos de argumentación matemática”, este estudio muestra que todo proceso de argumentación matemática escrito exige un alto nivel de manejo de registros semióticos, por lo tanto, se planteó como objetivo analizar e interpretar las representaciones semióticas en los procesos de argumentación matemática escrita por los estudiantes del grado noveno del colegio Gonzalo Rivera Laguado del municipio de San José de Cúcuta, fundamentándose teóricamente en la teoría clásica de la semiótica de Peirce (1974), Puig (1994), la teoría de los obstáculos epistemológicos de Bachelard (1976) y la estructura argumentativa propuesta por Duval (1999). Se da claridad que para realizar el análisis del lenguaje matemático como un recurso fundamental en la argumentación este debe realizarse desde situaciones problema contextualizados.

La investigación se fundamentó en la metodología cuantitativa, y se realizó en tres momentos; el primer momento se basó en el análisis descriptivo del uso que dieron los estudiantes a los diferentes signos matemáticos indagados desde el campo de función lineal; el segundo momento analizó los registros semióticos utilizados en el proceso argumentativo desarrollado por los estudiantes en una situación problema específica desde el contexto de la matemáticas y, en el último momento, se identificaron los errores semióticos y conceptuales que describieron los estudiantes en dicho proceso argumentativo.

El estudio evidencia un uso no apropiado del lenguaje matemático que impacta en el proceso argumentativo, encontrando en los estudiantes errores conceptuales que afectan las representaciones semióticas, la no contextualización del saber matemático, también se muestra que dentro de los procesos matemáticos utilizados por los estudiantes, que no hay procesos claros para dar solución a un sistema lineal, así mismo se observó que habían procesos que no eran pertinentes dentro del contexto del proceso matemático, de esta manera afirman que, el aprendizaje mecánico y no significativo, la no apropiación del lenguaje matemático y los errores conceptuales, están dificultando los procesos de argumentación matemática de situaciones problemas en los estudiantes.

Este estudio es de gran importancia, porque aporta para la presente investigación fundamento teórico desde las categorías de la investigación, abordando autores que se retoman como Peirce (1974), desde la teoría clásica de la semiótica y la estructura argumentativa propuesta por Duval (1999), así mismo se reconoce la importancia del abordaje de problemas matemáticos porque a partir de ellos es posible promover el proceso de razonamiento y argumentación.

Fundamento teórico

Desde la matemática educativa el campo del razonamiento y la argumentación resulta un centro de interés en estudios de esta disciplina ya que permite fortalecer el desarrollo de competencias, además, dadas las dificultades que a nivel histórico y actualmente ha mostrado la enseñanza y aprendizaje de esta ciencia y que se hace visible en los resultados académicos, es importante profundizar en estudios que permitan identificar y analizar los vacíos presentes en la enseñanza de la matemática con el fin de fortalecer procesos que permitan un aprendizaje significativo en los estudiantes, reconociendo así la utilidad de esta ciencia en la vida cotidiana, y donde se tenga una visión más allá del paradigma mecanicista, abordando así la resolución de problemas contextualizados como una forma de acercar este conocimiento a escenarios reales que le den sentido a la matemática.

De esta manera se abordarán posturas teóricas que permitan una mayor comprensión del objeto de estudio, desde las categorías de argumentación, razonamiento, lenguaje matemático y resolución de problemas.

En el campo de la educación matemática resulta fundamental revisar el proceso de enseñanza que permita la formación de estudiantes matemáticamente competentes, es por ello que desde las orientaciones nacionales se consideran tres grandes aspectos que permiten organizar el currículo de matemática, los cuales son, los *procesos generales* (tales como razonamiento, resolución de problemas, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos, argumentación), *los conocimientos básicos (*asociados a los pensamientos matemáticos, como el numérico, espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional) y el contexto.

Teniendo en cuenta estos tres grandes aspectos de organización del currículo y dadas las dificultades que se hacen evidentes en la formación de esta ciencia, que además son notorias en los resultados de pruebas nacionales e internacionales, se han desarrollado diferentes investigaciones a nivel internacional, nacional y local que buscan apoyar el campo de la enseñanza de la matemática desde el trabajo realizado en aula.

De esta manera, y para el caso de la presente investigación resulta importante el desarrollo del razonamiento y la argumentación matemática en la resolución de problemas matemáticos, pues es considerada fundamental dentro de la organización del currículo, además que forma parte de los procesos de evaluación a nivel nacional e internacional, y no ha mostrado buenos resultados, es por ellos que algunos investigadores han incursionado en su abordaje desde diferentes objetos matemáticos, y donde se ubican fundamentos teóricos que se retoman en esta investigación como los propuestos por: Perelman y Olbrechts-Tyteca (1958), Duval (1999a), Toulmin (1958), Borwein (2009) relacionados con el razonamiento y la argumentación; así como también Pierce (1974) y Duval (1999b) desde la semiótica, y Polya (1945) Shoenfeld (1985) desde la resolución de problemas.

La ubicación de estos aportes teóricos ayuda a realizar un acercamiento y comprensión del objeto de estudio, y su importancia en el proceso de enseñanza de la matemática, pues se reconoce que a partir del razonamiento y la argumentación se puede impactar de manera significativa en la formación de área.

Argumentación y razonamiento matemático

Inicialmente se reconoce la importancia y gran influencia de la dialéctica y retorica aristotélica en la edad media y el renacimiento, luego en la edad moderna con el auge del positivismo fue perdiendo su valor, fue relegada en los planes de estudio como un manual de estilo o técnica expositiva, dejando de lado la noción aristotélica sobre el arte de la persuasión y abordada entonces como el arte de la expresión, pues nada se consideraba persuasivo sino se ajustaba a criterios científicos y esto no lo cumple la retórica, además solo se estima valido dentro de la lógica lo formal dejando así de lado a las ciencias humanas, asumiendo a expresiones retoricas como vacíos conceptuales.

Aun así, en la segunda mitad del siglo XX se empezó a recuperar la retórica por parte de los filósofos, entre ellos le corresponde el liderazgo a Perelman y Olbrechts-

Tyteca (1958) gran conocedor de la filosofía y la retórica clásica, pues esta se considera un medio para darle a la filosofía una dimensión interdisciplinaria, es así como la conocida “nueva retorica” o “teoría de la argumentación” es un gran aporte no solo a la filosofía, también a la lógica, la psicología, la sociología, la ética y toda disciplina que dependa de la razón práctica.

Esta teoría centra su análisis en las estructuras argumentativas que se desarrollan en un proceso de argumentación y el cual es “complementaria de la teoría de la demostración objeto de la lógica formal” (Perelman & Tyteca, 1989, p.42), al tiempo que, realiza su aproximación al campo de la argumentación matemática, fundamentándola desde la argumentación cuasi lógica, es decir, de aquella argumentación que se acerca al campo de la lógica formal; lo anterior, teniendo en cuenta que la ciencia de la matemática, está compuesta por un conjunto de leyes, teoremas, axiomas, etc. o como le llama Duval (1999a), un cuerpo teórico ya definido, que exige un alto manejo de los sujetos (profesores y estudiantes) que actúan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y que en los procesos de argumentación de dicha ciencia, el saber epistemológico juega un rol importante para lograr la convicción de los auditorios.

Así mismo, Toulmin (1958) manifiesta que todo argumento requiere de razones o justificaciones que le permitan determinar su validez, además es fundamental que cuando argumentamos partimos de un problema, a partir del cual se plantean preguntas y posibles soluciones, luego hay una etapa inicial donde se admiten diferentes propuestas como posibilidades de solución, y al contemplar la posibilidad se invierte tiempo en los datos, pruebas o razonamientos que respaldan lo que puede aducirse en su favor o en contra hasta llegar finalmente a una conclusión.

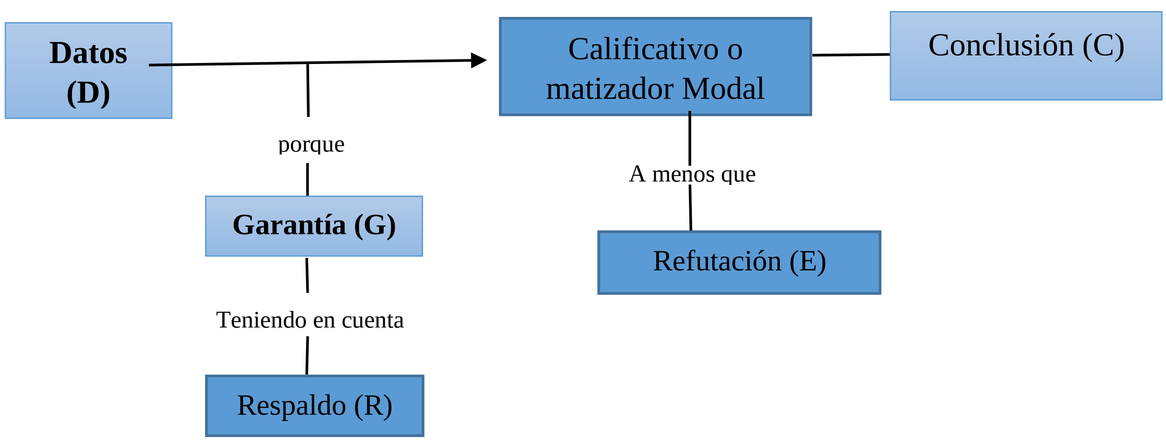
Es de aclarar que en algunos casos las propuestas que se retoman inicialmente pueden resultar después inadmisibles, pues los criterios o razones para considerarse validos dependen de la fuerza de los mismos, algunos tienen mucha fuerza y otros carecen de ella y esto depende de ciertas características en su formulación, como lo menciona Toulmin (1958) “los argumentos no sólo deben poseer una estructura determinada, sino que además deben ser expuestos y presentados siguiendo una secuencia de etapas conforme a ciertas normas básicas de procedimiento”(p.67), lo que permite una clara evaluación de los argumentos.

De esta manera resulta necesario tener presente el ***razonamiento matemático,*** pues es una capacidad asociada al pensamiento que contribuye al aprendizaje de las matemáticas, permitiendo resolver problemas y generar argumentos válidos. Luego debe entenderse desde el proceso de pensamiento tanto inductivo como deductivo, que desde la postura de Borwein (2009), se concibe el *razonamiento por inducción,* como una forma de razonamiento en el que la conclusión aunque cuente con el apoyo de las premisas no se deduce a partir de ellas sino de la ejemplificación; y el *razonamiento deductivo,* es un proceso de razonamiento en el que la conclusión se desprende de premisas presentadas, por lo que la conclusión no puede ser falsa si las premisas son verdaderas. Luego el razonamiento matemático es un proceso que involucra el desarrollo del pensamiento o argumentos, pues permite obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas.

Desde la postura de Toulmin (1958) se analiza la estructura de los argumentos, partiendo de los planteamientos de Aristóteles y su microestructura (premisa menor, premisa mayor y conclusión), la cual es considerada simple para clasificar todos los elementos de un argumento. Por ello se plantea la estructura argumentativa con los elementos a tener en cuenta, los cuales dan fuerza y sentido a un argumento, el cual puede ser generado desde las distintas disciplinas o áreas del conocimiento.

De acuerdo a Toulmin (1958), la estructura argumentativa es válido o no, teniendo en cuenta que si dada una situación, esta puede desarrollarse y expresarse bajo tres elementos básicos tales como datos, garantía y luego conclusión, esto puede derivar un argumento formalmente válido porque la garantía por definición debe tener la forma de una implicación hipotética, que conecte los datos con la conclusión; siempre y cuando la garantía proporcione la fuerza requerida al paso del dato a la conclusión de modo que no pueda aparecer una refutación. Aun así, se cuenta con otros elementos en la estructura argumentativa que también son usuales, tales como: respaldo, cualificador modal y refutación.

De esta manera, debe entenderse que el razonamiento que permite el desarrollo de la estructura argumentativa propuesta por Toulmin (1958), parte en su primera fase desde un problema que sería el punto de partida para iniciar el proceso argumentativo, donde a partir del enunciado se logran identificar "datos (D)" estos datos están de manera explícita en el análisis de problema, posterior a esto, se encuentran las "garantías (G)" las cuales son explicativas, o las razones que damos de manera secuencial y coherente bajo un sustento ubicado desde la disciplina que le de fuerza a los argumentos, estos en algunos casos presentan "Respaldo (R)", a partir de los cuales se puede dar respuesta al problema planteado para así llegar a una "conclusión (C)" que sea aceptable, esto en el caso de que no se presente "Calificativo o matizador modal (M)" y "Refutación (E)". La grafica 1 muestra la estructura argumentativa desde la postura de Toulmin.



Grafica 1. Estructura argumentativa. Tomado de Toulmin, 1958, p. 142.

Desde esta postura, se ve la importancia del uso y conexión de los elementos que conforman un argumento, el cual requiere de un buen razonamiento matemático, que permita determinar la validez y fuerza de los argumentos. Para mayor claridad, se definen las funciones de cada uno de los elementos correspondientes a esta estructura:

Datos (D), son los elementos justificatorios, que son base de la afirmación realizada, o hechos con los que se cuenta para soportar los argumentos.

Garantía (G), son enunciados hipotéticos explicativos, cuyo objetivo consiste simplemente en registrar explícitamente la legitimidad del paso o pasos dados, enlazando legítimamente al dato con la conclusión.

Conclusión (C), es una afirmación que se genera ya sea apoyada por las garantías y respaldos o refutada.

Respaldo (R), son elementos o certezas que dan fuerza y validez a las garantías.

Calificativo o matizador modal (M), indican la fuerza conferida por la garantía en el paso adoptado

Condiciones de excepción o refutación (E), apuntan las circunstancias en que la autoridad general de la garantía ha de dejarse a un lado, es decir, en el caso en que la conclusión pueda no ser verdadera.

Ahora bien, desde la postura de Toulmin se ha mostrado una propuesta de estructura argumentativa que ha sido de utilidad en diferentes disciplinas, incluyendo la matemática, desde donde se han abordado investigaciones y han surgido posturas como la de Duval (1999a) desde el área matemática que ha aportado al campo de estudio de la argumentación, presentando un esquema para el análisis de un proceso argumentativo, y cuyos planteamientos guardan estrecha relación con los postulados teóricos antes mencionados de Perelman y Tyteca (1958) y Toulmin (1958).

Primero debe reconocerse desde la postura de Duval (1999a) que existen dos tipos de argumentación: *heurística y retórica*, la primera se refiere a aquella argumentación que "requiere de la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones, que sea de naturaleza deductiva y no solo de naturaleza semántica" (p.30), como es el caso de la *argumentación matemática (que se enmarca dentro del tipo de la argumentación heurística)*, dicha naturaleza deductiva y semántica debe estar compuesta de un cuerpo teórico propio de la disciplina matemática; por su parte, la argumentación retórica no hace referencia a una disciplina en particular y su cuerpo semántico no corresponde al saber epistemológico propio de una ciencia, en otras palabras, la argumentación heurística corresponde a una ciencia particular (como la matemática) y su propósito es persuadir y convencer, mientras que la argumentación retórica no particulariza una ciencia y sólo busca la persuasión del o los oyentes en auditorios particulares.

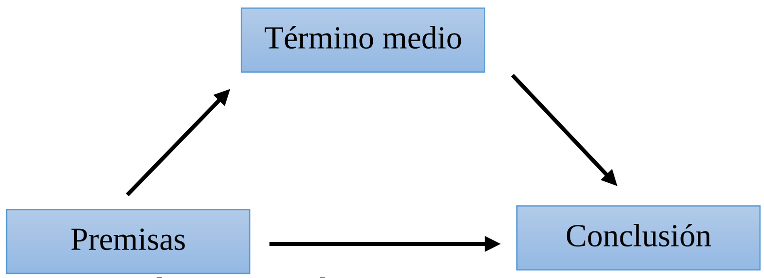
Para el caso del presente estudio, se hace énfasis en la argumentación matemática, según Duval (1999b), analizar la estructura de la argumentación, conlleva a tener en cuenta la dimensión funcional y la dimensión estructural de la misma.

Desde la *dimensión funcional* se analizan los criterios de pertinencia y fuerza de los argumentos, los cuales determinan la aceptabilidad de los mismos y que conforman un proceso de argumentación matemática. Desde la pertinencia de los argumentos se analiza el valor epistémico semántico, el cual es un elemento de sentido que el sujeto argumentador le da a sus proposiciones en la construcción de los argumentos y que de alguna manera evidencia el nivel de conocimiento del sujeto para establecer las relaciones entre las justificaciones presentadas. En cuanto a la fuerza del argumento, expresa Duval (1999b), se analiza el cuerpo teórico del mismo, es decir, que el uso de leyes, teorías, conceptos, etc. sean apropiados y epistemológicamente coherente con el problema o tema en el cual el sujeto esté argumentando y a la resistencia a los contrargumentos que allí se den.

Unido a lo anterior, en cualquier de los dos criterios (pertinencia y fuerza), se debe analizar el valor lógico de los argumentos, el cual puede ser falso o verdadero, que, para el caso de aceptar un argumento, además de ser pertinente y fuerte, necesariamente debe tener un valor lógico de verdad.

En cuanto a la *dimensión estructural,* Duval (1999b) plantea el análisis de un estatuto operatorio de los argumentos, el cual muestra una secuencia en la elaboración de la argumentación, y está conformado por tres elementos fundamentales, los cuales son las “premisas” que plantea el sujeto argumentador, los “términos medios” (preconceptos o conceptos matemáticos que se sustentan bajo procedimientos utilizados) y la “conclusión” a la cual se llega en el proceso argumentativo, esta estructura guarda estrecha relación con la postura de Toulmin (1958) desde los elementos de “datos, garantía y conclusiones” que permiten determinar la validez de un argumento. Luego, en el desarrollo de la dimensión estructural propuesta por Duval se evidencian los criterios de pertinencia y fuerza en el proceso argumentativo buscando la validez y aceptabilidad de los argumentos.

A continuación, se presenta el esquema de estructura argumentativa propuesto por Duval (1999a) para el análisis de un pasaje de razonamiento en una argumentación, donde el *modelo de razonamiento* valido es el *razonamiento deductivo*, regido por la regla de implicación, modus ponens. Es decir, la obtención de una conclusión B, a partir de las premisas que están en la proposición A y de una implicación A ⇒ B..



Grafica 2. Estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación. Tomado de Duval, 1999a, p.18.

En este esquema, se evidencia la estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación, que parte de unas premisas iniciales que se construyen dependiendo del sentido que da el estudiante al problema que este analizando, de allí se evidencian los términos medios, que dependen del nivel de conocimiento del sujeto que argumenta, pues allí se visualiza el uso del lenguaje matemático y conceptos que permiten la construcción de los argumentos, a partir de la cual se genera una conclusión, pero es necesario en cada momento realizar un análisis de la validez de estos argumentos. De esta manera, en la construcción de los argumentos, el lenguaje matemático juega un papel esencial, porque a través de su uso se determina el sentido que el estudiante le da al problema y el conocimiento que tiene de la disciplina, por tanto, se hace necesario abordar la categoría del lenguaje matemático propuesta por Pierce (1974), para una mayor comprensión del fenómeno estudiado.

Razonamiento y Lenguaje matemático

Para que el estudiante pueda tomar decisiones a partir de su razonamiento, este debe desarrollarse exponiéndolos al análisis de situaciones problema contextualizados y, para ello, es necesario que establezcan relación entre el lenguaje, hablado y escrito, con el lenguaje propio de las matemáticas.

Además, la matemática se entiende como una actividad de resolver problemas en las que debe traducirse el lenguaje natural a expresiones usando símbolos matemáticos. Entonces, el primer paso en la resolución de un problema es su comprensión en términos de conceptos y operaciones matemáticas; lo que, a su vez, exige no solo poseer conocimientos matemáticos, sino conocimientos lingüísticos y semánticos. También es indispensable una comprensión del contexto en el que se enmarca el problema para darles sentido a las frases.

La ciencia matemática se caracteriza por hacer uso de sistemas simbólicos, capaces de significar y dar significado a cualquier objeto de estudio. De acuerdo con Vasco (2007), los sistemas simbólicos:

> No sólo son una expresión del pensamiento ni sólo ofrecen posibilidades de cálculos simbólicos eficaces; tienen también un poder de apoyarlo, precisarlo y enriquecerlo y le permiten hacer más fácilmente el paso de lo concreto a lo abstracto y de lo particular a lo general, así como el paso de volver de lo abstracto a lo concreto y de lo general a lo particular (p.110).

Es así, como el estudio de estos sistemas simbólicos utilizados para representar, significar o dar significado a un objeto (real o abstracto), se ha fundamentado desde los aportes realizados por la teoría de la significación o “ciencia de la semiótica” presentada por el filósofo pragmático estadounidense Charles Sanders Pierce (finales del siglo XIX y principios del siglo XX); al respecto, Kristeva (1974) reconoce la semiótica como una elaboración de modelos o sistemas formales y caracteriza su objeto como una axiomatización de los sistemas significantes, es decir, es la representación más cercada al pensamiento que se tiene frente a un objeto.

Según Pierce (1974) la semiótica tiene tres ramas: la primera hace referencia a lo gramatical, la segunda se a la lógica propiamente dicha y la tercera es la retórica pura. Cualquiera de estas ramas de la semiótica, entran a jugar un papel fundamental en la dimensión argumentativa a partir del razonamiento, como manifiesta León y Calderón (2003), de alguna manera aparecerán implícitas cuando se analiza el razonamiento y argumentación en contextos matemáticos, puesto que en esta disciplina la organización del encadenamiento de las proposiciones utilizadas en la resolución de problemas desde el campo de la matemática, debe hacerse a través de "registros" diferentes al de la lengua natural.

Ahora bien, el conjunto de "signos" que utilizamos para representar, modelar o significar un objeto es lo que compone al estudio de la semiótica. Luego, en palabras de Pierce (1974, p.22) un signo o "representamen, es algo que, para alguien, representa o se refiere a algo en algún aspecto o carácter*",* lo perceptible (el signo o registro semiótico) es a lo que Duval (1999b) llama representación externa, siendo este el medio del cual se dispone para exteriorizar las representaciones mentales, a partir de un lenguaje natural, grafico o algebraico.

En la relación signo con su objeto, podemos encontrar una tricotomía para el análisis de los signos que conforman el estudio de la semiótica desde esta lógica; para Pierce (1974), los signos se clasifican en: íconos, índices y símbolos. Un ícono emerge de una sensación análoga o semejante al objeto que representa, es decir, un ícono "es un signo que poseería el carácter que lo vuelve significativo, aun cuando su objeto no tuviera existencia" (Pierce, 1974, p.59). A manera de ejemplo, en el contexto de la matemática, sabemos que el signo c= ax + b, es la representación de un objeto abstracto el cual conocemos como ecuación lineal, es decir, aunque no existe una relación directa entre el signo y el objeto, este si emite una carga significativa para el intérprete.

Por su parte, el índice (segunda clasificación del signo), debe estar "conectado físicamente con su objeto" (Pierce, 1974, p.58), lo que quiere decir que el índice perdería toda carga de significación si no existiera este vínculo directo entre el signo y el objeto que representa. Por ejemplo, en la representación de proposiciones matemáticas, cuando el intérprete asigna un valor lógico a un signo (x = todos los perros son negros), nos encontramos al frente de un índice, nótese que el signo "x" por sí solo no emerge ninguna carga significativa, mientras que al relacionarla con su objeto adquiere un significado para el contexto que se está utilizando la proposición.

Por último, encontramos el símbolo, este "está conectado con su objeto en virtud de la idea de la mente utilizadora de símbolos, sin la cual no habría tal conexión"

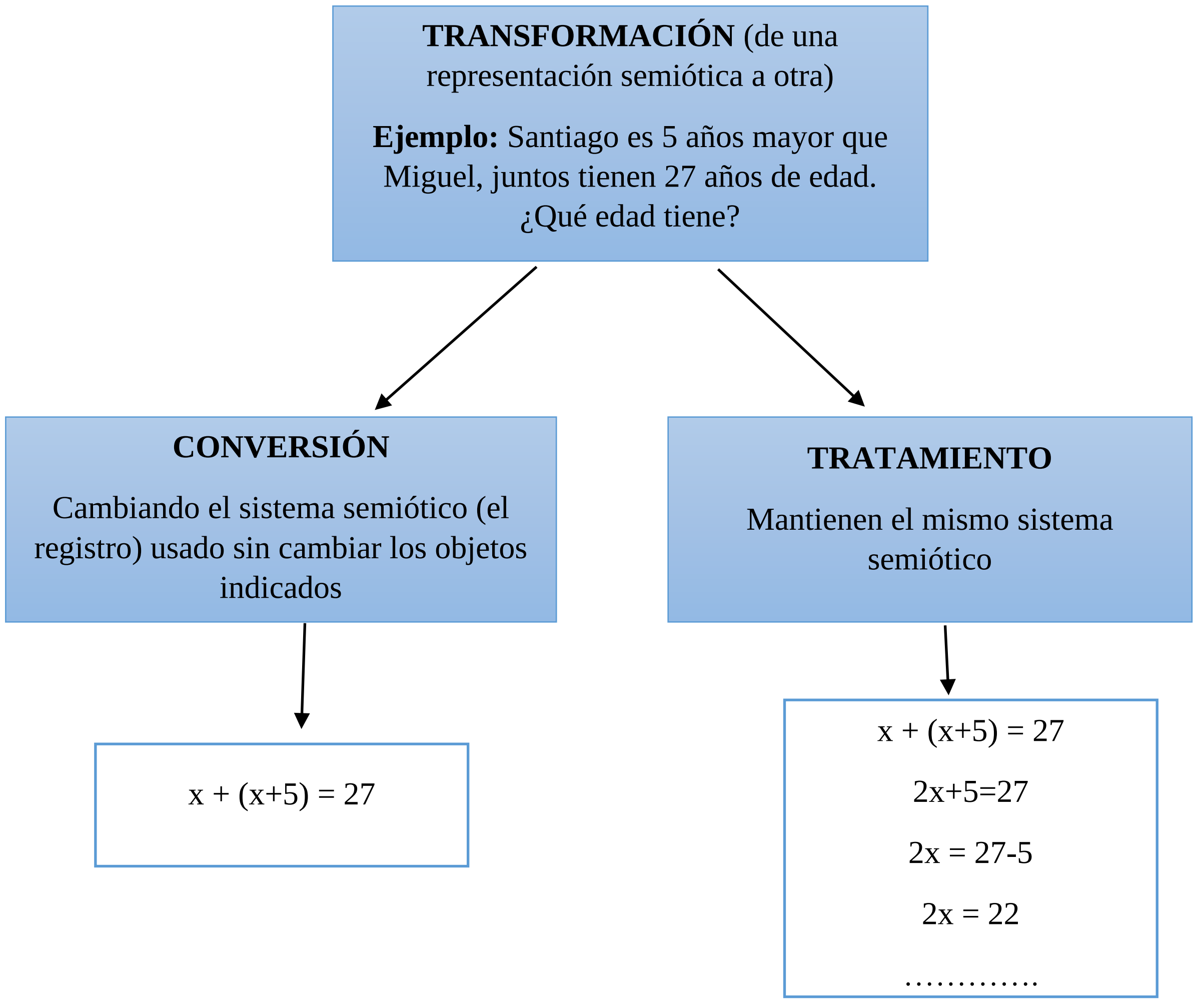
(Pierce, 1974, p.58), es decir, el símbolo es un signo que perdería el carácter que lo convierte en signo si no hubiera un interpretante, en este contexto, el interpretante le da el sentido que considere sea el más conveniente para la significación que emerja en el registro semiótico a presentar.

Es importante entonces reconocer que el lenguaje matemático está conformado por signos que nos permiten representar objetos matemáticos, y que se debe tener en cuenta en el proceso de enseñanza, pues diferentes investigaciones han mostrado que esta es una de las dificultades que presenta esta disciplina, debido a la no comprensión, mal uso del lenguaje o vacíos conceptuales.

Ahora, de acuerdo a Duval (2006), debe considerarse los contextos de representación en que aparecen los objetos matemáticos, pues la actividad matemática se desarrolla en un contexto de representación, por ejemplo, los números naturales pueden representarse con diferentes materiales y el estudiante debe ser capaz de reconocer este objeto de conocimiento matemático en cualquier contexto que se le presente, u otro ejemplo, la presentación de una función se puede realizar de manera verbal, algebraica o gráfica y nos estamos refiriendo al mismo objeto pero en diferentes registros de representación que deben ser reconocidos por el estudiante.

Luego, esos contextos de representación son necesariamente semióticos, y lo más importante es la transformación, como lo menciona Duval (2006), porque el procesamiento matemático requiere de transformación de representaciones semióticas, de esta manera los signos son prioritarios para sustituir unos objetos por otros dependiendo del sistema semiótico de representación.

Con respecto a esto, Duval (1999b), menciona que se deben conocer dos clases de transformaciones de registro semiótico: la conversión y el tratamiento. Con respeto a la conversión, esta permite cambiar de un tipo de representación semiótica a otra (por ejemplo, pasar de un lenguaje algebraico a uno gráfico), mientras que el tratamiento maneja el mismo sistema semiótico. Ejemplo de esto se observa en la figura 3:



Grafica 3. Tipos de transformación, ajustado de Duval (2006).

En el grafico 3 se observan mediante un ejemplo los dos tipos de transformación, en el caso de la conversión se pasa de un registro de representación en lenguaje natural a uno algebraico, mientras que en el tratamiento se maneja el mismo registro de representación bajo una secuencia o serie de procedimientos. Pero, aunque se habla de dos clases de transformaciones, tanto la conversión como el procedimiento están relacionados, pues como se evidencia que se desarrollan en un proceso de resolución de problemas, lo que es común en el campo matemático.

Entonces cuando hablamos de razonamiento y argumentación, esto se desarrolla en situaciones específicas como las situaciones problema, donde se hace necesario el manejo del lenguaje matemático, por lo tanto, resulta fundamental un uso adecuado de representaciones semióticas, con el fin de desarrollar una argumentación valida, que en este caso se desarrolla tanto en la conversión como en el tratamiento, pues se elaboran premisas que requieren de la compresión de enunciados, un manejo conceptual de la disciplina, y el lenguaje matemático.

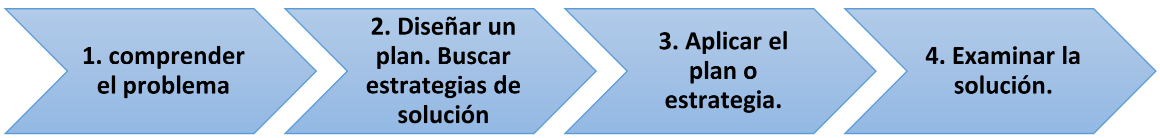
Argumentación y resolución de problemas

La enseñanza de la matemática debe pensarse de tal manera que el estudiante no solo logre unos conocimientos básicos, sino que desarrolle creatividad que le permita formular y resolver problemas, de esta manera una enseñanza basada en la *resolución de problemas* reales (contextualizados) puede facilitarle al estudiante la apropiación de conceptos y procedimientos matemáticos necesarios en esta disciplina, además de promover un pensamiento reflexivo y crítico**,** promoviendo de esta manera el desarrollo de competencias.

La resolución de problemas matemáticos es fundamental para el desarrollo del razonamiento y la argumentación, como se dijo anteriormente, la fase inicial de una argumentación parte de problemas, además Shoenfeld (1989) indica que deben vincularse en el aula estrategias para que el estudiante aprenda a leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos, pues el objetivo fundamental en matemática a partir del razonamiento es establecer las conexiones y entender el significado de la estructura matemática. para lograr esto, los estudiantes deben discutir sus ideas, especular posibles resultados, hacer uso de ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar y ajustar sus ideas, aspectos que resultan fundamentarles en un proceso de razonamiento y argumentación.

Además, la OCDE (2018) desde el marco de referencia de las pruebas PISA, plantea que el razonamiento matemático y la resolución de problemas de la vida real se superponen, y que además hay un aspecto del razonamiento matemático que va más allá de la resolución de problemas prácticos, pues es también una manera de crear y evaluar argumentos, sopesando interpretaciones e inferencias relacionadas con las afirmaciones y las soluciones de problemas.

Así mismo, desde Polya (1945) se reconoce que los problemas juegan un papel fundamental en la enseñanza de esta ciencia, y que, si el aprendizaje tiene que ver con descubrimiento, se debe permitir la posibilidad al estudiante de desarrollar problemas, en donde primero imaginen y luego aprueben algún aspecto matemático acorde a su nivel. De esta manera, Polya (1945) propone un esquema para la resolución de problemas que consta de 4 fases como lo son: comprensión del problema, diseño del plan, puesta en práctica del plan, examinar la solución.



Grafica 4. Esquema para resolver un problema desde la postura de Polya (1945).

En el primer momento se debe comprender el problema, es decir se debe revisar de manera detenida para determinar claramente que es lo que se pide, luego se deben identificar claramente los datos, en esta etapa debe tener claro el docente que se deben proponer problemas acordes al nivel del estudiante; posterior a ello se debe diseñar un plan, en este caso el estudiante debe abordar experiencias pasadas, retomar saberes previos de la matemática que le ayuden a desarrollar el problema, en este caso el docente es un guía que orienta por medio de preguntas; después se aplica el plan, comprobando cada uno de los pasos, realizando los procedimiento que le permitan resolver el problema, tanto en el diseño del plan como en su aplicación se observa la coherencia con la estructura argumentativa propuesta por Toulmin (1958) y Duval (1999a), pues ya sean garantías o términos medios, el estudiante debe reconocer el saber de su disciplina planteando argumentos de manera secuencial y coherente para finalmente llegar a la conclusión y examinarla para determinar si es válida o tiene refutación.

De igual forma, Shoenfeld (1985) reconoce la importancia del trabajo realizado por Polya (1945), pero considera que son insuficientes las estrategias planteadas, por lo que involucra más elementos en la resolución de problemas, tales como:

- *Los recursos*, estos son entendidos como conocimientos previos, o bien, el dominio del conocimiento.

- *Las heurísticas*, entendidas como estrategias cognitivas, estas son las reglas o planteamientos generales que ayudan en el abordaje de un problema.

- *El control*, entendido como las estrategias metacognitivas, es decir, la manera en que los individuos utilizan la información y las estrategias heurísticas que poseen para resolver un problema, esto involucra conductas tales como: planificar, seleccionar metas y submetas y monitoreo constante durante el proceso de resolución, y

- *El sistema de creencias*. Éste consiste en el conjunto de ideas o percepciones que los estudiantes poseen a cerca de la matemática y su enseñanza, con respecto a esto documenta las siguientes creencias, primero, que son abstractas y no se relacionan con la vida cotidiana, segundo, si un problema no es resuelto rápidamente no tiene solución, tercero, solo los genios o superdotados pueden crear matemática.

Esto último ha condicionado la forma en como los estudiantes abordan la resolución de problemas, evidenciando dificultades desde el momento de interpretar y comprender el enunciado hasta la forma de abordarlo y resolverlos, pues en muchas ocasiones no encuentran conexión entre los contenidos matemáticos y la realidad o situación que estén trabajando.

Argumentación y resolución de problemas trigonométricos.

Como se ha mencionado la resolución de problemas es fundamental en el desarrollo de la argumentación, y se aborda desde diferentes objetos matemáticos, en este caso resulta fundamental en análisis de problemas trigonométricos porque a partir de ellos se realiza reconocimiento de conceptos, manejo de simbología matemática, y se realizan razonamientos que permite la creación de argumentos válidos.

Ahora bien, la trigonometría es una rama importante de la matemática, pero desde la postura de Andrade, Alcívar, Palma, y Ampuero (2020), se indica la preocupación hacia la enseñanza de este campo porque se subestima la importancia que tiene en la formación de los estudiantes, quienes deben tener bases desde la educación básica secundaria para evitar problemas en la educación universitaria en el aprendizaje del cálculo, por lo tanto, se debe orientar desde una dinámica diferente a la tradicional.

De esta manera, la enseñanza de la trigonometría debe fundamentarse desde una apropiación conceptual como se asume desde la postura de Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez (2014), quienes reconocen tres aspectos importantes: la estructura conceptual, los sistemas de representación y el contexto en el proceso de enseñanza, los cuales son elementos fundamentales para que el estudiante realice razonamientos que le permitan generar una argumentación valida.

Así mismo, Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez (2014), centrados en la enseñanza de la trigonometría, plantean desde la *estructura conceptual*, la ubicación clara de conceptos como ángulos, triángulos, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, teorema de seno, teorema de coseno. Se deben tener en cuenta las relaciones que se establecen entre los conceptos, porque se puede presentar la resolución de dos tipos de triángulos, los que son rectángulos y lo que no lo son. En el caso del triángulo rectángulo se requiere de conceptos como ángulos, teorema de Pitágoras, razones y proporciones, los cuales son necesarios para el desarrollo de las razones trigonométricas. Y los triángulos que no son rectángulos requieren del reconocimiento del teorema de seno y de coseno.

Además, en la estructura conceptual se deben identificar un campo procedimental, organizado en tres niveles: destrezas, razonamientos y estrategias; las destrezas hace referencia al manejo de términos, conceptos y símbolos matemáticos; el razonamiento es lo que se ejecuta sobre los conceptos, donde se identifica el razonamiento deductivo y las estrategias es lo que se ejecuta sobre la estructura conceptual, de esta manera se entiende que lo conceptual y lo procedimental es fundamental en la enseñanza de la trigonometría.

También se reconoce los *sistemas de representación* que permite organizar los símbolos sobre el tema y establecer distintas representaciones sobre un mismo concepto, entre ellos se ubica la representación verbal, simbólica, numérica, gráfica y manipulativa. En la representación es fundamental la traducción de un sistema de representación a otro, y para esto es importante el reconocimiento y manejo de la estructura conceptual de la trigonometría.

Ahora bien, también se menciona la importante del *contexto*, que en el caso de la trigonometría es importante la variedad de fenómenos de la cotidianidad donde se puede ver la aplicación de este campo. Algunos fenómenos están determinados por la altura de un objeto, el cálculo de distancia inaccesibles, ángulos de elevación y depresión, la construcción de componentes vectoriales, cálculo de áreas y perímetros, entre otros, y las situaciones que se plantean deben tomar sentido desde el entorno específico del estudiante.

Fundamentación ontológica

Desde la mirada ontológica debe reconocerse la postura de Breuker (1999) quien afirma que "una ontología es una representación explícita de una conceptualización cognitiva, es decir, la descripción de los componentes de conocimiento relevantes en el ámbito de la modelización" (p. 32), es decir que se hace referencia a la reflexión que se asume del objeto de estudio desde las evidencias teóricas y empíricas que lo sustentan.

En el caso del razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos se asume para su comprensión la mirada de diferentes autores tal como se describió en el fundamento teórico, esto permite desde el contexto de estudio un mayor reconocimiento del fenómeno, entendiendo así que se aborda una realidad diversa y extensa, luego a partir de la investigación se busca comprender una parte de este objeto desde un escenario particular.

Entonces debe entenderse que, si se retoma cada categoría por separado, tanto argumentación, como razonamiento y resolución de problemas, cada una tiene un campo teórico amplio, pero centrada en la disciplina matemática y bajo la planeación curricular que a nivel nacional se menciona sobre esta área, son vistos como procesos fundamentales en la formación de estudiantes matemáticamente competentes.

Es por ello, que tanto la ubicación de antecedentes, como teórica centra su intención de comprender el objeto en el campo matemático, donde se busca identificar la forma cómo se relacionan estas categorías para ser analizadas en el contexto de la investigación, por ello que se identifica la relevancia que tienen en el proceso de formación y por ende las dificultades que se presentan en la enseñanza, que como se describe a nivel de problema de investigación y de antecedentes, estas dificultades son evidentes en contexto tanto internacional, como nacional y en el escenario donde se desarrolla el estudio.

Además, frente a esto los lineamientos curriculares en matemática a nivel nacional (1998) mencionan que el razonamiento, la argumentación y la resolución de problemas son fundamentales en el proceso de formación desde toda actividad matemática, así mismo son coherentes con el marco de referencia de las pruebas PISA, aun así, aunque existen orientaciones curriculares para la enseñanza, se evidencian situaciones como lo planteado por González (2019) en su informe presentado sobre las pruebas PISA 2018, indicando que Latinoamérica se ubica por debajo del promedio mundial; Razo (2018), Lever y López (2020) mencionan que son escasas o a nivel superficial las oportunidades que tienen los estudiantes para razonar y argumentar, limitándose a la repetición; Gómez (2019) quien menciona que los estudiantes presentan desempeños muy bajos en el proceso de razonamiento y argumentación, y así son diversos estudios e informes a nivel internacional, nacional y local que muestran que este objeto requiere de un análisis desde el escenario o realidad donde se hace visible para una mayor comprensión del mismo.

Fundamentación epistemológica

Entendiendo este objeto de estudio desde una realidad diversa y extensa, requiere ser analizado y pensado en su contexto, entendiendo las relaciones que se presentan entre el sujeto y objeto de investigación, para ello se requiere un reconocimiento claro del fenómeno a estudiar, y se realiza primero una ubicación de las categorías del estudio las cuales tienen una mirada amplia desde diferentes disciplinas, pero para este caso particular se ubica desde la matemática.

Existen diferentes orientaciones teóricas que permiten realizar una ubicación del objeto, las cuales se identifican también en investigaciones abordadas en diferentes escenarios, las cuales dan mayor claridad a la hora de ubicar los referentes del estudio, que para la categoría de argumentación y razonamiento se realiza desde las orientaciones teóricas de Perelman y Olbrechts-Tyteca (1958), Duval (1999a), Toulmin (1958), Borwein (2009); así como también Pierce (1974) y Duval (1999b) desde la semiótica, y Polya (1945) Shoenfeld (1985) desde la resolución de problemas, las cuales se presentaron anteriormente en función de las necesidades del estudio.

Estas orientaciones teóricas permiten reconocer el fenómeno de estudio, en el caso de la argumentación se realiza un reconocimiento histórico desde la postura de Perelman y Olbrechts-Tyteca (1958), desde una mirada generalizada y se hace una aproximación a la argumentación matemática llevando a identificar estructuras argumentativas como las planteadas por Toulmin (1958) en un aspecto más general y Duval (1999a) más centrado en la disciplina matemática, donde se identifica que la argumentación se genera desde casos particulares como la resolución de problemas y desde estas actividades matemática es evidente que se presenten razonamientos deductivos o inductivos como lo plantea Borwein (2009). Además, se realiza el abordaje de autores que permiten conocer los pasos para la solución de un problema, en este caso matemático. De esta manera se establecen relaciones a nivel de los fundamentos de autores que permiten una mejor ubicación en el contexto del estudio.

Ahora bien, asumiendo una postura en el campo investigativo desde estas orientaciones teóricas, conceptuales y desde antecedentes, se analiza la realidad que se vive en el contexto de la investigación reconociendo las dificultades presentes en el campo de la matemática desde el razonamiento, argumentación y resolución de problemas, y para esto se establece una relación de interacción entre el sujeto y objeto de investigación, que permita una mayor comprensión del fenómeno desde el acercamiento que se realiza en el contexto natural donde se evidencia.

Fundamentación axiológica

Los fenómenos analizados en el contexto educativo, conlleva a interesarse por las realidades que se viven en el proceso de enseñanza, con los estudiantes, sus situaciones, intereses, preocupaciones, el escenario donde están inmersos, y por ende también la realidad del docente, de esta manera se entiende desde Azuaje y González (2018) que:

> La visión axiológica se refiere a los valores que el investigador asume y los que presentan los sujetos de estudios… como la axiología, la subjetividad y la intersubjetividad permiten conocer y comprender las relaciones humanas y se acepta el modelo heurístico considerando que el conocimiento es el resultado de una espiral dialéctica entre el sujeto, sus intereses, valores, creencias, y el fenómeno de estudio. (P. 255)

Considerando la naturaleza educativa del estudio, la realidad metodológica que se asume es de índole interpretativa en función de permitir un mejor acercamiento al fenómeno de estudio, enmarcadas en las dificultades presentes en el proceso de enseñanza de la disciplina matemática vinculadas al razonamiento, argumentación resolución de problemas descritos como problema de investigación, las cuales, conllevan a estar implicados a los sujetos de estudio en valores y posiciones que interfieren en el proceso de enseñanza y en sus relaciones al interior del aula de clase.

Igualmente, la postura del maestro en la enseñanza es fundamental cuando se desarrollan investigaciones educativas, aportando al análisis su visión como docente desde su quehacer pedagógico enmarcado en el área de las matemáticas, el desarrollo de su práctica su relación con el saber matemático en función del estudiante, aspectos que están mediados por sus orientaciones de formación y el contexto de aplicación de los contenidos impartidos. Frente a esto Barrón (2015) expresa que el desarrollo de la práctica docente

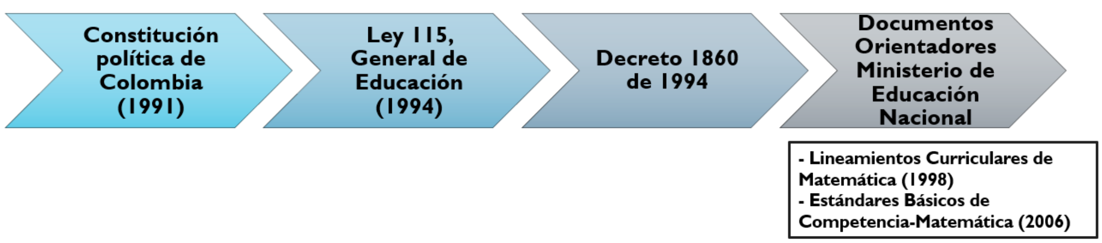
> implica reconocer una serie de factores tanto de índole personal como de los contextos en el que se desarrollan sus prácticas, su historia, la construcción de

> una significación subjetiva, el valor social y su orientación ética. La acción humana implica incertidumbre porque es compleja y está contextualizada en un sin fin de interrelaciones. Pero la acción supone no sólo conocimientos, sino motivos para actuar, es decir, intencionalidad y proyectos, y estos en la práctica educativa son fundamentales. (p. 43)

Enmarcado en lo previo, el investigador debe asumir una postura que le permita una comprensión de la realidad, entendiendo que esta puede estar influida por ciertos factores subjetivos y limitada por el contexto donde se desarrolla.

Fundamento legal del estudio

La constitución política de Colombia en su artículo 67 menciona que le corresponde al estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos.



Grafica 5. Fundamentación legal.

De acuerdo a lo establecido en la Constitución se debe promover una educación de calidad, la cual es regulada en por la Ley General de Educación 115 de 1994 la cual otorga autonomía a las instituciones para establecer métodos de enseñanza y organizar las áreas fundamentales que permita atender las exigencias del MEN, como lo expresa en su artículo 77. El trabajo que implica desarrollar la Ley General de Educación incluye la conceptualización de los logros curriculares y de sus indicadores en el área de matemáticas, la cual es un área de formación obligatoria de acuerdo a la Ley.

Así mismo, el decreto 1860 de 1994, en su artículo 33 menciona que la elaboración del currículo es el producto de un conjunto de actividades organizadas y conducentes a la definición y actualización de los criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyan a la formación integral y a la identidad cultural nacional en los establecimientos educativos. Por lo tanto, los establecimientos educativos deberán tener en cuenta los lineamientos que expida el Ministerio de Educación Nacional para el diseño de las estructuras curriculares y los procedimientos para su conformación

De esta manera, ubicados en un contexto de descentralización educativa y ejercicio de la autonomía escolar se puede inferir la diferencia entre el currículo nacional que ofrecía el MEN antes de contar con los lineamientos curriculares en matemática (1998). Pues anteriormente, los programas por áreas señalaban las temáticas, las metodologías recomendadas y las evaluaciones más viables. Ahora los lineamientos buscan incrementar la formación de quienes hacen currículo y de quienes asesoran a las instituciones educativas para que lleven a cabo sus procesos curriculares dentro del Proyecto Educativo Institucional. Deben servir de orientación, pero no reemplazan a los docentes en las decisiones que les corresponde tomar en asuntos como contenidos, metodologías y estrategias para la participación.

De esta manera se cuenta con la base de los lineamientos curriculares, que orientan la formación en el área de matemática, y se entiende como las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el MEN con el apoyo de la comunidad académica educativa para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación en su artículo 23.

En los lineamientos se promueve el desarrollo de competencias matemáticas, reconociendo la importancia de la competencia escrita, es decir el manejo apropiado del lenguaje matemático e interpretación de las representaciones icónicas, así como también la importancia de modelar en matemática, donde se deja claro que para entender un concepto matemático o para resolver un problema es necesario, a partir de la comprensión inicial, realizar alguna representación de las relaciones que tienen que ver con el concepto o con el problema.

Los lineamientos curriculares son una base fundamental para los Estándares de Competencias Básicas (2006), que dan orientación a la manera de abordar las áreas y deben ser abordados por todas las instituciones educativas, y vinculados en su planeación curricular pues deben entenderse como unos referentes comunes, ~~pues~~ la Ley dispone que es necesario contar con unos indicadores comunes que permitan establecer si los estudiantes y el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas explícitas de calidad, por ello, tanto los lineamientos curriculares como los estándares básicos de competencias se entienden como referentes comunes. Los estándares ubican los criterios claros y públicos que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los niños y las niñas de todas las regiones del país, en todas las áreas que integran el conocimiento escolar. En los estándares básicos de calidad se hace un mayor énfasis en las competencias, sin que con ello se pretenda excluir los contenidos temáticos. La noción actual de competencia abre, por tanto, la posibilidad de que quienes aprenden encuentren el significado en lo que aprenden.

Los estándares están formulados de forma que sea posible orientar a las instituciones educativas a definir los planes de estudio por área y por grado, buscando el desarrollo de las competencias en el tiempo. De allí que es fundamental abordar los estándares de competencia en matemáticas, donde se entiende que las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.

Luego ser matemáticamente competente requiere formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, donde es necesario, analizar la situación, formular modelos y representarlos en distintos registros (leguaje matemático), esto requiere el manejo de conceptos, procedimiento y el lenguaje de esta ciencia, dicha actividad también integra el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas. Luego es necesario usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración. De esta manera es evidente el desarrollo de competencias matemáticas en el proceso formativo.

Teniendo en cuenta estos referentes comunes, de conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, el Ministerio de Educación Nacional, mediante la Ley 115 en su artículo 80, con el fin de velar por la calidad, por el cumplimiento de los fines de la educación y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos, establece un Sistema Nacional de Evaluación de la Educación que opere en coordinación con el Servicio Nacional de Pruebas del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES, y con las entidades territoriales y sea base para el establecimiento de programas de mejoramiento del servicio público educativo. En dicho proceso de evaluación desarrollado por el ICFES se evalúan competencias, de esta forma, en el área de matemática se definen 3 competencias que recogen los elementos centrales de los procesos que se describen en los estándares básicos de competencias: Interpretación y representación, formulación y ejecución, razonamiento y argumentación.

Así mismo, los documentos institucionales como el PEI, planes de área y planes de aula, que regulan el proceso de formación institucional en las diferentes áreas, deben mostrar coherencia con la directriz nacional y sus documentos de referencia comunes, orientando así a una formación centrada en competencias, que para el caso de matemática corresponde a Interpretación y representación, Formulación y ejecución, Argumentación.

Matriz de categorías

De acuerdo a las orientaciones teóricas que ayudan a comprender el objeto de estudio se realiza una ubicación de categorías base:

Cuadro 1. Categorías teóricas deductivas correspondientes a la argumentación

Categoría general	Categorías específicas	
Razonamiento, Argumentación y resolución de problemas **Perelman & Tyteca (1958)** **Toulmin (1958)** **Duval (1999a, 199b)** **Borwein (2009).**	Razonamiento	El razonamiento matemático es una capacidad asociada al pensamiento, que contribuye en el aprendizaje de las matemáticas. Si el razonamiento no es desarrollado, entonces las matemáticas se convierten en una cuestión de seguir un conjunto de procedimientos e imitar ejemplos sin reflexionar acerca de por qué tienen sentido. Los argumentos, la conjetura, la demostración, la explicación y la justificación, son aspectos relacionados con el razonamiento y resulta complicado hablar sobre uno de ellos sin hacer referencia a uno o varios de los otros.
	Pasaje de razonamiento en una argumentación	*Premisa:* proposiciones iniciales para la producción de argumentos *Término medio:* proposiciones que hacen uso de un marco teórico preliminar *Conclusión:* respuesta derivada coherente a la trama argumentativa desarrollada El *razonamiento matemático* es un proceso que involucra el desarrollo del pensamiento o argumentos, pues permite obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas.
	Razonamiento deductivo	Es un proceso de razonamiento en el que la conclusión se desprende de premisas presentadas, por lo que la conclusión no puede ser falsa si las premisas son verdaderas.
	Razonamiento inductivo	Es una forma de razonamiento en el que la conclusión, aunque cuente con el apoyo de las premisas no se deduce a partir de ellas sino de la ejemplificación.
	Argumentación matemática	está compuesta de un cuerpo teórico propio de la disciplina matemática, requiere de la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación

		entre proposiciones, que sea de naturaleza deductiva y no solo de naturaleza semántica.
	Validez de un argumento	Para Duval (1999) un argumento se acepta o se rechaza respecto a dos criterios: su pertinencia y su fuerza. 1. Pertinencia: Hace en relación a los respectivos contenidos de la afirmación y del argumento que lo justifica (relacionado con el contenido semántico del enunciado) 2. Fuerza: Esta depende de dos factores, por un lado el hecho que ningún otro argumento se le pueda oponer, que resiste a un contra-argumento o que no tiene replica, y por el otro debe tener un valor epistémico positivo (evidente, necesario, autentico,) y no negativo o neutro (absurdo, posible, plausible,…)”
	Argumentación retórica	No hace referencia a una disciplina en particular y su cuerpo semántico no corresponde al saber epistemológico propio de una ciencia, por lo tanto, no es válido este tipo de argumentación en el área matemática.
	Resolución de problemas	La resolución de problemas propicia la construcción de conocimientos en un proceso que implica analizar, reflexionar y descubrir estrategias para resolver problemas concretos y reales, de manera creativa. El esquema para la resolución de problemas consta de 4 fases como lo son: comprensión del problema, diseño del plan, puesta en práctica del plan, examinar la solución. De esta manera, las situaciones problema son una estrategia en la que se debe fundamentar la enseñanza de la matemática y donde se hace evidente el razonamiento, la argumentación y el uso del lenguaje matemático.

Nota. Elaboración propia, desde el análisis de las posturas teóricas (2022).

Cuadro 2. Desde la semiótica o lenguaje matemático

Teniendo en cuenta que el lenguaje es un factor que impacta tanto en el desarrollo del razonamiento como de la argumentación, se aborda:

Categoría general	**Categorías específicas**	
Semiótica lógica **Semiótica Pierce (1989)** **Registros semióticos Duval (1999)** **La forma de representar o significar un objeto (real o abstracto)**	Signo representación más cercana a un objeto (por ejemplo, un argumento)	Icono: Posee el carácter que lo vuelve significativo, aun cuando su objeto no tuviera existencia.
		Índice: perdería al instante el carácter que hace de él un signo si su objeto fuera suprimido.
		Símbolo: Perdería el carácter que hace de él un signo si no hubiera interpretante.
	Transformación	Conversión Tratamiento
	Registros de representación	Registro de la lengua natural Registro gráfico Registro algebraico

Nota. Elaboración propia, desde el análisis de las posturas teóricas (2022).

CAPITULO III

MARCO METODOLOGICO

Paradigma de investigación

Teniendo en cuenta que el objeto de estudio de la presente investigación, está centrado en el razonamiento y la argumentación matemática, abordada desde los planteamientos teóricos establecidos por Perelman y Tyteca (1958), Toulmin (1958) y Duval (1999a), que busca generar constructos teóricos sobre el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos, se puede apreciar una realidad abstracta y cambiante que depende del escenario donde se desarrolla, por lo tanto, la presente investigación se fundamenta desde el paradigma *interpretativo* que de acuerdo a Lincoln y Guba (1985), se entiende como aquel donde,

> La naturaleza de las realidades es múltiple, holística y construida. Esto implica la renuncia del ideal positivista de la predicción y del control. El objetivo de la investigación pasaría a ser la comprensión de los fenómenos […] el informe tiene la forma de estudios de caso, no se trata de un informe de carácter técnico, esto significa que ha de recoger, entre otros aspectos una descripción completa del contexto […] las interpretaciones se llevan a cabo remitiéndose a la particularidad del caso analizado y dependen del contexto concreto (pp.228 - 229).

Luego se busca desde la investigación la comprensión de fenómenos que depende del contexto concreto y las relaciones que se establecen entre el investigador y los informantes, haciendo necesario que el investigador proceda a interpretar la producción de argumentos a partir del razonamiento matemático en la resolución de problemas contextualizados, que emergen en el aula por parte del estudiante, además de las concepciones y practica del docente que permiten el desarrollo del razonamiento y argumentación, con el fin de tener un mayor conocimiento del objeto de estudio y lograr identificar las fortalezas y debilidades presentes en el aula, buscando así aportar constructos teóricos de los procesos implícitos del razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos.

De esta manera, en la investigación se aborda una postura cualitativa, que de acuerdo con Taylor y Bogdan (1987) se entiende que "el enfoque cualitativo se refiere a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas" además, el investigador cualitativo busca "una comprensión detallada de las perspectivas de otras personas" (p. 20). Luego es claro que esta investigación tiene un carácter inductivo que permite obtener los datos directamente del contexto natural, en este caso de estudiantes y docentes quienes son los sujetos implicados en este proceso y desde los cuales se puede comprender este problema objeto de estudio, porque es el docente quien promueve los escenarios que permiten el desarrollo del razonamiento y la argumentación en el aula y es el estudiante el que al enfrentarse a problemas matemáticos demuestra el dominio disciplinar, la aplicación del área en la realidad y por ende el desarrollo del razonamiento y la argumentación.

Método de investigación

Para el desarrollo del estudio se acude a métodos hermenéuticos, según Martínez (2006) "estos son los métodos que usa, consciente o inconscientemente, todo investigador y en todo momento, ya que la mente humana es, por su propia naturaleza, interpretativa, es decir, hermenéutica: trata de observar algo y buscarle significado" (p.32). La Hermenéutica facilita la comprensión de acciones en el contexto, por lo cual se propone entre sus objetivos científicos descubrir las ilustraciones del mundo para el sujeto, haciendo énfasis en el individuo y su experiencia subjetiva. También permite el descubrimiento de la estructura de los significados a través del análisis de manifestaciones orales o escritas.

Luego la interpretación es una forma natural del ser humano que nos permite comprender y explicar las realidades en las cuales estamos inmersos, reconociendo el papel particular que juega cada sujeto pero no de manera aislada sino a partir de las interacciones que este tiene en el contexto donde se visualiza el problema objeto de estudio, porque por ejemplo en el escenario educativo el razonamiento y la argumentación no se da por si sola en el estudiante, sino que depende del contexto donde circula un saber pedagógico y disciplinar con una intención formativa, el cual llega al estudiante por medio del docente quien se encarga de construir escenarios, momentos pedagógicos o estrategias que acerquen al estudiante a desarrollar un proceso de razonamiento y argumentativo, valido y coherente desde el saber matemático.

De esta manera se acude a dos métodos que permiten el acercamiento a esta realidad, lo cuales son el interaccionismo simbólico y teoría fundamentada.

Interaccionismo simbólico

Desde los postulados teóricos de Blumer (1982), los seres humanos están dotados de capacidad de pensamiento, la capacidad de pensamiento está modelada por la interacción social, en la interacción social las personas aprenden los significados y los símbolos que les permiten ejercer su capacidad de pensamiento distintivamente humana, las personas son capaces de modificar o alterar los significados y los símbolos que usan en la acción y la interacción sobre la base de su interpretación, las personas pueden introducir modificaciones y alteraciones por su capacidad para interactuar consigo mismas, lo que les permite examinar los posibles cursos de acción y valorar sus ventajas y desventajas relativas para elegir uno y finalmente las pautas entretejidas de acción e interacción constituyen los grupos y las sociedades.

Es así como desde la necesidad del abordaje al objeto de estudio se establece relación con este método, retomando dos premisas de Blumer (1982), la primera corresponde a que “el ser humano orienta sus actos hacia las cosas en función de lo que estas significan para él” (p.2), es decir a los objetos que pueden ser físicos, sociales o abstractos, como el conocimiento matemático que se aborda en este estudio, el cual es producto de la interacción simbólica, luego debe entenderse que la naturaleza de un objeto consiste en el significado que éste encierra para la persona que como tal lo considera y un mismo objeto puede tener distintos significados para diferentes individuos, por ello que resulta importante la interacción que se genera en el escenario educativo donde se plantean momentos pedagógicos en el aula que pretenden desarrollar el significado que se asigna a los objetos en las diferentes disciplinas a partir de la relación maestro-estudiante-contexto dándole sentido al saber matemático y reconociendo los diferentes puntos de vista desde la posición de estudiantes, permitiendo así una construcción colectiva orientada por el docente en pro de alcanzar un aprendizaje significativo.

La segunda premisa es que “el significado de estas cosas se deriva o surge como consecuencia de la interacción social que cada cual mantiene con el prójimo” (Blumer, 1982, p.2), como mencionaba anteriormente, en la práctica educativa la interacción juega un papel fundamental en la construcción del significado que se le asigna a los objetos, donde se establece no solo la relación maestro-estudiante, sino también estudiante-estudiante, porque el trabajo en equipo que se desarrolla por parte de los estudiantes les permite discutir las diferentes situaciones o actividades planteadas buscando consolidar o lograr una mayor apropiación del conocimiento, y para el caso de este estudio fortalecer las competencias matemáticas, específicamente el razonamiento y la argumentación.

En esta interacción es esencial la planeación del maestro, construcción de estrategias, recursos y contextualización que le permita ejercer una mejor comunicación en el aula a partir del reconocimiento de la realidad de los estudiantes, donde no solo lo acerque a una conceptualización teórica sino práctica de la matemática para que así reconozca la utilidad que tiene la disciplina en su contexto y promueva el desarrollo de competencias.

De acuerdo a Blumer (1982) el interaccionismo simbólico es realista, "remite al mundo los problemas, realiza los estudios en su seno y extrae sus interpretaciones de esos estudios naturalistas" (p. 35) de esta manera se realiza un estudio mediante la exploración e inspección de las realidades, retomando los datos del medio, encontrando relaciones entre las categorías de los datos, formulando proposiciones y contrastando con un esquema teórico, además, frente a esta postura se reconoce que para que un estudio sea científico no necesariamente tiene que estructurarse bajo un protocolo preestablecido de investigación como el de las ciencias experimentales, es decir, que no es la investigación la que se ajusta a una estructura metodológica sino al contrario, esta se adapta a las necesidades de la realidad que está siendo investigada.

Relación del método con el objeto de investigación	
Momento 1. Actuación del sujeto con base a los significados que estos tienen para ellos.	Fase preliminar. se centra en una revisión bibliográfica desde el análisis de diferentes investigaciones y posturas teóricas relacionadas con el objeto de investigación, donde se reconoce que el conocimiento matemático abordado en este estudio, es producto de la interacción simbólica, luego debe entenderse que la naturaleza de un objeto consiste en el significado que éste encierra para la persona que como tal lo considera y un mismo objeto puede tener distintos significados para diferentes individuos
Momento 2 y 3.	Desde el segundo y tercer objeto de investigación, se reconoce la importancia de la interacción que se genera en el escenario

El significado surge en la interacción social.	educativo, donde se desarrolla el significado que se asigna a los objetos a partir de la relación maestro-estudiante-contexto dándole sentido al saber matemático e identificando los diferentes puntos de vista desde la posición de estudiantes y maestros. Luego, se busca interpretar las concepciones del estudiante de razonamiento, argumentación, problemas matemáticos, además de identificar fortalezas y debilidades presentes, desde los razonamientos aplicados, el uso del lenguaje y construcción de argumentos, y en el docente se busca interpretar su concepción frente al razonamiento y la argumentación, y como desde su práctica se realiza el abordaje disciplinar para la enseñanza de la matemática, y se promueven estrategias que permitan fortalecer competencias.
Momento 4. Los significados se modifican a partir del constante proceso de interpretación	Desde el análisis de los sujetos de investigación, se realiza una exploración e inspección de las realidades, retomando los datos del medio, encontrando relaciones entre las categorías de los datos, formulando proposiciones y contrastando con el marco referencial.

Teoría fundamentada

De acuerdo a Strauss y Corbin (2016) esta metodología recibió una gran influencia de interaccionistas y pragmatistas, inspirado en autores como Dewey (1938), Mead (1982), y Blumer (1982), donde se reconoce la importancia de salir al campo y reconocer las realidades, por ello buscaban una teoría centrada en los datos y en que los sujetos son actores importantes que asumen un papel activo frente a situaciones problema, esto debido a la interacción. Buscando así que la teoría que se deriva de los datos se parezca más a la realidad, generando nuevo conocimiento y comprensión de los fenómenos. Para esto se reconocen tres fases importantes tales como la descripción, la organización conceptual y la teoría.

La descripción, es una manera de comunicarse donde se expresa lo que sucede a partir de un lenguaje descriptivo y se incorpora conceptos de manera implícita, siendo esta la clave de interpretaciones abstractas de los datos y base para la teorización. Esto resulta fundamental en todo estudio cualitativo, luego esta investigación centrada en dos actores principales, tanto estudiantes como docentes, busca acercarse a la realidad para a partir de la interacción entre investigador y sujetos de estudio, realizando una descripción de elementos que permitan comprender el problema objeto de investigación.

El ordenamiento conceptual se deriva de la descripción, y corresponde a organizar los datos en categorías o clasificarlos de acuerdo a sus propiedades, esto con el fin de encontrarle sentido a los datos, además permite estructurar los datos o establecer relaciones entre los conceptos encontrados al realizar comparaciones entre ellos, desde características similares o diferentes, siendo esto una fase importante para la teorización. Para el caso del estudio se debe tener presente que se cuenta con dos actores, luego se debe clasificar de manera clara las acciones de estos en el proceso investigativo, que permitan encontrar en un proceso de comparación y contrastación de los datos, los puntos en común y diferencias presentes que lleven a una mejor comprensión del objeto de estudio y por ende sirvan de base en el proceso de aproximación teórica.

La teorización de acuerdo a Strauss y Corbin (2016), “es un trabajo que implica no sólo concebir o intuir ideas (conceptos), sino también formularlos en un esquema lógico, sistemático y explicativo” (p. 32), luego posterior a establecer categorías bien definidas se deben establecer relaciones que muestren una organización clara y sistemática entre ellas, las cuales explican el fenómeno objeto de investigación, esto requiere del investigador un gran esfuerzo en el proceso de microanálisis que se debe realizar durante el estudio. Allí se realiza la codificación selectiva con el fin de refinar las categorías y elaborar un discurso que forme el marco teórico de la investigación.

Esto muestra como los hallazgos pasan de un ordenamiento conceptual a convertirse en teoría que aporta a un campo de conocimiento.

Debe aclararse que las teorías tienen ciertas propiedades, algunas son más abstractas requiriendo de un proceso de conceptualización y reducción mayor, otro aspecto es el alcance, a mayor generalidad mayor es la dificultad que se maneja a nivel disciplinario y también se pueden clasificar entre teorías formales y sustantivas, entendiendo que las formales son más amplias y las sustantivas son más específicas.

Este proceso requiere de una codificación que se realiza durante la investigación, especialmente durante la codificación abierta y axial, donde de acuerdo a los datos, y las interacciones del investigador con el contexto y los sujetos de estudio se desarrolla un sentido analítico, se interpreta la información recolectada a nivel documental, de entrevistas y demás técnicas aplicadas, se toma conceptos In vivo que surgen de los datos, a su vez se detiene y toma una distancia prudente para conceptualizar, clasificar y realizar comparaciones teóricas para identificar variaciones en su investigación y tomar bien el rumbo. En este proceso se refina e integra las categorías para convertirlas en teoría.

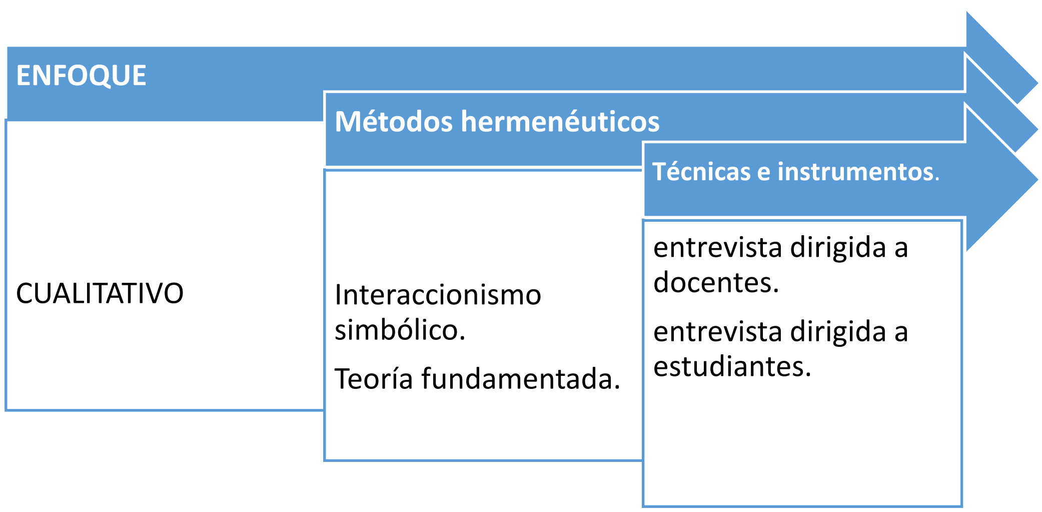


Gráfico 6. Diseño de investigación. Elaboración propia (2022).

Momentos de la investigación

Los aspectos a nivel metodológico desde métodos hermenéuticos como se mencionó anteriormente, son fundamentales pues como se describió estos se adaptan o relacionan con la naturaleza del objeto de estudio, permitiendo un abordaje y aplicación en los diferentes momentos de la investigación que buscan responder a las necesidades y objetivos del estudio:

Momento 1. Fase preliminar. Esta se centra en una revisión bibliográfica desde el análisis de diferentes investigaciones y posturas teóricas relacionadas con el objeto de investigación, lo que permite profundizar en el reconocimiento del campo de estudio y la identificación de categorías generales que dan claridad a la necesidad del abordaje de actores (estudiantes y docentes) que se asumen en el presente estudio, además, son base también para la elaboración de instrumentos y definen pautas para la interpretación de datos.

Momento 2. Inmersión en el escenario objeto de investigación, y ubicación de sujetos participantes (estudiantes y docentes) claves que permitan responder al primer objetivo específico planteado, con el fin de diagnosticar los procesos implícitos en el razonamiento y la argumentación. Desde los estudiantes se busca interpretar las concepciones del estudiante de razonamiento, argumentación, problemas matemáticos, además de identificar fortalezas y debilidades presentes, desde los razonamientos aplicados, el uso del lenguaje y construcción de argumentos, y en el docente se busca interpretar su concepción frente al razonamiento y la argumentación, y como desde su práctica se realiza el abordaje disciplinar para la enseñanza de la matemática, y se promueven estrategias que permitan fortalecer competencias. Esto permitirá comprender el discurso que circula en los docentes frente a la enseñanza de la disciplina identificando aspectos claves ya sea a nivel de debilidades o fortalezas bajo la cual se asume la orientación de esta ciencia en el contexto donde se desarrolla el estudio.

Momento 3. En este momento se busca responder al segundo objetivo de investigación, es decir, reflexionar sobre los aspectos que engloba el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos.

Momento 4. Finalmente se busca triangular el momento dos y tres descritos anteriormente, confrontar la visión del maestro y del estudiante, con el fin de encontrar aspectos claves en común o no que permitan develar constructos teóricos de los procesos implícitos del razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas.

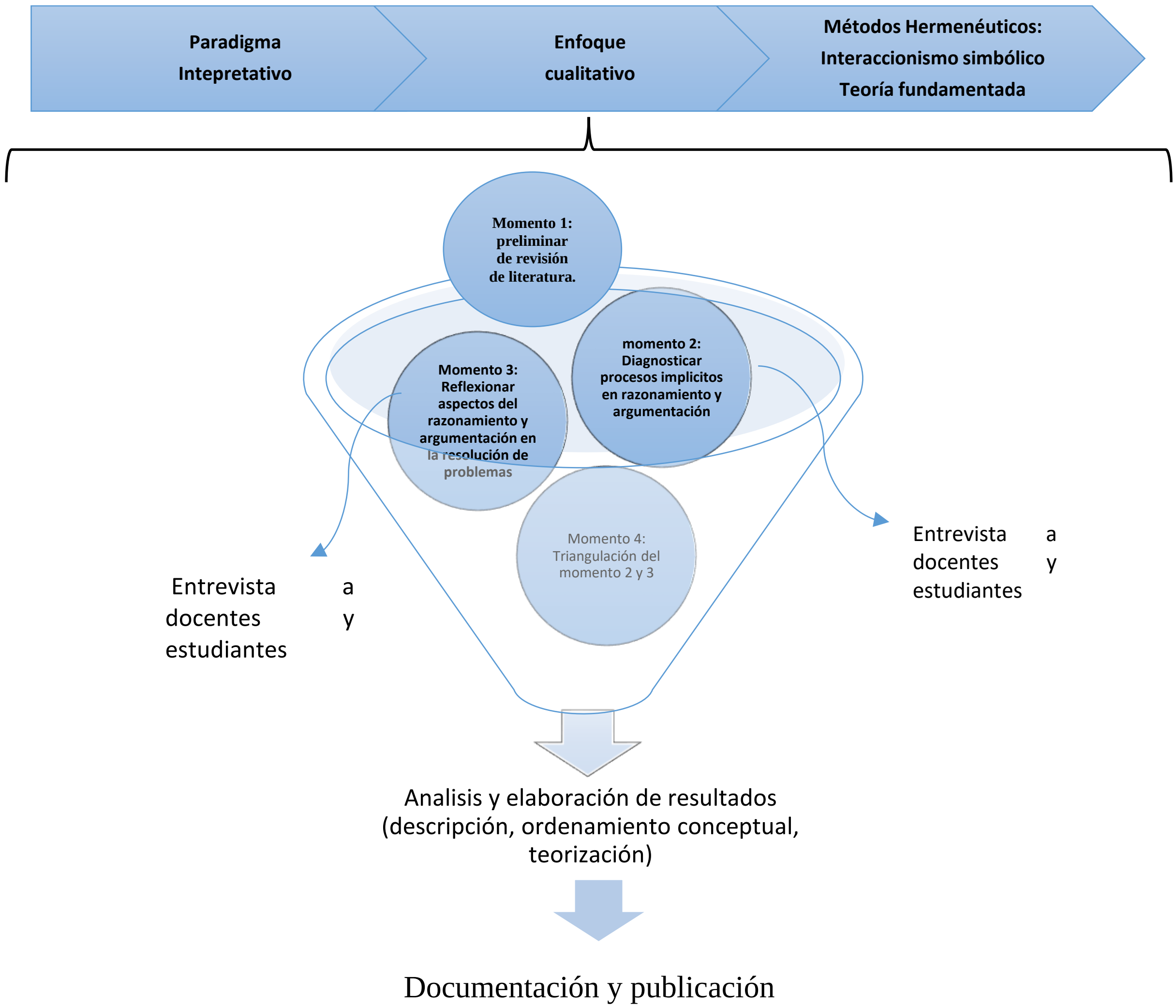


Gráfico 7. Momentos de la investigación. Elaboración propia (2022).

Sujetos participantes

Para el presente estudio se establece en coherencia con los objetivos de investigación la selección o ubicación de informantes claves, tales como docentes y estudiantes que aportan de manera significativa al desarrollo del estudio, los cuales forman parte de la Institución Educativa Colegio San José, ubicado en la ciudad de

Cúcuta, la cual es de carácter público, ubicado en la comuna 6, estrato socioeconómico 2, y además este contexto educativo evidencia bajos niveles en el rendimiento académico del área tanto de pruebas internas como externas.

Criterios de selección de los sujetos participantes

En correspondencia a los objetivos específicos, para dar respuesta al primero y segundo, se realiza la selección de estudiantes que forman parte de la investigación, para ello se ubican 6 estudiantes, que se identificaran en el estudio como E1, E2, E3, E4, E5, y E6 a quienes se les invita a participar en el estudio mediante consentimiento informado, para la aplicación de la entrevista que permita determinar el desarrollo del razonamiento y argumentación en los estudiantes.

Debe aclararse que esta selección se realiza de manera intencional por facilidad de acceso a informantes claves, dichos estudiantes se encuentran cursando grado decimo y se tiene en cuenta para la selección que presentan variedad en su desempeño académico general, pues se reconoce en el escenario educativo que aunque a nivel formativo todos han abordado los mismos aprendizajes, no todos presentan los mismos desempeños en el aula, aspecto que debe tenerse en cuenta en todo proceso de planeación docente. De esta manera se seleccionan para el estudio 2 estudiantes con desempeño alto en el área (E1 y E2), dos con desempeño básico (E4 y E5) y dos con desempeño bajo (E3 y E6), esto teniendo en cuenta que a nivel general en la institución los desempeños de los estudiantes se encuentran divididos en estos grupos según su rendimiento.

Así mismo se cuenta con la participación de los cuatro docentes del área de matemática de la institución educativa, que se identificaran en el estudio como DM1, DM2, DM3 y DM4, con el fin de identificar en ellos las concepciones que se tienen sobre razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos.

Técnicas e instrumentos

Para el desarrollo del estudio y en coherencia con los objetivos de investigación se aplican las siguientes técnicas, que permiten la recolección de datos necesarios.

Para el primer y segundo objetivo de investigación se utiliza para la recolección de datos la técnica de entrevista semiestructurada, y como instrumento el guion de preguntas, dada la opción metodológica seleccionada de Teoría Fundamentada, no se puede establecer predeterminadamente la estructura de dicha entrevista debido a que esta corresponde a las necesidades surgidas en los focos de estudio y es desde ellos que dicho guion se plantea como ruta de la investigadora para orientar el proceso de la entrevista.

Primero, se realiza mediante la entrevista el acercamiento al maestro para determinar su postura frente al desarrollo del razonamiento y la argumentación matemática en el aula, y los procesos implícitos, esto desde su concepción, practica, estrategias, abordaje de problemas trigonométricos, uso del lenguaje y contextualización.

Segundo, se aplica entrevista a los estudiantes, donde se permite identificar sus concepciones frente a razonamiento, argumentación, resolución de problemas trigonométricos y simbología matemática, además desde el acompañamiento en una situación problema se busca evidenciar el razonamiento y la producción de argumentos matemáticos desde el campo conceptual de trigonometría, esta situación permite que el estudiante desarrolle un proceso de argumentación escrita y en dialogo con el maestro desde preguntas semiestructuradas que guían este proceso, esto con el fin de comprender la estructura de la argumentación matemática e identificar fortalezas y debilidades desde los procesos implícitos tanto en el razonamiento como en la argumentación, no solo desde procedimientos sino donde el estudiante manifiesta el sentido que esto tiene para él en la medida que aborda dicha situación.

De esta forma, se aplica la técnica de entrevista teniendo en cuenta el planteamiento de Guber (2001), quien manifiesta que la entrevista es una estrategia para que la gente hable de lo que sabe, piensa y cree, luego la entrevista es un intercambio discursivo, una relación social, de manera que los datos que provee el entrevistado son la realidad que este construye con el entrevistador y en ocasiones se recurre a chequeos, triangulaciones o informantes más confiables. Por ello frente a la aplicación de esta técnica, se pasará posteriormente a contrastar con la postura del estudiante.

Además, la entrevista fue asumida desde el enfoque sujeto-sujeto, tomando como referencia Taylor y Bogdan (1987), quienes afirma que “las entrevistas siguen un modelo de conversación entre iguales y no de un intercambio formal de preguntas y respuestas” (p.101), como una interacción verbal que permite la obtención de discursos entre sujetos.

Los instrumentos mencionados son sometidos a una prueba de evaluación y validación por juicio de expertos. En el caso de validación por expertos se recomienda mediante la técnica del juicio de experto, que consiste entregarle a un número impar de expertos un ejemplar de los instrumentos acompañada de los objetivos de la investigación. Allí dos expertos disciplinares y posteriormente el tutor del proyecto revisan la pertinencia y suficiencia de los instrumentos para la información requerida en esta investigación.

Criterios de rigurosidad en la Investigación

Para este apartado, se toman algunos autores como Lincoln y Guba (1985), quien establece como criterios de rigurosidad para la investigación cualitativa, la credibilidad o valor de la verdad, entendida como la confianza en los hallazgos y su aplicabilidad, pues para el caso del estudio se espera que los hallazgos particulares del contexto sirvan como base para el análisis en otros escenarios, además se tiene en cuenta la consistencia y neutralidad, pues el grado de indagación de los hallazgos está determinado por los sujetos investigados, en este caso los docentes y estudiantes, y no por los sesgos, motivaciones e intereses del investigador.

Además, se aplica también la saturación de datos en el proceso de recolección de información tanto desde los estudiantes como desde los docentes, y así mismo se busca contrastar la postura de los dos sujetos que forman parte de la investigación.

Análisis de la Información

Acorde al método de investigación se realizó el proceso de análisis de información, que exige una revisión constante de los datos para la producción de hallazgos del estudio, además se nutre de técnicas, que permiten responder a los objetivos de investigación y comprender el objeto de estudio.

De esta manera se recurre al microanálisis de datos, que de acuerdo a Strauss y Corbin (2016), se refiere a un “detallado análisis, línea por línea, necesario al comienzo de un estudio para generar categorías iniciales (con sus propiedades y dimensiones) y para sugerir las relaciones entre ellas; combinación entre codificación abierta y axial” (p. 63). Este análisis no es rígido, es más bien creativo y exige examinar los datos de manera cuidadosa, donde juega un papel importante la interacción que tiene el lugar entre los datos y el investigador, pues el investigador reacciona de manera activa con los datos y trabaja con ellos, donde su experiencia y conocimiento le permite ver y reconocer los conceptos emergentes. De esta manera, hacer microanálisis obliga al investigador a escuchar bien lo que los entrevistados están diciendo y como lo están diciendo.

Una vez establecido el tipo y diseño de la investigación, así como el contexto, los informantes y los criterios de rigurosidad que proporcionan la confianza en los hallazgos, es necesario establecer los momentos básicos de la acción, con el propósito de sistematizar la información a través de las etapas que dicta el método seleccionado, tal como lo menciona Martínez (2006):

Etapa de categorización. En esta etapa, posterior a las transcripciones se busca reducir en unidades manejables los datos, asignando categorías o clases significativas, que permitan clasificar y codificar la información para ir integrando y reintegrando el todo y las partes, orientado a la comprensión del objeto de estudio. En este espacio debe aclararse que se cuenta con unas categorías teóricas abordadas desde el razonamiento, argumentación y resolución de problemas, las cuales se describieron en el marco teórico, además se construirán las categorías inductivas que emergen desde el microanálisis que se realiza al material de las entrevistas con el fin de ir reduciendo información, es decir que se identifican primero las unidades de análisis, desde las cuales se realiza la categorización.

Entonces, en el proceso de microanálisis se realiza categorización, la cual se entiende como clasificación o conceptualización mediante una expresión breve que corresponde a una unidad de análisis, de esta manera se realiza reducción de información partiendo de la elaboración de categorías inductivas o abiertas que emergen del texto , las cuales se agrupan en categorías axiales para una elaboración más abstracta, lo que permite ir estructurando los datos para llevarlos a un nivel más alto de abstracción donde se ubica la categoría central que permite agrupar las otras categorías.

Etapa de estructuración. En esta etapa se realiza el proceso de integración de categorías menores en categorías más generales o axiales. De esta manera, resulta fundamental la construcción de graficas o redes semánticas que permita integrar y relacionar categorías de forma simultánea, orientadas a identificar los procesos implícitos del razonamiento y la argumentación matemática en la educación media.

Etapa de contrastación. Esta etapa permite relacionar y contrastar los resultados propios del estudio que se está desarrollando con otras investigaciones que se presentaron en el marco referencial, luego se podrá comparar y contraponer las conclusiones de estudio con las de otros investigadores, igualmente rigurosos, sistemáticos y críticos, para de esta manera poder identificar posibles diferencias, y realizar una integración mayor enriqueciendo el cuerpo de conocimientos del área estudiada, para este caso, desde el razonamiento y la argumentación matemática.

Etapa de teorización. Esta etapa está centrada en percibir, comparar, contrastar, añadir, ordenar, establecer nexos y relaciones; es decir, que el proceso cognoscitivo de la teorización consiste en descubrir categorías y las relaciones entre ellas para lograr la síntesis final del trabajo de investigación integrando en un todo coherente y lógico los resultados del estudio, en este caso el constructo teórico sobre el razonamiento y la argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media.

CAPÍTULO IV

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se exponen los resultados de investigación, inicialmente se interpreta la entrevista aplicada a 4 docentes de matemática, y posteriormente a 6 estudiantes de grado décimo del Colegio San José, estas entrevistas se recolectaron de manera presencial grabando audios en cada encuentro los cuales sirvieron de apoyo para el análisis y el cumplimiento de los dos primeros objetivos específicos de la presente investigación, centrados en diagnosticar y reflexionar sobre procesos implícitos en el razonamiento y la argumentación, para ello se realiza el procesamiento de los datos en el programa Atlas.ti 6.0, por medio del cual se realizan las fases de categorización y estructuración de la información, como lo plantea Martínez (2006), el cual permite generar redes semánticas de relaciones de categorías.

Además, se tuvo en cuenta para la presentación de la información la codificación de los informantes claves de la siguiente manera:

Cuadro 3. Codificación de los informantes clave

Tipo de informante	Código
Docente de matemática de la Institución Educativa	DM1
Docente de matemática de la Institución Educativa	DM2
Docente de matemática de la Institución Educativa	DM3
Docente de matemática de la Institución Educativa	DM4
Estudiante de la Institución Educativa	E1
Estudiante de la Institución Educativa	E2
Estudiante de la Institución Educativa	E3
Estudiante de la Institución Educativa	E4
Estudiante de la Institución Educativa	E5
Estudiante de la Institución Educativa	E6

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

Posterior a la aplicación de las entrevistas, el proceso de análisis de información se orientó teniendo en cuenta los siguientes pasos:

- Se realizó transcripción de las entrevistas desde los archivos de audio, en formato digital de extensión .doc
- Se depuraron los textos, es decir se eliminaron los signos y símbolos que pudieron anexarse en el proceso de transcripción. (es decir que se realizo nuevamente lectura de los textos para corregir errores de transcripción).
- Conversión de los documentos a la extensión denominada texto sin formato (txt) para hacerlos compatibles con el programa Atlas.ti 6.0 usado en la sistematización de datos.

Ya con la información en el programa Atlas.ti 6.0 se inició con la codificación abierta en correspondencia con el sustento metodológico Strauss y Corbin (2016), Martínez (2006), en el cual se detalló lo manifestado por los participantes para interpretar su significado y precisar conceptos emergentes, que fueron agrupados de acuerdo a su relación en categorías axiales, las cuales dieron lugar a dimensiones generales.

Posteriormente, bajo la misma dinámica inductiva propia de la codificación axial, las relaciones y similitudes entre las categorías, apreciadas en cada dimensión permitieron establecer el fundamento relativo a las subcategorías, las cuales derivaron en el surgimiento de las siguientes categorías: enseñanza de la matemática, razonamiento, argumentación, resolución de problemas trigonométricos, relación conocimiento-contexto-resolución de problemas, como conceptos de primer orden del sistema emergente estructurado.

En atención a lo planteado, se tiene la codificación axial obtenida:

Análisis de entrevista aplicada a docentes.

Categoria general : Concepciones sobre la enseñanza

Se parte de las concepciones del maestro desde el área que orienta, por lo tanto, primero se identifican los elementos que considera esenciales en el proceso de enseñanza de la matemática de manera general.

Subcategoria: enseñanza de la matematica

La enseñanza de la matemática es fundamental en cualquier grado de formación, y ha sido objeto de investigación en busca de comprender y ser fuente de apoyo para solventar las dificultades que durante años se han hecho visibles en el esecenario educativo, por ello es importante reconconocerla desde el aula, como es abordada por el maestro, quien en función de las necesidades de su contexto es el que orienta este proceso formativo.

De esta manera resulta fundamental tener en cuenta las concepciones de los maestros, es decir, como concibe cada uno de ellos esta enseñanza desde el desarrollo de su propia practica docente, con el fin de realizar la interpretación a partir de la sistematización de la entrevistas que permite visualizar los siguientes hallazgos:

Cuadro 4. Categorización asociada a los hallazgos de enseñanza de la matemática.

Categorías inductivas	Recurrencias	Categoría axial	Categoría general
Manejo de conceptos y presaberes	17	Enseñanza de la matemática	Concepciones sobre la enseñanza.
Contextualización	14		
Relación de la matemática con la realidad	23		
Apropiación del conocimiento	8		
Planeación de área	4		
Vinculación de recursos didácticos	2		

Condiciones físicas favorables	1
Actitud del estudiante	5

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

Con respecto a la subcategoría sobre enseñanza de la matemática resulta fundamental mencionar que es común entre los docentes tener presente el "manejo de conceptos y presaberes", donde se evidencian 17 recurrencias, esto le facilita al estudiante la "apropiación del conocimiento", partiendo de lo que el estudiante ya sabe se abordan nuevas temáticas que permitan establecer relación con la realidad en la que está inmerso el estudiante buscando así un aprendizaje significativo, tal como lo señala el docente DM1: "*Es importante tener en cuenta para el proceso de enseñanza, aprendizaje dentro del aula, la parte de los conceptos, los pre-saberes definidos. Si esos conocimientos preliminares tenerlos claro y saberlos relacionar primero en el saber hacer".*

De esta forma, se resalta otra de las categorías inductivas de gran relevancia como lo es la "contextualización", con 14 recurrencias, donde es necesario el manejo de conceptos y presaberes que permiten mirar cómo se aplica la matemática desde diferentes áreas, además esto permite, como lo mencionan los docentes, establecer una "relación de la matemática con la realidad", en la cual se evidencian 23 recurrencias, frente a esto el docente DM2 menciona que *"se debe contextualizar la parte teórica a lo que ellos conocen, lo que ellos ven diariamente y así mismo en la parte de la planeación en donde nosotros organizamos dependiendo de la capacidad del estudiante".* Así mismo, lo menciona el MEN (2006), la contextualización permite construir sentido y significado para las actividades y contenidos matemáticos estableciendo conexiones con la cotidianidad.

Desde la relevancia de la contextualización, Flotts, Manzi, Barrios, Saldaña, Mejías, & Abarzúa, (2016), mencionan que "el docente debería contextualizar los contenidos mediante problemas reales, relacionando la matemática de la forma más natural posible con situaciones significativas" (p. 27), luego, en la medida que el estudiante no solo realiza procedimientos matemáticos, sino que ve la aplicación de la disciplina en el escenario donde se encuentra inmerso o en otras disciplinas, puede darse la apropiación del conocimiento matemático pues se reconoce la importancia que este tiene, así se va fortaleciendo el conjunto de presaberes que el estudiante requiere en la medida que va avanzando en su proceso formativo, y por ende también se influye en la “actitud del estudiante” (5 recurrencias) cuando este puede darle sentido a lo que aprende.

También se mencionan elementos importantes en la enseñanza, como lo es la “planeación del área” (4 recurrencias), donde se debe tener en cuenta los contenidos y la forma en como estos se desarrollan en los momentos pedagógicos, “vinculación de recursos didácticos” (2 recurrencias), una orientación a preguntas, y así mismo se mencionan elementos externos a la planeación que intervienen en la enseñanza, y que corresponde a las “condiciones físicas favorables” (1 recurrencia), porque cuando se presentan condiciones favorables para el aprendizaje se hace evidente la participación del estudiante y una “actitud” positiva para aprender.

Así mismo, se presenta la siguiente red semántica que permite visualizar la estructuración y relación de categorías.

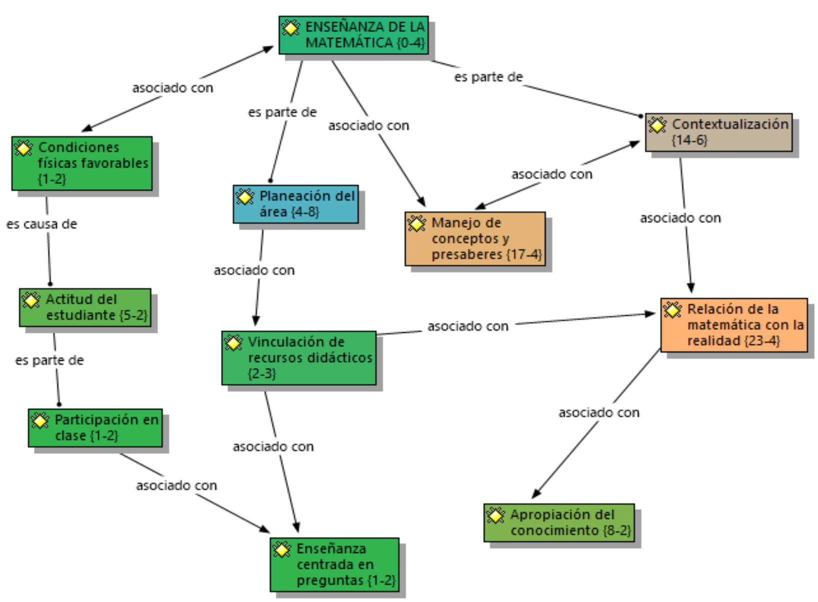


Gráfico 8. Concepción del maestro frente a la enseñanza de la matemática.

Categoría general: Concepciones de razonamiento y argumentación

El razonamiento y la argumentación son fundamentales en el proceso de enseñanza de la matemática, por ende, se logró identificar aspectos relevantes en el discurso de los docentes como se muestra a continuación:

Cuadro 5. Categorización asociada a los hallazgos de concepciones de razonamiento y argumentación matemática.

Categorías inductivas	Recurrencias	Categoría axial	Categoría general
Capacidad de pensar matemáticamente	2	Razonamiento	Concepciones de razonamiento y argumentación.
Razonamiento visto como análisis de situaciones	2		
Razonamiento visto como un resultado o respuesta	2		
Desarrollo del pensamiento lógico	2		
Manejo de procedimientos	10		
Argumentación como demostración y comprobación	2	Argumentación	
Argumentación vista como explicación	5		
Argumentación vista como resultado	5		
Uso de lenguaje matemático	5		
Manejo de procedimientos	10		
Manejo de conceptos y presaberes	16		

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

Subcategoría: Razonamiento

Con respecto a la concepción de *razonamiento*, mencionan los maestros que se encuentra asociado a la capacidad de "pensar matemáticamente" (2 recurrencias) de manera lógica, donde se visualizan habilidades como leer, pensar, observar, interpretar y comprender, que está asociado al "análisis de situaciones" (2 recurrencias) desde las cuales se busca llegar a una respuesta o conclusión y para ello se requiere un "manejo de procedimientos" (10 recurrencias) adecuado, y esto a su vez está asociado con la argumentación, que corresponde desde la postura del maestro a dar explicaciones de esos procesos y procedimientos planteados ante la solución de problemas, de esta manera el razonamiento matemático permite generar argumentos válidos. Frente a esto los docentes DM2 y DM4, menciona que:

> *DM2: "el razonamiento está asociado al pensamiento lógico, es el análisis de las situaciones que nos presentan a nosotros, es como yo desde un problema puedo abarcar diferentes temas y puedo dar un resultado es muy importante analizar que me están preguntando, como me lo están preguntando, bajo que contexto yo estoy trabajando"*

> *DM4: "el razonamiento está relacionado con el pensamiento lógico del estudiante, y ellos solo quieren desarrollar lo práctico y realizar solamente ejercicios de manera repetitiva, de esta forma es muy difícil ver la argumentación porque que puede explicar o justificar un estudiante si solo se está centrando en el desarrollo de ejercicios"*

Frente a esto, el MEN (2006) menciona que el razonamiento hace referencia a hacer predicciones y conjeturas, justificar, dar explicaciones, proponer interpretaciones y respuestas posibles con argumentos y razones, donde las cadenas argumentativas pueden validarse, y además las situaciones de aprendizaje deben propiciar el razonamiento lógico inductivo o deductivo.

Luego se evidencia claridad a nivel conceptual, aunque de manera generalizada, mostrando también que en los estudiantes se evidencia dificultad para argumentar, puesto que lo que más se les facilita es lo práctico y sencillo, es decir, ejercicios repetitivos que no generan aprendizaje significativo y por ende esto lleva a una clara dificultad para apropiar conceptos porque no se aprecia la aplicabilidad que tiene la matemática en la vida cotidiana, dejando ver una visión mecanicista de la matemática.

Centrarse en una visión mecanicista genera dificultades en el proceso de enseñanza, no genera interés en los estudiantes pues no le dan sentido a lo que aprenden, porque no pueden relacionar los contenidos con la realidad, pues se simplificaría la matemática al manejo de procedimientos e imitación de ejemplos que no permite la construcción del conocimiento matemático, por ello es importante promover en el aula el razonamiento con el fin de potenciar habilidades en los estudiantes. Frente a esto Bernardino y Cercado (2010), mencionan que los estudiantes "poco razonan ante un problema matemático, lo cierto es que están acostumbrados a trabajar los ejercicios de manera mecánica lo que impide el desarrollo total de sus capacidades intelectuales y el progreso de un aprendizaje duradero". (p.82)

Subcategoría: Argumentación

Se aprecia desde la conceptualización de *argumentación* que está relacionada o es "vista como explicación" (5 recurrencias), "es vista como resultado" (5 recurrencias), "vista como demostración y comprobación" (2 recurrencias), además que requiere del "uso de lenguaje matemático" (5 recurrencias) y "manejo de procedimientos" (10 recurrencias), que permiten construir la argumentación, como lo menciona el docente DM3: *"Argumentar es explicar a través de procesos o procedimientos un resultado",* es decir que debe existir un manejo por parte del estudiante de conceptos matemáticos, que los pueda aplicar en situaciones problema donde se visualicen procedimientos que muestren argumentos válidos y para este desarrollo resulta esencial una adecuada comunicación, es decir, un adecuado uso del lenguaje de la disciplina.

Así mismo, el docente DM1 referencia que *"para que mi estudiante pueda argumentar matemáticamente algo que está produciendo o que estamos construyendo dentro del aula debo llevarlo a confrontar los pre-saberes cierto, con el nuevo conocimiento que estamos tratando de consolidar",* donde también es evidente manejo de conceptos matemáticos y su aplicación en el contexto, aproximándose al concepto de comprobar y demostrar, pero desde el contraste con la realidad.

De esta manera, se establece relación con lo que menciona el ICFES (2019), donde la argumentación matemática se asume como aquella que:

> *Se relaciona con los procesos de razonamiento y comunicación, con la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en diversas situaciones, siempre justificando por qué o cómo se llegó a estas, a través de ejemplos y contraejemplos, o señalando y reflexionando sobre inconsistencias presentes. (p. 29).*

De esta manera, es importante tener presente que para que el estudiante sea matemáticamente competente es fundamental promover en el aula diferentes procesos que favorezcan el aprendizaje, entre ellos el razonamiento, comunicación (uso del lenguaje), resolución de problemas, modelación y a su vez la argumentación.

Luego el docente debe proponer estrategias que permitan promover estos procesos, articulando el conocimiento matemático con la realidad del estudiante, desde una mirada no mecanicista, con el fin de lograr que el aprendizaje sea significativo, buscando reducir las dificultades que generalmente se presentan en el área, como lo mencionan Salazar, Contreras y Jaimes (2016), "la no contextualización en el campo de las matemáticas, el aprendizaje mecánico y no significativo, la no apropiación del lenguaje matemático y los errores conceptuales, están dificultando los procesos de argumentación matemática de situaciones problemas" (p.12)

Así mismo, se presenta la siguiente red semántica que permite visualizar la estructuración y relación de categorías, sobre las concepciones de razonamiento y argumentación:

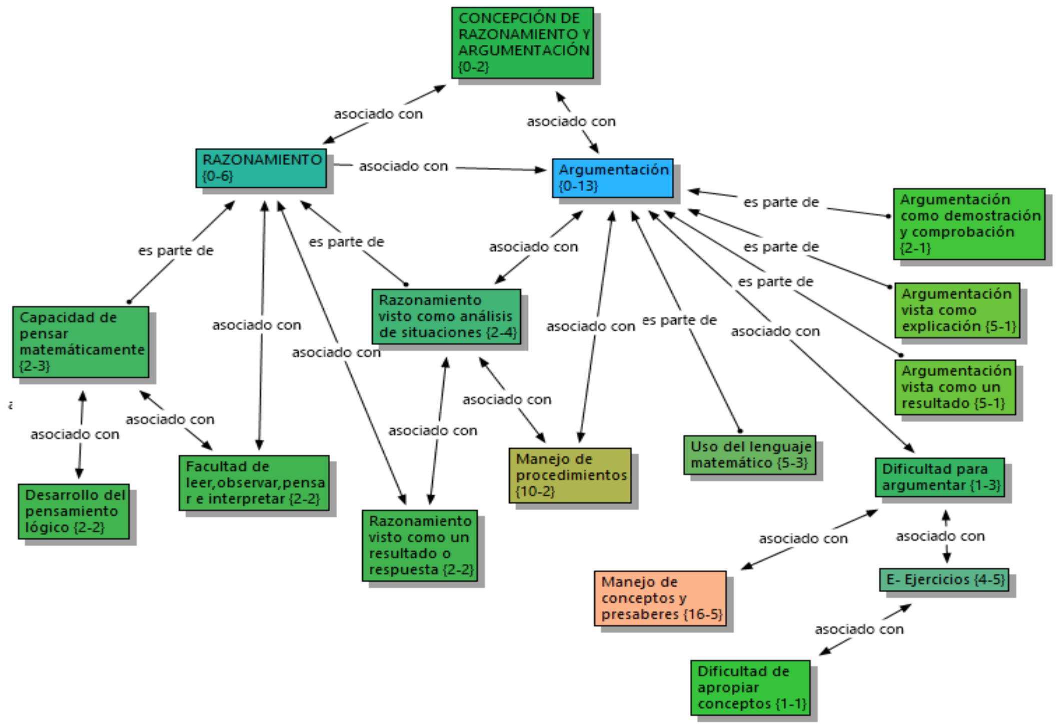


Gráfico 9. Concepción del maestro frente al razonamiento y argumentación matemática.

Categoría general: Estrategias, competencias y procesos asociados al razonamiento y la argumentación

A continuación, se muestra otra categoría emergente de los hallazgos, donde se evidencia en el discurso de los maestros estrategias, competencias, y procesos que permiten promover el razonamiento y la argumentación matemática en el escenario educativo.

Cuadro 6. Categorización asociada a los hallazgos de estrategias, competencias y procesos asociados al razonamiento y argumentación matemática.

Categorías inductivas	Recurrencias	Categoría axial	Categoría general
Situaciones problema	18		
Método de Polya	1		

Contextualización	14	Estrategias de enseñanza	Estrategias, competencias y procesos asociados al razonamiento y la argumentación
Lúdica	2		
Ejercicios	4		
Uso de redes sociales	2		
Plataformas digitales	1		
Relación de la matemática con la realidad	23		
Manejo de conceptos y presaberes	17		
Apropiación del conocimiento	8		
Interpretativa	4	Competencias matemáticas	
Modelación	2		
Comunicativa	8		
Uso del lenguaje matemático	9		
Manejo de procedimientos	12		
Competencia digital	1		
Interacción con el contexto	1		
Abstracción	3	Procesos matemáticos	
Imaginación	1		
Intuición	1		
Observación	3		
Razonamiento deductivo	2		
Razonamiento inductivo	4		

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

Subcategoría: Estrategias de enseñanza

Frente al proceso de enseñanza, los maestros mencionan desde la subcategoría de “estrategias”, con mayor incidencia el uso de “situaciones problema” con 18 recurrencias, entendida esta estrategia como aquella que permite la “contextualización” logrando establecer “relación de la matemática con la realidad”, donde se evidencian también 23 recurrencias. Dada la importancia de implementar la estrategia de situaciones problema en el aula, DM3 menciona que:

> *Se plantean en el aula situaciones problema que le muestren al estudiante la importancia del contenido matemático para el desenvolvimiento en su vida diaria, también se busca generar interés por el aprendizaje, así a partir de las*

situaciones problemas se espera que el estudiante desarrolle el razonamiento matemático, interprete, reflexione, argumente, vaya más allá de procedimientos matemáticos y vea la utilidad de la matemática.

Esta es la estrategia que se considera de mayor relevancia, pues como lo muestran los docentes a partir de ella se permite la contextualización del conocimiento matemático, donde se requiere que el estudiante tenga un “manejo de conceptos y presaberes” (17 recurrencias) que al contrastar su aplicación con la realidad le permita una “apropiación del conocimiento” (8 recurrencias), además que también evidencian que a partir de ella es posible el desarrollo del razonamiento y la argumentación.

También el docente DM4 hace referencia desde la estrategia de resolución de problemas a un método especifico, el cual es el “método de Polya” (1 recurrencia), donde se espera que el estudiante “interprete, planee, diseñe y ejecute un plan” para la solución del problema, luego se observa que cada docente desde el aula aborda o aplica las situaciones problema de acuerdo a sus conocimientos y necesidades del grupo con el cual se encuentra trabajando.

Así mismo, aunque se lleva un año trabajando en la presencialidad, los maestros mencionan el abordaje realizado desde la virtualidad, donde se mantuvo el desarrollo de los desempeños realizando algunas priorizaciones pero buscando responder a los estándares básicos de competencia, donde precisamente se vincularon estrategias como lo fueron “plataformas digitales” (1 recurrencia), “uso de redes sociales”(2 recurrencias), inclusive se vinculó la actividad “lúdica” (2 recurrencia) que siempre se ha trabajado en la presencialidad y que también dio buenos resultados en la virtualidad, donde el estudiante debía a partir de un juego matemático explicar los conceptos relacionados con él. Aunque se trabajó desde la virtualidad buscando aplicar situaciones problema planteadas por el docente, e incluso actividades donde desde el conocimiento del estudiante este debía desde su contexto del hogar o el barrio plantear problemáticas donde pudiera aplicar conceptos y procedimientos matemáticos que lo aproximen a la utilidad de la disciplina, se hace evidente que no en todos los estudiantes fue posible desarrollar estos procesos, mostrando en algunos de ellos “dificultad en la relación concepto-realidad” (4 recurrencias).

Aunque se da relevancia al uso de situaciones problema desde el discurso del maestro, se encuentra que los estudiantes presentan dificultades en la resolución de los mismos, para ello se requiere un manejo de conceptos y presaberes que se relacionen con la realidad o contexto, y si no se logra la apropiación de conceptos resulta complejo que los pueda aplicar para resolver problemas.

También se encuentran los “ejercicios” (4 recurrencias) como una estrategia de trabajo, esto le permite al estudiante manejar procedimientos, reconocer el uso de símbolos matemáticos de acuerdo a cada tema abordado, pero al ser rutinario no permite una apropiación conceptual, luego debe reconocerse dentro de las estrategias que no debería dejar los problemas matemáticos para el final de la comprensión del tema, sino que a partir de ellos se puede hacer la introducción conceptual.

Subcategoría: competencia matemática

Los docentes mencionan que las competencias y procesos matemáticos deben tenerse en cuenta para el desarrollo del razonamiento y argumentación. Las “competencias” que se evidencian en los discursos son: la competencia “interpretativa” (4 recurrencias), de “modelación” (2 recurrencia), “comunicativa” (8 recurrencias), “interacción con el contexto” (1 recurrencia), “uso del lenguaje matemático” (9 recurrencias), todas ellas le permiten al estudiante ser matemáticamente competente, y se visualizan aplicadas en la resolución de problemas, a partir de razonamientos validos evidenciables desde procesos o “procedimientos matemáticos” (12 recurrencias) que debe desarrollar el estudiante.

Frente a esto el MEN, desde los estándares básicos de competencia matemática (2006), menciona que “las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos” (p.49). Desde esta concepción se entiende que se busca desarrollar el saber-hacer, es decir que el conocimiento disciplinar lo pueda aplicar en diferentes contextos, que sepa hacer uso de conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para comprender su realidad cuando lo requiera.

Así mismo, el ICFES (2019), en el marco de referencia de matemática menciona que en Colombia dentro del proceso estandarizado de evaluación nacional, se valoran las competencias de interpretación y representación; formulación y ejecución; y argumentación, donde además estas competencias matemáticas están relacionadas con los procesos generales propuestos por los Lineamientos Curriculares de Matemática emanados por el MEN (1998), los cuales son comunicación, modelación, razonamiento, planteamiento y resolución de problemas y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Luego la competencia debe estar relacionada con un proceso, un conocimiento matemático y un contexto de actuación.

Subcategoría: Procesos matemático

El desarrollo de las competencias se encuentra asociado a unos procesos referenciados por los docentes, como los son la abstracción (3 recurrencia), la observación (3 recurrencias), la imaginación (1 recurrencia) y la intuición (1 recurrencia), todos ellos permiten el desarrollo de competencias a través de las estrategias que el docente aplica en el aula, permitiendo visualizar o desarrollar "tipos de razonamiento", como lo son el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo, y de acuerdo a los maestros se evidencia con mayor recurrencia que el razonamiento más visible en el aula es el "razonamiento inductivo" (4 recurrencias), como lo menciona DM4:

> *"En matemáticas el razonamiento más empleado es el inductivo, el cual permite llegar a una conclusión, a una solución, a través de la información dada, un ejemplo claro es la resolución de problemas planteado a partir de la información dada desde cualquier paso del método Polya, es decir que va de lo particular desde los datos a una generalidad".*

De igual forma, aunque con menos fuerza, es importante el "razonamiento deductivo" (2 recurrencias), mencionado por el docente DM1:

> *como las matemáticas son bases de estructura, son cimientos para otras disciplinas, definitivamente con mis estrategias, mis programaciones también trabajo el razonamiento deductivo cierto, el pensamiento deductivo .... poder revertir esa estructura de pensamiento y también invitarlo a que él pueda fortalecer la deducción.*

De esta manera el MEN (2006) desde los estándares básicos de competencias matemáticas menciona la importancia de propiciar tanto el razonamiento inductivo como el deductivo, en los primeros grados apoyándose desde situaciones o actividades donde se vincule el contexto y materiales físicos, y en grados más altos, aparte de esto se deben vincular “proposiciones, teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, pero suele apoyarse también intermitentemente en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos” (p.54).

Aunque la aplicación de estrategias, el desarrollo de competencias y procesos es fundamental, para propiciar el razonamiento y la argumentación, se hace evidente que en el área matemática se presentan dificultades, las cuales se visualizan en los resultados académicos de los estudiantes, por ende, es fundamental continuar reforzando desde el proceso de enseñanza.

La siguiente red semántica permite visualizar la estructuración de las categorías descritas anteriormente:

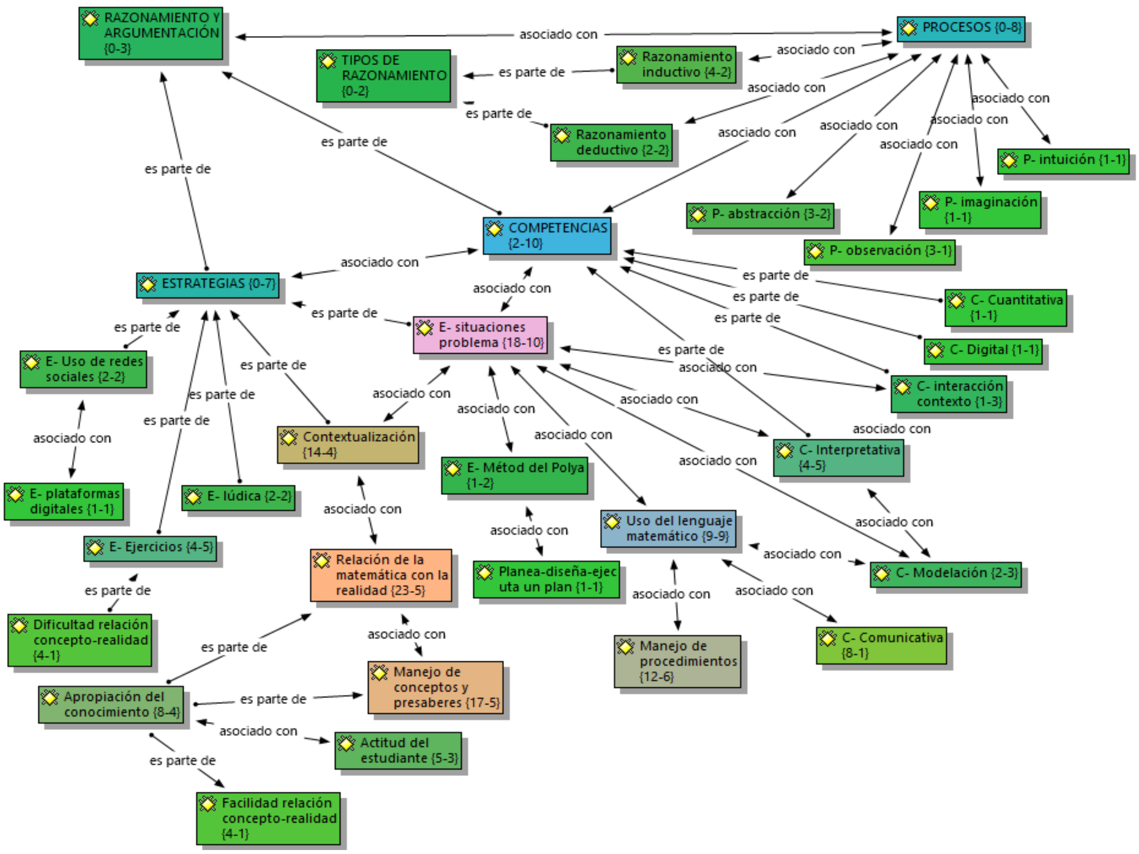


Gráfico 10. Estrategias, competencias y procesos enmarcados en la enseñanza para el desarrollo del razonamiento y argumentación

Categoría general: Relación conocimientos-contexto-resolución de problemas en el razonamiento y argumentación

Desde la importancia de promover el razonamiento y la argumentación, surge la categoría que permite ver la relación conocimiento, contexto y resolución de problemas matemáticos. Desde esta categoría se entiende que es fundamental dentro de los procesos de planeación vincular la resolución de problemas, porque a partir de ellos se establece relación con la realidad y se ve la aplicación del conocimiento matemático, dándole sentido al saber de la disciplina, permitiendo involucrar el razonamiento y la argumentación, como lo plantea la OCDE (2015), donde se menciona que en la competencia matemática, la persona interpreta, plantea, procede, razona y argumenta en función de la resolución de un problema, y trata de involucrar dichos procesos dentro de la cotidianidad en la que está inmerso.

A continuación, se evidencian los hallazgos de esta categoría:

Cuadro 7. Categorización asociada a los hallazgos de la categoría relación conocimientos-contexto-resolución de problemas en el razonamiento y la argumentación

Categorías inductivas	Recurrencias	Categoría axial	Categoría general
Situaciones problema	18	Planeación del área	Relación conocimientos-contexto-resolución de problemas en el razonamiento y argumentación
Contextualización	14		
Manejo de conceptos y presaberes	17		
Relación de la matemática con la realidad	23		
Uso del lenguaje	9		
Manejo de procedimientos	12		
Interpretación	4		
Argumentación	3		
Modelación	2		
Comunicación	8		
Lúdica	2		
Ejercicios	4		
Dificultad de relación concepto realidad	4		
Facilidad de relación concepto realidad	4		

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

Subcategoría: planeación del área.

Los maestros manifiestan la importancia de la triada conocimiento-contexto-resolución de problemas, la cual se evidencia desde la subcategoría "planeación del área" como lo mencionan todos, donde desde dicha planeación, se referencia con mayor fuerza el manejo de "situaciones problema", con 18 recurrencias, pues a partir de ellas se permite "contextualizar", es decir, establecer la "relación de la matemática con la realidad", que muestra 23 recurrencias, y se hace referencia que para llegar a esto es fundamental el "manejo de conceptos y presaberes" (17 recurrencias), lo que permite que se desarrollen competencias y por ende la argumentación.

De acuerdo a esto, se traza desde la planeación de la disciplina matemática propuesta a nivel nacional por el MEN (2006), en los estándares básicos de competencia, que es fundamental:

> *Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas. (p. 51)*

Luego, estos aspectos se hacen evidentes en el discurso del maestro, ellos referencian que el desarrollo de situaciones problema contextualizados debe tenerse presente en la planeación del área, tal como lo estipulan las orientaciones nacionales para la enseñanza de la matemática, porque esto permite que se integre el razonamiento y argumentación, donde se promueven las competencias de interpretación (4), modelación (2) y comunicación (8).

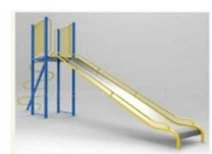
Además, en la resolución de problemas contextualizados se hace evidente el "uso del lenguaje matemático" (9 recurrencias) en los estudiantes a partir del "manejo de procedimientos" (12 recurrencias), desarrollando así la argumentación, la cual es vista en el aula como una forma de explicación, de resultados, de demostración y comprobación. Para que esto sea posible se requiere un buen manejo de conceptos por parte del estudiante que le permita una aplicación de estos en su realidad o contexto, permitiendo de esta manera que se establezca una "facilidad de relación concepto realidad" (4 recurrencias), frente a esto el docente DM4 menciona que:

"Si el estudiante tiene conocimientos claros de conceptos matemáticos, conoce su contexto y lo utiliza para plantear sus propios problemas y resolverlos, entonces va a saber cómo argumentar la solución de los mismos".

Así mismo DM1 menciona que a partir de la resolución de problemas contextualizados se promueve la argumentación:

La argumentación es ese paso indispensable donde el estudiante a través de los conceptos, lenguaje matemático, procesos y procedimientos aprehendidos a partir del razonamiento lógico, en cada una de las temáticas vistas en matemáticas, puede llegar a la solución de problemas, justificando y explicando su resultado.

Desde la práctica del docente DM1 se visualiza lo siguiente:



Experiencia de aula:
Reconociendo problemas matemáticos desde la cotidianidad

Tema Seleccionado
Trigonometria-razones trigonométricas
Importancia del tema y como este se aplica en la vida real
La trigonometria es la rama de las matemáticas que estudia la relación entre los lados y ángulos de los triángulos En la vida diaria se utiliza mucho ya que nos permite medir distancia alturas, ángulos, entre otras cosas, por medio de los triangulos
Situación problema planteada por el estudiante desde su realidad, donde se pueda aplicar el tema:
Calcular el Angulo de elevación y depresión de un resbalador que se encuentra en el parque en frente de mi casa
Explicación / solución del problema aplicando la matemática
Para ello procederemos a hallar las medidas de sus lados Altura: 1,36 m Hipotenusa: 2,17 m Base: 1,80 m SenB=co/h SenB=1,36m/2,17m SenB=0,626 B=Sen^-1(0.626) B=38,75° Teniendo las medidas de 2 ángulos C=90° B=38,75° 90°+38,75°=128,75° A=180°-128,75° A=51.25° R/ la medida del ángulo de elevación es 38.75° y el ángulo de depresión es 51.25°

Imagen 1. Resolución de problemas aplicada desde su realidad.

En la imagen se logra evidenciar desde actividades desarrolladas en la planeación de los docentes la forma en cómo se relaciona el conocimiento-contexto-resolución de problemas, en este caso el estudiante debe identificar una situación desde su contexto, plantear un problema, aplicar conceptos propios de la matemática, realizar procedimientos matemáticos asociados al reconocimiento de los conceptos donde es necesario el manejo de un lenguaje y a partir de allí se identifica el desarrollo de argumentos válidos que permiten llegar a una solución.

Dentro de la planeación de área también se menciona que, aunque no se establece la relación conocimiento-contexto-resolución de problemas, también se ubican a nivel procedimental el manejo de “ejercicios” (4 recurrencias), que al darse un desarrollo de manera mecánica se evidencia “dificultad de relación concepto realidad” (4 recurrencias) pues el estudiante no puede darle sentido a lo que aprende.

La siguiente red semántica permite visualizar la estructuración de las categorías descritas anteriormente:

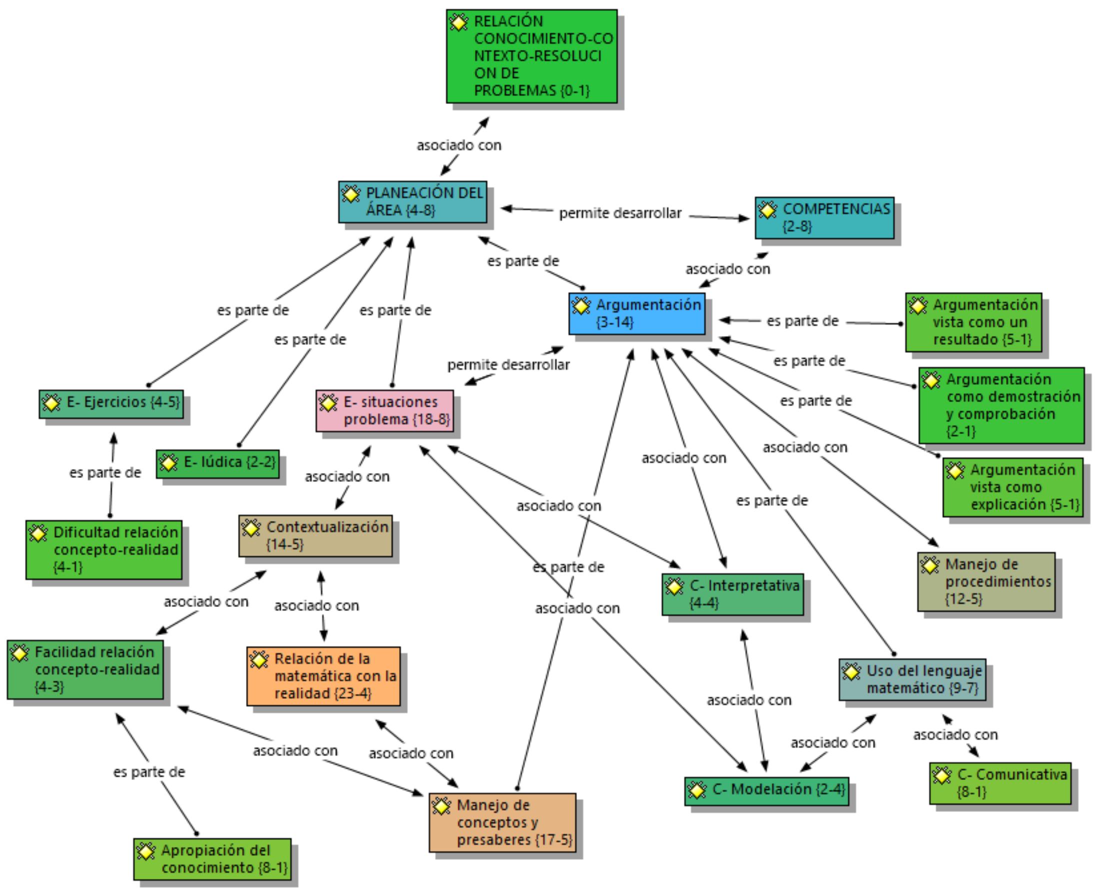


Gráfico 11. Relación conocimientos-contexto-resolución de problemas en el razonamiento y la argumentación.

Categoría general: resolución de problemas trigonométricos frente al desarrollo del razonamiento y la argumentación

Anteriormente se mencionó la importancia de la resolución de problemas en el razonamiento y la argumentación matemática, de allí que surge de manera específica la resolución de problemas trigonométricos, entendiendo que en este campo se encuentra una amplia aplicación con la realidad, la cual fue abordada por los docentes tal como se evidencia en el siguiente cuadro de hallazgos.

Cuadro 8. Categorización asociada a los hallazgos de la resolución de problemas trigonométricos frente al desarrollo del razonamiento y argumentación.

Categorías inductivas	Recurrencias	Categoría axial	Categoría general
Desarrollo del pensamiento lógico	4	Promueve el razonamiento y la argumentación	Resolución de problemas trigonométricos frente al desarrollo del razonamiento y la argumentación.
Amplia relación con el contexto desde la trigonometría	2		
Aplicación con otras disciplinas	4		
Apropiación del conocimiento	8		
Manejo de conceptos en trigonometría	6		
Relación de la matemática con la realidad	23		
Conversión de un lenguaje a otro	3	Lenguaje matemático	
Lenguaje natural	3		
Representación gráfica	4		
Representación algebraica	6		
Competencia comunicativa	8		
Manejo de procedimientos	12		
Vacíos conceptuales	3		

Poco uso del lenguaje matemático	2	Dificultad para argumentar
Manejo de conceptos y presaberes	17	
Falta de motivación	1	
Manejo de procedimientos	12	
Dificultad en el manejo de lenguaje matemático	5	

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

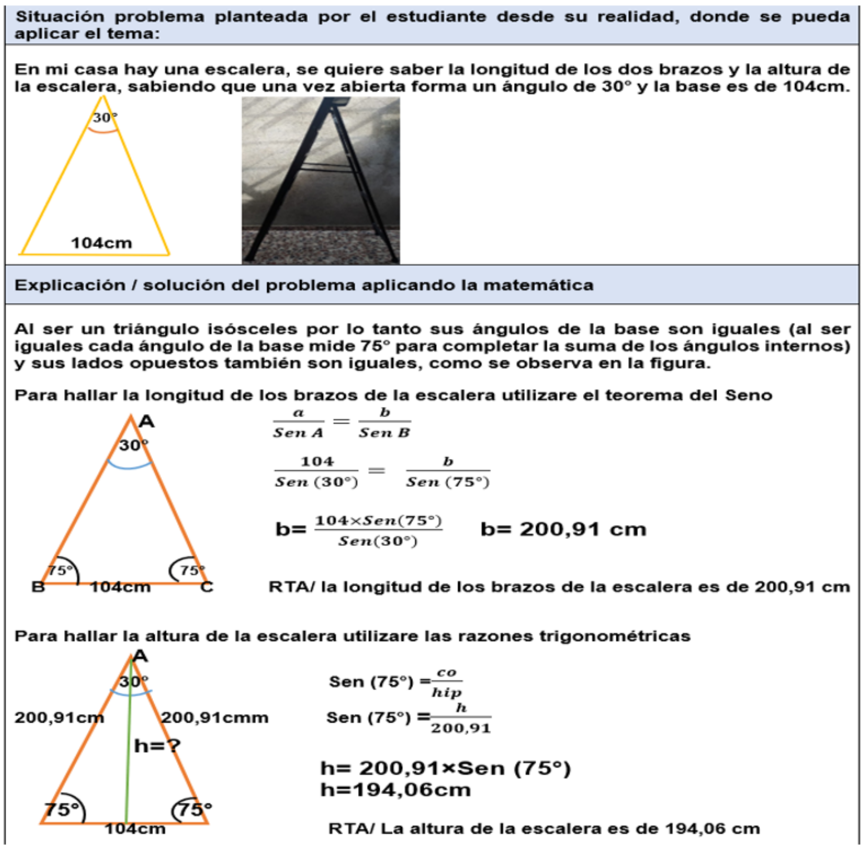
Subcategoría: Promover el razonamiento y la argumentación

Desde el discurso de todos los docentes y su práctica de enseñanza, se puede mencionar que la resolución de problemas trigonométricos permite "promover el razonamiento y la argumentación", a partir de esto se logra el "desarrollo del pensamiento lógico" (4 recurrencias), y se reconoce que desde este campo se establece una "amplia relación con el contexto desde la trigonometría" (2 recurrencias), porque se entiende que es "aplicable a otras disciplinas" (4 recurrencias) y el estudiante fácilmente puede ver la "relación de la matemática con la realidad" como se evidencia con 23 recurrencias, frente a esto el docente DM3 menciona que:

> Los problemas trigonométricos pueden ayudar al estudiante a involucrarse en un espacio, le genera a él inspiración por conocer, indagar e ir más allá de simples contenidos, estamos rodeados de trigonometría sin darnos cuenta, la sombra de un árbol, una escalera recostada a una pared, el despegue de un avión y su proyección, en la mayoría de las situaciones que nos rodean podemos ver la aplicación de la trigonometría.

Ahora es importante reconocer que esto permite promover el razonamiento y la argumentación y el estudiante requiere saber identificar el "manejo de conceptos en trigonometría" como se muestra con 6 recurrencias, donde es necesario para el discente distinguir el concepto de ángulo, triángulo rectángulo, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas y lo debe diferenciar del triángulo oblicuángulo donde debe apropiar el concepto de teorema de seno y coseno. Esto teniendo en cuenta como lo mencionan los docentes que un uso inadecuado de conceptos o "vacíos conceptuales" genera dificultades en el proceso de argumentación.

Desde la práctica del docente DM1, se evidencia como el estudiante aplica los conceptos de triángulo oblicuángulo en una situación que plantea en su hogar, implementando en su solución el teorema de seno desde los datos que el mismo identifica en el contexto del problema.



Situación problema planteada por el estudiante desde su realidad, donde se pueda aplicar el tema:

En mi casa hay una escalera, se quiere saber la longitud de los dos brazos y la altura de la escalera, sabiendo que una vez abierta forma un ángulo de 30° y la base es de 104cm.

Explicación / solución del problema aplicando la matemática

Al ser un triángulo isósceles por lo tanto sus ángulos de la base son iguales (al ser iguales cada ángulo de la base mide 75° para completar la suma de los ángulos internos) y sus lados opuestos también son iguales, como se observa en la figura.

Para hallar la longitud de los brazos de la escalera utilizare el teorema del Seno

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$$

$$\frac{104}{Sen\ (30°)} = \frac{b}{Sen\ (75°)}$$

$$b = \frac{104 \times Sen(75°)}{Sen(30°)} \qquad b = 200{,}91\ cm$$

RTA/ la longitud de los brazos de la escalera es de 200,91 cm

Para hallar la altura de la escalera utilizare las razones trigonométricas

$$Sen\ (75°) = \frac{co}{hip}$$

$$Sen\ (75°) = \frac{h}{200{,}91}$$

$$h = 200{,}91 \times Sen\ (75°)$$

$$h = 194{,}06cm$$

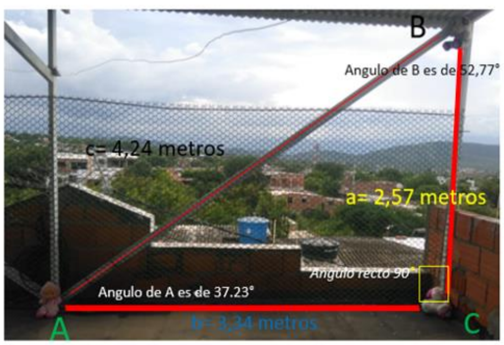
RTA/ La altura de la escalera es de 194,06 cm

Imagen 2. Resolución de problemas trigonométricos aplicado desde su realidad.

Subcategoría: uso del lenguaje matemático

Así mismo se evidencia en el desarrollo de situaciones problema que emerge el "uso del lenguaje matemático", y este es mencionado en el discurso del maestro, donde se rescata la importancia del reconocimiento conceptual, que permite según lo mencionado por los maestros que el estudiante realice "conversión de un lenguaje a otro" (3 recurrencias), que puede presentarse como lo muestra la imagen 2. en un "lenguaje natural", de allí pasa una "representación gráfica" y posteriormente para su solución se evidencia una "representación algebraica", donde está presente el "manejo de procedimientos" (12 recurrencias), esto permite que se genere una secuencia o cadena de argumentos que permiten justificar la solución del problema. Estas categorías asociadas al uso del lenguaje se hacen evidente en todos los maestros, y se identifica que generalmente el uso de este lenguaje que es la forma de comunicación de esta ciencia, presenta dificultades desde el manejo del estudiante, de acuerdo a esto DM4 menciona que:

> hay ciertas dificultades que son evidentes como lo es el manejo de un lenguaje matemático apropiado que le cuesta al estudiante porque no tiene un buen manejo de conceptos matemáticos, de esta manera no se evidencia un buen razonamiento y por ende tampoco un proceso de argumentación adecuada, son pocos los estudiantes que realmente desarrollan problemas matemáticos.



Situación problema planteada por el estudiante desde su realidad, donde se pueda aplicar el tema:

La situación que planteamos es la siguiente: en la terraza de mi casa se forma un triángulo. Donde hay tres muñecos A, B y C. la altura de donde se encuentra el muñeco B es de 2,57m, la base que forma el muñeco A y C es de 3,34m. Hallar

A) Los ángulos internos
B) la distancia del muñeco A al B

Explicación / solución del problema aplicando la matemática

HALLAR LOS ANGULOS:

tan °A= CO/CA
tan ° A= 2,57 m / 3,34m
tan°A= 0,76
A° = tan -1 (0,76)
A= 37,23° Angulo del lado de A

Hallar Angulo de B

Angulo de B = 180°-90°-37,23°
Angulo de B= 52,77°

r/= los ángulos internos son de:

- E l Angulo de A es de 37,23°
- El Angulo de B es de 55,77°

HALLAR LA DISTANCIA ENTRE A Y B

SEN ° = CO/ H
Sen 37,23° = 2,57m / h
H= 2,57m / sen 37,23°
H = 4,24 m

r/= la distancia entre el muñeco A y B es de 4,24 metros

Imagen 3. Resolución de problemas trigonométricos aplicado desde su realidad.

Así mismo desde la práctica del maestro DM1, se evidencia en la imagen 3. como desde el reconocimiento conceptual, en este caso razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, el estudiante plantea la situación problema y su correspondiente solución dándole utilidad o aplicabilidad al conocimiento de su disciplina y generando así una apropiación del conocimiento.

Subcategoría: dificultad para argumentar

Frente a lo descrito por los maestros, también es claro que se presenta dificultad en la resolución de problemas, por ende, en la argumentación, vinculada a falencias en el reconocimiento de conceptos asociados a la realidad del estudiante, errores en el manejo del lenguaje por el "poco uso del mismo" (2 recurrencias), aunque en algunos estudiantes se presenta facilidad no se logra en todos aun aplicando diferentes estrategias en el aula.

Estas dificultades frente al desarrollo del razonamiento y la argumentación son evidentes en diferentes contextos, y dificultan la construcción del conocimiento matemático, la trigonometría es un campo que permite a través de estrategias de aula fortalecer procesos matemáticos, frente a ello Vásquez (2020) menciona que:

> La trigonometría propone un escenario significativo para que los estudiantes construyan argumentos, pero estos no se aplican constantemente en el aula, debido a que los procedimientos geométricos se enfocan en memorizar fórmulas y en las prácticas de las propiedades conocidas por el docente, pero desconocidas y poco aplicables por los estudiantes (p. 110)

por ello es importante la planeación del docente, encaminada a fortalecer procesos formativos que permitan la construcción del conocimiento desde estrategias que permitan una mayor participación del estudiante, generando motivación en su proceso de aprendizaje y por ende mejorando su actitud frente a la matemática.

La siguiente red semántica permite visualizar la estructuración de las categorías descritas anteriormente:

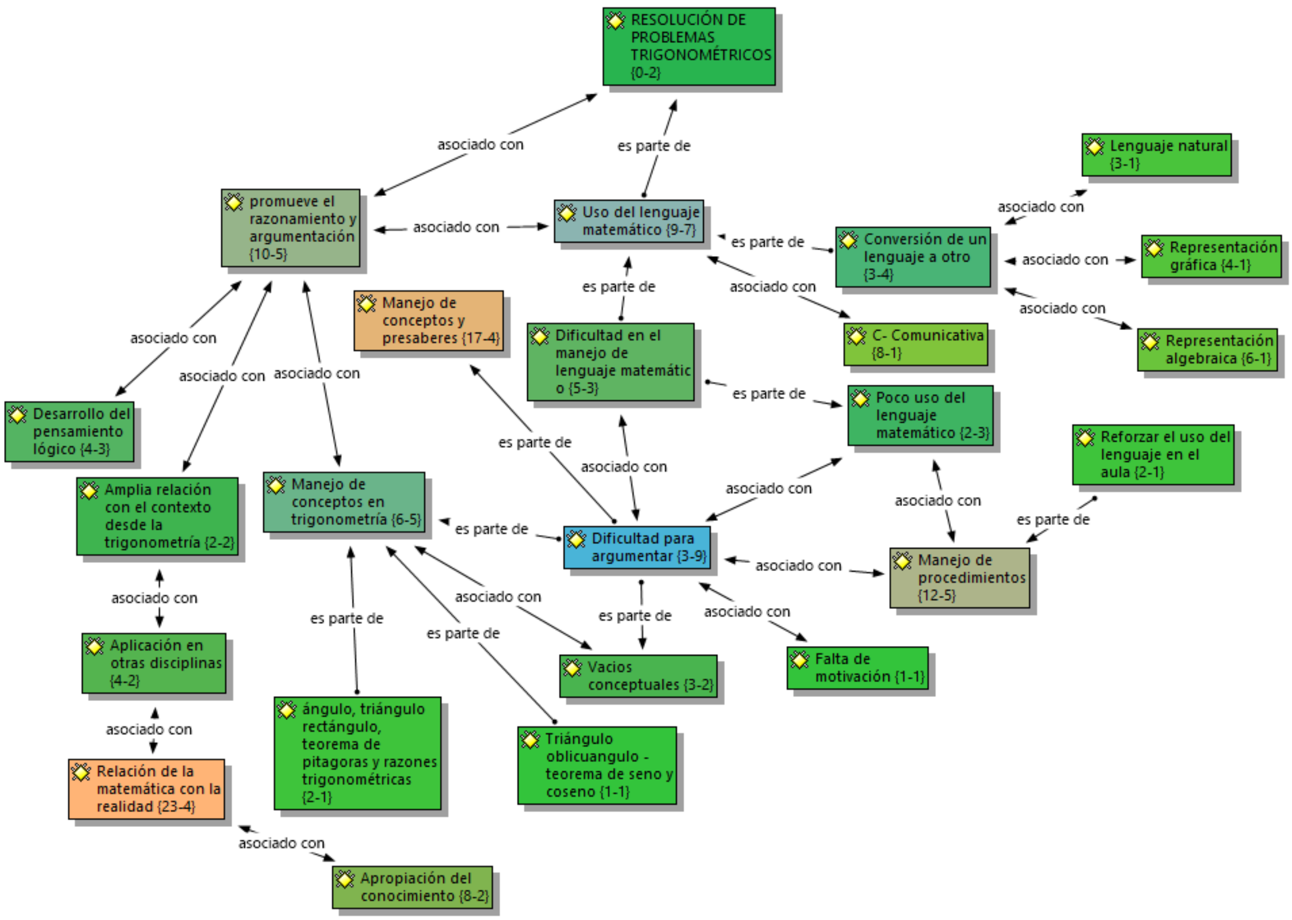


Gráfico 12. Resolución de problemas trigonométricos frente al desarrollo del razonamiento y argumentación.

Análisis de entrevista aplicada a estudiantes

En la enseñanza de la matemática resulta fundamental comprender la forma en que es vista y comprendida esta disciplina por parte de los estudiantes, quienes son actores importantes en el escenario educativo, además es precisamente en la interacción entre docentes y estudiantes que se construye y valida el conocimiento, el cual es aplicable en diferentes contextos.

De esta manera, se realiza el acercamiento al estudiante, donde primero se busca reconocer la importancia que le da a la disciplina, su utilidad y la forma en cómo ve el proceso de enseñanza de la misma, identificando en su discurso conceptos como razonamiento, argumentación, problemas matemáticos asociados a la trigonometría e inclusive lenguaje matemático, se realiza el proceso de categorización a unas preguntas generales y se analiza el desarrollo de una situación problema planteada en la entrevista, que permita evidenciar desde la aplicación del conocimiento matemático del estudiante aspectos relevantes con el objeto de investigación. Vale la pena aclarar que para la participación de los estudiantes se tuvo en cuenta su desempeño académico, dos estudiantes con desempeño alto, dos con desempeño básico y dos con desempeño bajo, desde una participación voluntaria teniendo en cuenta que no todos presentan el mismo rendimiento en esta área.

Categoría general: Enseñanza de la matemática

Es importante reconocer desde la enseñanza de la matemática aspectos asociados a las estrategias que se desarrollan en el aula, la importancia, utilidad de la diciplina y otros elementos que son considerados por los estudiantes en su proceso de aprendizaje, y que es fundamental identificar para la comprensión del objeto de estudio, pues los aspectos que se tienen en cuenta en la enseñanza deben promover el fortalecimiento de procesos matemáticos como razonamiento, argumentación, resolución de problemas, comunicación, que le permitan al estudiante ver la matemática más allá de una visión mecanicista comprendiendo y aplicando el conocimiento en su contexto, frente a esto el MEN desde los lineamientos curriculares en matemática (1998) menciona:

> Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica, sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella.

A continuación, se relacionan los hallazgos correspondientes a esta categoría:

Cuadro 9. Categorización asociada a los hallazgos sobre la categoría de enseñanza de la matemática, desde la postura del estudiante.

Categorías inductivas	Recurrencias	Categoría axial	Categoría general
Situaciones problema	3	Estrategias en el aula de clase	Enseñanza de la matemática
Enseñanza centrada en ejercicios	4		
Enseñanza centrada en preguntas	1		
Participación en clase	2		
Explicación del tema	5		
Uso de videos explicativos	2		
Lenguaje escrito, verbal y gráfico	1		
Uso de talleres	3		
Evaluación del tema	2		
Aplicación en otras disciplinas	8	Importancia y utilidad de la matemática	
Relación de la matemática con la realidad	18		
Amplia relación con el contexto desde la trigonometría	8		
Manejo de conceptos en trigonometría	11		
Influencia de las formas de enseñar	3		
Gusto hacia la matemática	5		

Virtualidad como distractor del aprendizaje	3	Elementos asociados a la enseñanza
Presencialidad favorece el aprendizaje	2	

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

Subcategoría: estrategias en el aula de clase

De esta manera, con relación al trabajo desarrollado en el aula, se ubican las "estrategias en el aula de clases", la cual agrupa unas categorías inductivas, donde se identifica desde el discurso del estudiante las estrategias más usuales, las cuales son, con mayor presencia: la "explicación del tema" con 5 recurrencias y "la enseñanza basada en ejercicios" con 4 recurrencias, como menciona los siguientes estudiantes:

> E5: "pues siempre cuando empezamos de una clase de matemáticas, pues siempre empezamos con los conceptos y las explicaciones, después empezamos a hacer ejercicios como de ejemplos para ir entendiendo mejor el tema, para después destacar en evaluación"

> E6: "En clase lo que más hacemos son ejercicios más que todo".

Los ejercicios pueden resultar necesarios para que el estudiante practique la simbología, realice un reconocimiento del tema, pues así mismo se plantea en los lineamientos curriculares, que el estudiante elabore y ejercite procedimientos, pero no se debe olvidar que también se menciona que se debe dar mayor influencia al manejo de situaciones problemas, y que estás deben ser interesantes, relacionadas con el contexto, para que el estudiante le dé sentido a la matemática, y esto no se debe dejar para el final de una temática sino que debe ser fundamental en todo momento, frente a esto el MEN desde los lineamientos curriculares en matemática (1998) menciona que "la situación problemática se convierte en un microambiente de, aprendizaje que puede provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas y de las otras ciencias", y el manejo de las "situaciones problema" es evidente en el discurso de los estudiantes, se muestra en 3 recurrencias. Al respecto el estudiante E1 menciona:

> Bueno las clases en el aula se desarrollan primero se explica el tema, se pregunta si entendieron si no pues se realizan las dudas, e luego se hacen actividades relacionadas a dicho tema, luego se evalúa y hacemos diferentes problemas matemáticos respecto a la vida cotidiana para así entenderlos mejor.

También resulta recurrente en los estudiantes, que se manejan estrategias como lo son el “uso de talleres” (3 recurrencias) o actividades, y “evaluación del tema” (2 recurrencias), pues generalmente las explicaciones siempre están acompañadas con la ejercitación por medio de actividades que les permita una mayor comprensión del tema que están trabajando para posteriormente realizar la evaluación, como lo menciona E4:

> Pues se llega, se da el tema, se dan conceptos, se explican ejemplos, ejercicios y se van desarrollando dependiendo del tema, si, en unas clases se veían que nos daban videos, pero eso era un video que para uno poder entender el tema donde te guías de todo explicado en el tablero para hacer el taller y después se evalúa.

También se mencionan otras estrategias con menor recurrencia pero que están presentes en el aula, tal como “uso de videos explicativos”(2 recurrencias) que ayuda a fortalecer los temas trabajados, el manejo del “lenguaje escrito, verbal y gráfico”(1 recurrencia) que el docente siempre deja claro cuando se realizan las explicaciones, y representa los conceptos, fórmulas y representaciones gráficas que explican mejor el tema, también es fundamental la “participación en clase” (2 recurrencias), como lo menciona E2:

> en las clases, la participación una estrategia que muchos profesores, eh utilizan, que sin importar que nos equivoquemos o sin importar una nota pasan a la mayoría al frente y pues esos problemas que tienen otros también puede que uno los tenga, entonces al pasar a una persona al frente o hasta uno mismo, uno se da de cuenta que fallo y ahí donde viene esto la intervención del profesor y ahí le dice porque le quedo mal y que debía haber hecho

Luego la participación en el aula es importante, porque no solo le permite al estudiante aclarar dudas, sino acercarse al saber a partir de la interacción con los demás de manera colectiva, así como lo plantea Mejía, Aldana y Ruíz (2017) “La participación activa de los estudiantes dentro y fuera de los salones de clases debe de ser para ellos un momento placentero y espontáneo que genere aprendizajes significativos para la vida” (p.14).

subcategoría: importancia y utilidad de la matemática

Ahora bien, también se destaca como categoría axial la "importancia y utilidad de la matemática", donde se agrupan diferentes categorías, resaltando con mayor recurrencia la "relación de la matemática con la realidad" (18 recurrencias), teniendo en cuenta que fue una pregunta directa a los estudiantes, sobre la importancia que esta tenía en la vida cotidiana, y se menciona que es fundamental está área porque se requiere para todo, aun así los estudiantes mencionan ejemplos muy básicos pero resaltan lo primordial que resulta su aplicación, de esta manera referencian:

> E1: en nuestro entorno se presenta muchísimos objetos en los cuales uno puede aplicar la matemática, la matemática es todo lo que nos rodea, ese análisis que uno hace para solucionar diferentes problemas y en su uso en la vida cotidiana para todo, si uno va a un almacén a comprar diferentes cosas uno tiene que pagar, tiene que hacer las cuentas, tiene que sumar, restar, emplear diferentes operaciones que conllevan la matemática.

> E4: bueno yo pienso que, es muy importante ya que el uso de matemática se necesita para todo, eh para ir a comprar algo, para ir a comprar o cualquier cosa tiene que tener mucha matemática, pero por lo mínimo sumar y restar, si eso.

También es mencionado por los estudiantes que es importante por el hecho de que tienen "aplicación en otras disciplinas" (8 recurrencias), inclusive se menciona que temas de los trabajados en matemática son necesarios para física, geometría, química y otras materias, también se mencionan disciplinas como las ingenierías, así como lo dice E1: "La matemática es todo, incluso se pueden utilizar en diferentes áreas, diferentes disciplinas o para continuar mis estudios todo se relaciona con ello", y E2: "todo lo que tiene que ver con la ingeniería, lleva bases de que tiene que ver con la trigonometría, la matemáticas, otras podría ser, la economía no".

Luego se empieza a identificar la importancia desde problemas trigonométricos, donde se menciona la "amplia relación con el contexto desde la trigonometría" (8 recurrencias), y también se da claridad que para comprender esta aplicación resulta necesario el "Manejo de conceptos en trigonometría" (11 recurrencias), porque si no existe claridad en el manejo de dichos conceptos no puede verse la aplicación en situaciones problema que tienen los mismo por falta de comprensión del tema, de esta manera mencionan:

> E2: primero que todo hay que saber qué tema estamos hablando, podemos hablar de trigonometría entonces para poder dar la solución a un problema tendremos que saber que seno, coseno, tangente… es saber de dónde sale cada cosa.
>
> E5: los conceptos y sus conocimientos son fundamentales para realizar cualquier ejercicio o problema.

Subcategoría: Elementos asociados a la enseñanza

También surge la categoría "elementos asociados a la enseñanza", donde se identificaron categorías inductivas o abiertas como "influencia de las formas de enseñar" (3 recurrencias) donde se menciona que esto puede generar en los estudiantes "gusto hacia la matemática" (5 recurrencias), porque depende de la forma en como el docente desarrolle el tema, y la relación que se establezca en el aula entre docente-estudiante que permite que esta área tenga una mirada más dinámica y se pueda ver con mayor agrado y no con miedo, como menciona E2:

> entonces ahí es donde está la influencia de cada profesor, con sus estrategias a la hora de aplicarlo en un tema es lo que hace que uno ame la matemática, la aprenda y la sepa aplicar en el día a día.

Finalmente, teniendo en cuenta que, aunque se lleva un año de formación presencial, hubo una influencia dada por la pandemia, por ello se logró identificar desde los estudiantes que la "presencialidad favorece el aprendizaje" (2 recurrencias), porque hay mayor comunicación con el docente en el momento de las clases para aclarar dudas, comprender y avanzar en los temas, mientras que se menciona la "Virtualidad como distractor del aprendizaje" (3 recurrencias), porque difícilmente se establecen unos tiempos de estudio, y todo el ambiente del hogar genera distracción, y en ocasiones no se cuenta con los medios para acceder a la información como lo referencian los estudiantes:

> E4: uno aprende más estando aquí que por medio de una pantalla… no nos comprenden. Porque uno acá está aprendiendo. Ya en la casa, que, si alguien me llamó, que llegó la vecina, que uno se distrae fácilmente… la atención que uno le da eso no era igual a la común aquí en el salón.

E5: No es el mismo comparado con el presencial, porque muchas veces los estudiantes no tienen acceso a internet, entonces no pueden entrar a las clases y no pueden entrar a las clases y prestar atención a las clases… es mucho más, mucho más sencillo, aprender matemáticas en presencialidad, ya que tú tienes a la profesora de frente y ella te puede explicar, te puede explicar y explicar vas a entender más rápido.

En los momentos que se trabajó en la virtualidad referencian los estudiantes que también se manejaron las estrategias antes mencionadas, aunque con dificultad de acceso para muchos de ellos, no siempre se podía contar con las explicaciones virtuales, sino solo con guías físicas por lo tanto la comprensión no era igual.

La siguiente red semántica permite visualizar la estructuración de las categorías descritas anteriormente:

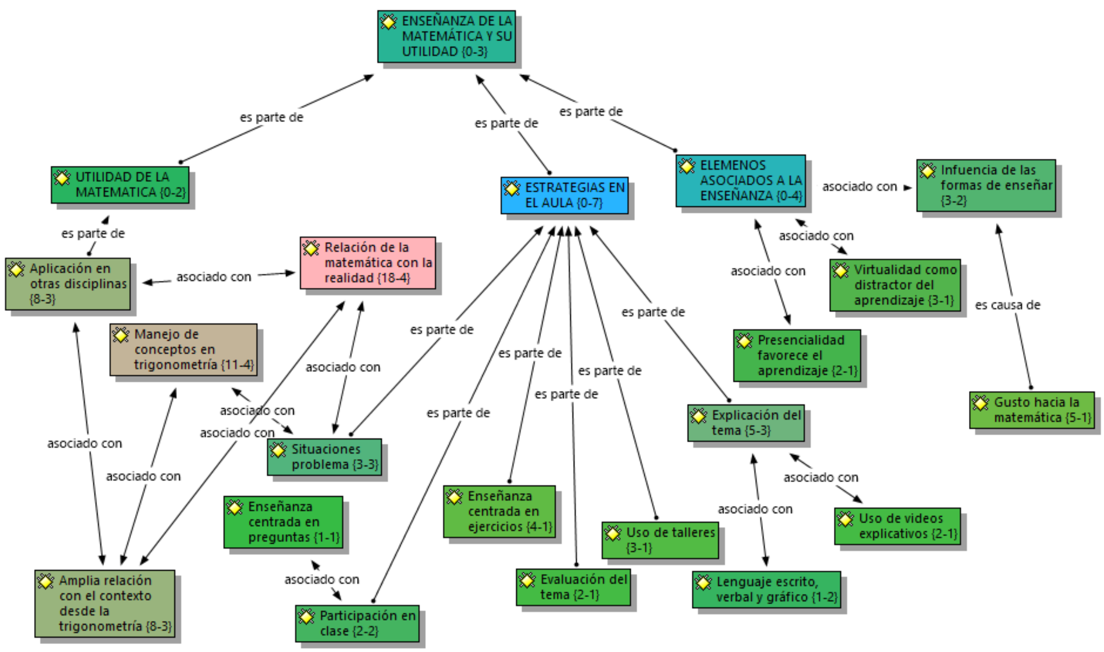


Gráfico 13. Concepción de los estudiantes sobre la Enseñanza de la matemática.

Categoría general: concepciones de razonamiento, argumentación, problema y lenguaje matemático

Es fundamental en el proceso de enseñanza tener en cuenta todos estos elementos, pues los estándares básicos de competencias matemáticas (2006) mencionan que el planteamiento y formulación de problemas desde la cotidianidad y de otras ciencias permite formar modelos mentales, representarlos en diferentes registros, por lo tanto esto requiere un buen manejo de conceptos y de procedimientos matemáticos, y estas actividades integran el razonamiento, puesto que requiere de argumentos que justifiquen el proceso realizado y la validez de las conclusiones. Los Hallazgos a las concepciones del estudiante se evidencian en el siguiente cuadro:

Cuadro 10. Categorización asociada a los hallazgos sobre concepciones de los estudiantes frente a razonamiento, argumentación, problema y lenguaje matemático.

Categorías inductivas	Recurrencias	Categoría axial	Categoría general
Proceso de análisis	3	Razonamiento	Concepciones de razonamiento, argumentación, problema y lenguaje matemático.
Capacidad de pensar matemáticamente	5		
Razonamiento visto como resultado o respuesta	5		
Razonamiento visto como comprobación	1		
Matemática vista como ciencia exacta	1		
Proceso intuitivo	1		
Creación de imágenes mentales	6		
Argumentación vista como explicación	5	Argumentación	
Argumentación vista como resultados	5		
Manejo de procedimientos	13		
Manejo del lenguaje matemático	6		
Problema- situación estructurada	5		
Identificación de incógnitas	2		
Interpretación	5		

Relación de la matemática con la realidad	18	Problema matemático
Amplia relación del contexto con la trigonometría	8	
Manejo de conceptos en trigonometría	11	
Manejo del lenguaje matemático	6	
Ejercicio- Situación conocida	4	
Lenguaje natural	1	Lenguaje matemático
Lenguaje escrito, verbal y gráfico	1	
Manejo de conceptos en trigonometría	44	

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*

Subcategoría: Razonamiento

Resulta de gran importancia reconocer no solo esta visión desde el maestro sino también como es entendido por parte de los estudiantes, por ello se aborda inicialmente la categoría de "razonamiento", donde se identifican las categorías inductivas de mayor fuerza: "creación de imágenes mentales" (6 recurrencias), "razonamiento como un resultado o respuesta" (5 recurrencias), "capacidad de pensar matemáticamente" (5 recurrencias), "proceso de análisis" (3 recurrencias), y para que sean evidente este proceso de razonamiento que es esencial, se da en el desarrollo de actividades o la solución de situaciones problema, porque ellas requieren que el estudiante realice una imagen mental de lo que se le propone, la plasme a nivel escrito, y a partir de un proceso de análisis pueda llegar a una respuesta o solución, como lo mencionan los estudiantes:

> E1: un razonamiento matemático, es como ese análisis que hacemos, ese algoritmo, ese proceso que hacemos para llegar a una solución específica…. primero las creo me las imagino, por ejemplo, cuando uno va hallar la sombra que refleja un árbol con la distancia que uno tiene, ese puede ser un ejemplo, uno se crea la imagen en su cabeza y luego lo plantea y lo resuelve y es más fácil.

> E5: cuando me ponen un problema, ya sea matemático en cualquier área de números, el pensamiento matemático, me va a permitir desarrollarlo y entenderlo… crear imágenes mentales, muchas veces se me da porque ya con la explicación de los profesores, pues los veo intentando entender y entonces en mi mente voy intentando desarrollar el problema.

También, aunque con menor recurrencia, se relaciona el "razonamiento visto como comprobación" (1 recurrencia), haciendo referencia E2 a que "cada vez que damos un resultado necesitamos saber el proceso, dar operaciones, esto comprobar el por qué cada respuesta que demos", y esto permite llegar a respuesta acertadas frente a las problemáticas que se estén trabajando, siempre y cuando se tenga claridad en los conceptos trabajados, así mismo también menciona "la matemática vista como ciencia exacta" (1 recurrencia) y que el razonamiento también está relacionado con lo "intuitivo" (1 recurrencia) porque en algunas ocasiones no se necesita de tanto proceso matemático o de análisis y se puede llegar a conclusiones de manera directa desde la simple observación, frente a esto E2 manifiesta que "uno dice a veces esto es esto porque sí, porque lógicamente no necesita uno hacer operaciones escritas o en la mente, sino que ya nuestro instinto nos lo da".

Subcategoría: Argumentación

Frente a la "argumentación", se identifican diferentes categorías inductivas, con un significativo número de recurrencias, "argumentación vista como explicación" (5 recurrencias), "argumentación vista como resultado" (5 recurrencias), "manejo de procedimientos" (13 recurrencias), "manejo del lenguaje matemático"(6 recurrencias), y se establece relación en estas cuatro categorías pues los estudiantes manifiestan que en matemática siempre deben argumentar los ejercicios o problemas que resuelven, frente a un problema deben explicar los procedimientos matemáticos que le permiten llegar a una solución, y para estos procedimientos matemáticos se requiere de conceptos y de un manejo de símbolos matemáticos que siempre son utilizados en el área.

Para desarrollar estos aspectos relacionados con la argumentación, se establece relación con el razonamiento, tal como lo plantea el ICFES (2019):

La argumentación se relaciona con el razonamiento y comunicación, con la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en diversas situaciones, siempre justificando por qué o cómo se llegó a estas, a través de ejemplos y contraejemplos, o señalando y reflexionando sobre inconsistencias presentes. (p. 29)

De acuerdo a esto, el razonamiento y la argumentación se desarrollan mediante la resolución de situaciones, donde el estudiante a partir de sus presaberes debe aplicar conceptos matemáticos que le permitan construir y aplicar estrategias de solución del problema, tal como lo plantea la OCDE (2015), donde se resalta con claridad, que la persona interpreta, plantea, procede, razona y argumenta en función de la resolución de un problema, y trata de involucrar dicho proceso dentro de la cotidianidad en la que está inmerso.

Subcategoría: problema matemático

Para promover tanto el razonamiento como la argumentación, es necesario hacerlo desde situaciones problemas, por ello se busca comprender desde el estudiante lo que él entiende por "problema matemático", identificando categorías relevantes que en primer lugar buscan diferenciarlo de lo que es un ejercicios matemático, ubicándolo entonces como: "problema- situación estructurada" (5 recurrencias), "identificación de incógnitas" (2 recurrencias), "ejercicio- situación conocida" (6 recurrencias), aunque en algunos estudiantes se logra hacer evidente esta distinción, en dos de ellos se logra visualizar que tanto el ejercicio como el problema significan lo mismo, ante esto se menciona:

E2: un ejercicio y un problema. No, un ejercicio es algo como más breve, puede ser que nos dan una ecuación con una incógnita que ya conocemos y es fácil de resolver, ya un problema matemático ya viene más estructurado, un ejemplo, hagámosla con una ecuación y una incógnita, usted nos puede dar equis más dos igual a cuatro, llegamos despejamos equis y ahí hallaremos cuanto valdrá. Ya eso vendría siendo un ejercicio, un problema ya podría ser, en el salón hay el doble de niños que, de niñas, nos dan un texto y entonces nosotros según esa lectura y ese problema tendríamos que construir esa ecuación y despejar equis para saber cómo solucionarlo.

> E6: un problema, es pues algo que, aún no tiene solución y nosotros deberemos asignarle la posible solución que tenga ese problema… Un ejercicio y un problema es prácticamente lo mismo porque no tiene solución y eso es a lo que debemos llegar.

En algunos estudiantes se evidencia que un problema es algo más estructurado, que no son simples procedimientos matemáticos, sino que se expresan situaciones asociadas a su cotidianidad dependiendo del tema que se esté trabajando, y se vinculan otras categorías de relevancia tales como “relación de la matemática con la realidad” (18 recurrencias), “amplia relación del contexto con la trigonometría” (8 recurrencias), “manejo de conceptos en trigonometría” (11 recurrencias), “interpretación” (5 recurrencias), “manejo del lenguaje matemático” (6 recurrencias), y estas categorías como se evidencia en la red semántica se encuentran relacionadas, porque el desarrollo de una situación problema requiere por parte del estudiante de la lectura e interpretación del mismo, del reconocimiento desde el contexto donde se aplica y de los conceptos pertinentes, en este caso de trigonometría, para poder aproximarse a plantear posibles soluciones las cuales a nivel escrito requieren del uso del lenguaje matemático natural, gráfico y algebraico, y hacer uso de la simbología adecuada requiere de claridad conceptual, esto permite generar cadenas de argumentos validas desde el razonamiento aplicado.

Es decir que a partir de la resolución de problemas se promueve el razonamiento y argumentación, como lo menciona Pacheco y Pacheco (2021):

> La resolución de problemas, es una estrategia clave que fortalece el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, debido a que en tal proceso esta inmersos, las actividades de razonamiento, argumentación, reflexión y de comunicación entre otros, y en el cual, el encargado de resolver el problema desarrolla dichas competencias o habilidades dentro y fuera del aula de clase (p.104)

Subcategoría: lenguaje matemático

El “lenguaje matemático”, emerge de la resolución de problemas, razonamiento y argumentación, y desde el discurso del estudiante se evidencia que tiene asociadas categorías inductivas como “lenguaje natural” (1 recurrencia), “lenguaje escrito, verbal y gráfico" (1 recurrencia), "manejo de conceptos en trigonometría" (11 recurrencias), pues el lenguaje matemático emerge al momento de generar argumentos que son esenciales para dar solución a una situación problema, y para ello es fundamental manejar conceptos matemáticos, frente a ellos los estudiantes mencionan que:

> E1: pues cuando ya se el tema y me dicen por ejemplo Pitágoras o algo, pues entonces yo ya en mi mente ya analizo con la simbología que tiene que se utiliza ya analizo ese problema y ya se cómo lo voy a resolver utilizando los diferentes métodos de ese tema para resolverlo.

> E3: en las matemáticas hay varios símbolos, pero no es que todos los símbolos signifiquen digamos que el mismo símbolo personifique varias cosas, porque para eso hay más, es que uno se puede hallar más rápido, se puede ubicar más rápido en todos los problemas matemáticos, pero debe conocer los conceptos del tema.

De esta manera, si el estudiante tiene reconocimiento de conceptos matemáticos puede mediante la comunicación y representación matemática expresar ideas a través de diferentes formas desde el lenguaje simbólico del área, permitiéndole un mejor desempeño en la resolución de problemas y por ende en el razonamiento y la argumentación. Frente a esto el MEN (2006) menciona que:

> La comunicación y representación implica reconocer el lenguaje propio de las matemáticas, usar las nociones y procesos matemáticos en la comunicación, reconocer sus significados, expresar, interpretar y evaluar ideas matemáticas, construir, interpretar y ligar representaciones producir y presentar argumentos (p. 21)

La siguiente red semántica evidencia la relación de las concepciones de los estudiantes frente a razonamiento, argumentación, problema y lenguaje matemático:

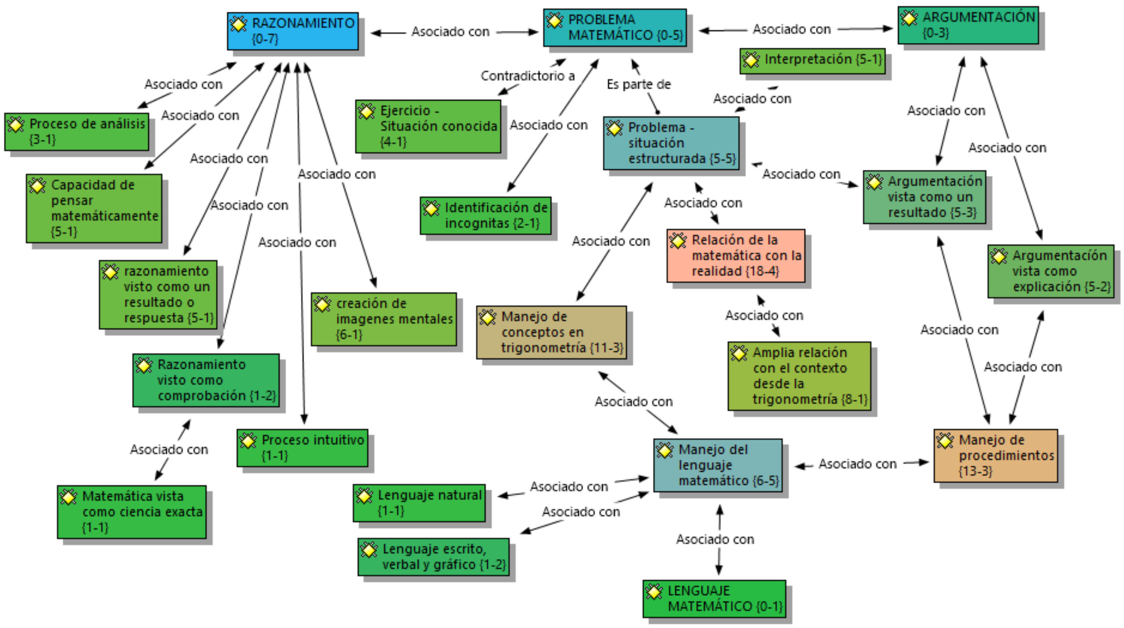


Gráfico 14. Concepciones de los estudiantes sobre razonamiento, argumentación, problema matemático y lenguaje matemático.

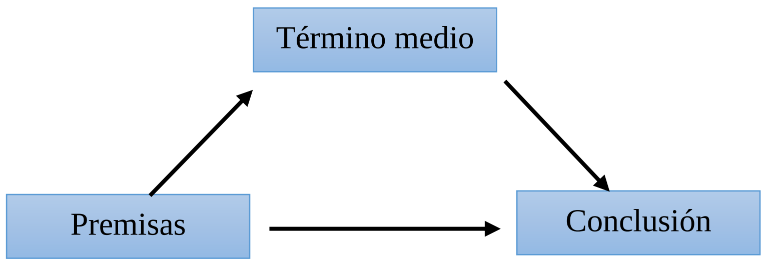
Análisis a situación problema aplicada a estudiantes

Posterior a la identificación de estas concepciones en los estudiantes se realizó un análisis a una situación problema planteada en la entrevista, donde se propuso lo siguiente:

Dos estudiantes se encuentran separados 50 metros, ven una cometa volando situada entre ellos dos bajo ángulos de 65° y 78°, ¿a qué distancia se encuentra cada estudiante de la cometa? ¿a qué altura se encuentra la cometa?

Vale la pena aclarar la forma en cómo se seleccionaron los estudiantes para el estudio: 2 estudiantes con desempeño alto en el área (E1 y E2), dos con desempeño básico (E4 y E5) y dos con desempeño bajo (E3 y E6), esto teniendo en cuenta que a nivel general en la institución los desempeños de los estudiantes se encuentran divididos en estos grupos según su rendimiento.

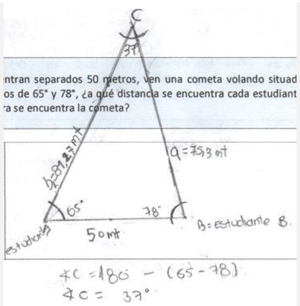
Durante la misma entrevista se plantearon preguntas que acompañaron esta situación problema, cuya intención fue identificar diferentes elementos asociados al razonamiento y argumentación, desde el abordaje que realizan los estudiantes a partir de conocimientos ya adquiridos, de esta manera se realizó una respectiva interpretación desde la postura de Duval (1999a), quien plantea la estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación, tal como se explicó en el marco referencial y se indicó en la matriz de categorías.



Grafica 15. Estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación. Tomado de Duval, 1999a, p.18

Partiendo de las ***premisas***, lo primero que se solicita al estudiante es que a partir de la interpretación del enunciado realice una conversión del lenguaje natural al lenguaje gráfico donde pueda representar dicha situación problema, y se le pide que identifique los elementos conceptuales que requiere para diseñar el plan o estrategia que necesita para emplear en la solución del problema. Esto en coherencia también con los pasos planteados por Polya (1945) donde se debe primero comprender el problema y posteriormente diseñar un plan, y para esto se requiere de conocimientos previos.

Cuadro 11. Validez en la Conversión de representación, reconocimiento de conceptos y simbología desde la problemática abordada:

Representación gráfica del estudiante	***Conceptos asociados***	***Simbología que permite representar la situación***
	Triángulo, triángulo acutángulo, Ley de seno, la suma de ángulos internos es 180°	$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$

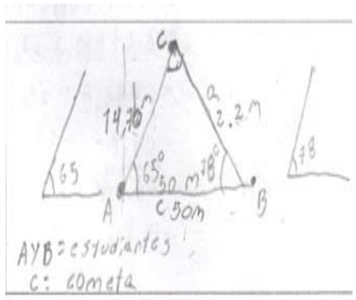
Nota: Elaborado por Contreras (2022).

Interpretación: los estudiantes E1, E2 y E5, coinciden en estos tres aspectos. Evidenciando primero en la construcción gráfica que tienen en cuenta para la elaboración de los ángulos el uso del transportador, proyectando así una figura correspondiente con los datos del problema.

Desde la ubicación de conceptos y simbología, se observa que existe correspondencia frente a la figura que representa dicho problema, luego se da una conversión de lenguaje natural a lenguaje gráfico de manera clara. Esto muestra que existe una interpretación y compresión adecuada de los estudiantes con respecto a la situación planteada, por ende, hay reconocimiento de los conceptos básicos y necesarios para abordar dicho problema.

Cuadro 12. Dificultad en la Conversión de representación, reconocimiento de conceptos y simbología desde la problemática abordada:

Representación gráfica del estudiante	***Conceptos asociados***	***Simbología que permite representar la situación***

	E4: Triangulo, triángulo escaleno, teorema de Seno E3, E6: Triángulo isósceles, y teorema de Coseno	$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ $\frac{a}{\mathrm{Sen}A} = \frac{b}{\mathrm{Sen}B}$ E6: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ E3: $A^2 = B^2 \cdot c^2$

Nota: Elaborado por Contreras (2022).

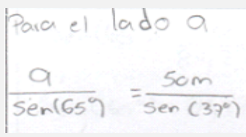
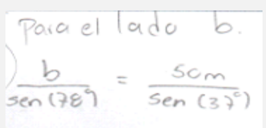
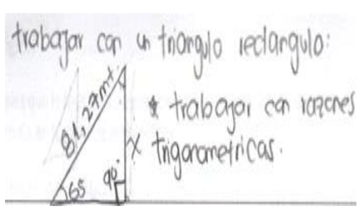
Interpretación: en los estudiantes E3, E4 y E6, se evidencia una representación gráfica que corresponde a los datos del planteamiento del problema, pero no se visualiza la distinción en la medida de los ángulos, aun contando con los implementos (transportador) para la construcción del mismo. Estas representaciones graficas donde no se tienen claridad en la ubicación de los ángulos generan dificultades en su misma comprensión, inclusive al confundirla con un triángulo isósceles.

A nivel conceptual se encuentra que el estudiante E4, logra identificar elementos necesarios frente al problema y así mismo la simbología correspondiente, mientras que lo planteado conceptualmente por E3 y E6 no corresponde a una ruta que permita dar solución al mismo, y aunque la simbología representa el teorema de coseno en el caso de E6, este no sería aplicable ante la gráfica planteada con los datos iniciales, lo que indica que el estudiante debe reconocer la diferencia de aplicación de cada uno de estos teoremas cuando trabaja con triángulos oblicuángulos. Desde lo planteado por E3 se evidencia error conceptual pues la simbología que utiliza para representar la situación no corresponde con el tema para abordar dicho problema.

Esto resulta coherente con lo que los mismos estudiantes manifestaban en las preguntas iniciales de la entrevista, haciendo referencia a que la forma de abordar una situación problema depende del manejo que se tenga de los conceptos para poder aplicarlos.

Frente a esta identificación inicial se le pide al estudiante que plantee la forma de identificar la distancia de cada estudiante a la cometa y la altura de la cometa, además que justifique porque ese planteamiento tiene sentido para él, y si es posible plantearse de otra forma, obteniendo:

Cuadro 13. Validez de premisas iniciales en el planteamiento del estudiante

Planteamiento del estudiante	***Sentido que tiene el planteamiento***	***Otras posibles formas de abordarlo***
Con respecto a la pregunta: 1. ¿cuál es la distancia de cada estudiante a la cometa?  	E1: si porque aplico la Ley de Seno E2: "tiene sentido para mí por el concepto de Ley de Seno (ángulo-lado opuesto)" E5: si porque debo hallar la distancia de los niños a la cometa y debo aplicar las fórmulas y conceptos apropiados	E1: No, el teorema de seno es el que permite relacionar estos datos. E2: No veo otra forma con estos datos E5: No porque el teorema de seno es el único que permite hacerlo
Con respecto a la pregunta: 2. ¿a qué altura se encuentra la cometa? 	E1: si, se debe trabajar con un triángulo rectángulo, con razones trigonométricas. E2: si con los datos debo aplicar razones trigonométricas. E5: si se necesita utilizar la razón seno porque tengo el ángulo y la hipotenusa, con eso hallo el cateto opuesto que es la altura.	E1: no porque es un triángulo rectángulo. E2: no porque no puedo usar teorema de Pitágoras. E5: no porque con esos datos debo aplicar razones trigonométricas.

Nota: Elaborado por Contreras (2022).

Interpretación: Los estudiantes E1, E2 y E5, desde los conceptos que identificaron inicialmente, construyen unas premisas válidas, que se consideran pertinentes y fuertes porque son acorde a los fundamentos conceptuales que se requieren para abordar el problema, y frente a la justificación que dan sobre el sentido que tiene para ellos ese planteamiento, en todos se evidencia que se apoyan para la primera pregunta en la "Ley de seno", indicando que reconocen la característica que tiene el triángulo planteado inicialmente, por ende establecen que para poder aplicarlo debe hacerse sobre triángulos oblicuángulos donde se tiene un ángulo y lado opuesto, y frente a esta misma claridad conceptual mencionan que no ven otra posible solución a este problema si ya cuentan con un concepto que les permite desarrollarlo.

De igual forma en la segunda pregunta, para ubicar la altura dividen el triángulo, ubicando un triángulo rectángulo y con relación a los datos plantean su solución mediante razones trigonométricas que les permite trabajar este tipo de triángulos, específicamente con la razón seno.

Se reconoce también en el planteamiento de los estudiantes que se realiza un buen manejo de lenguaje matemático, pues es correspondiente a los elementos conceptuales mencionados, en este caso ley de seno y razones trigonométricas, junto con los datos que presenta la situación problema, además se pasó de una representación gráfica a una algebraica para plantear una estrategia de solución al problema.

Cuadro 14. Errores de premisas iniciales en el planteamiento del estudiante

Planteamiento del estudiante	***Sentido que tiene el planteamiento***	***Otras posibles formas de abordarlo***

Con respecto a la pregunta: 1. ¿cuál es la distancia de cada estudiante a la cometa		
$\frac{a}{Sen A} = \frac{b}{Sen B}$ $\frac{50m}{65^\circ} = \frac{b}{37^\circ}$ $b = \frac{50m}{65^\circ} \cdot 37^\circ$ $a^2 = (78^o)^2 + (50m)^2, \cos 65$ $A^2 = B^2 \cdot C^2$	E4: si, porque estoy hallando lo que me están pidiendo con el teorema de seno. E6: Si, porque necesito hallar el lado a y el lado b. E3:si, porque con el ángulo y la distancia del punto A al B lo puedo hallar con el teorema de Pitágoras.	E4: No, porque no hay otro tema que me permita resolverlo. E6: No, porque solo se puede aplicar teorema de coseno. E3: No porque no hay otro modo.
Con respecto a la pregunta: 2. ¿a qué altura se encuentra la cometa?	E4: si, porque es un triángulo rectángulo	E4: No, porque es la forma adecuada
para hallar la altura debo hallar x  x Razon trigonometrica $\tan \alpha = \frac{CO}{CA}$	E6: Si, porque es la forma adecuada. E3:si, porque con el ángulo y la distancia del punto A al B lo puedo hallar.	E6: No, porque se debe aplicar la razón tangente. E3: No porque es un triángulo rectángulo.

Nota: Elaborado por Contreras (2022).

Interpretación: Los estudiantes E4, E6 y E3, con respecto a la pregunta 1, presentan errores en su planteamiento, como puede evidenciarse E4, menciona la necesidad de usar el teorema de seno, pero su planteamiento desde el teorema no es válido, allí se evidencia dificultad a nivel procedimental, manejo de simbología y de reconocimiento conceptual, aun así, el estudiante manifiesta que el planteamiento tiene sentido para él porque está aplicando el tema correspondiente.

En el estudiante E6, se evidencian errores de tipo conceptual, pues al no reconocer las diferencias entre teorema de seno y coseno, no se da una aplicación adecuada del mismo, además al observar la forma en como aplica dicho teorema también se presenta errores al reemplazar el valor de un lado por un ángulo, lo que muestra que no hay claridad en dichos conceptos ni reconocimiento de los datos de la situación problema.

En el estudiante E3 también se observan errores conceptuales, propone el uso de teorema de Pitágoras que para el caso de este tipo de triángulos oblicuángulos no es aplicable para lo que se está pidiendo, y la representación simbólica que plantea tampoco corresponde al teorema de Pitágoras.

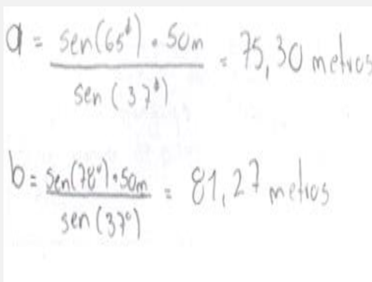
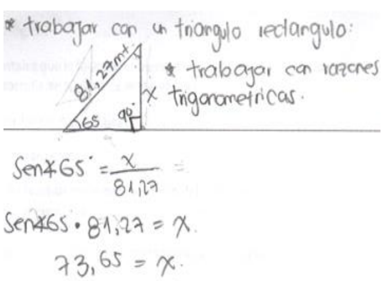
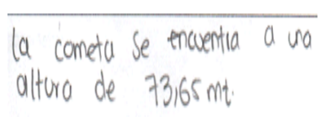
Con respecto a la pregunta 2, todos plantean que debe utilizarse las razones trigonométricas, porque para determinar la altura la figura corresponde a un triángulo rectángulo, pero proponen la razón tangente que de acuerdo a los datos no permitiría llegar a la solución.

Para este caso de premisas iniciales se puede mencionar a nivel general se presenta pertinencia y fuerza en los planteamientos de los estudiantes E1,E2,E5 y que emergieron errores conceptuales en los estudiantes E3,E4 y E6, estos parten desde una dificultad en la compresión del enunciado, aunque se llega a una representación gráfica algunos estudiantes no logran identificar las características de dicho triángulo dificultando la pertinencia y coherencia del uso de preconceptos y conceptos matemáticos para la construcción de premisas en el planteamiento, así mismo se observa dificultad en el paso o conversión de una representación a otra, y con mayor problema se ve el paso de lo gráfico a lo algebraico, estableciendo premisas sin fuerza ni pertinencia.

Ahora bien, con relación a los ***términos medio,*** de acuerdo a Duval (1999b), esto es de tipo estructural, corresponde a los conceptos matemáticos que se sustentan bajo procedimientos, es decir que dependen del nivel de conocimiento del sujeto que argumenta, pues allí se visualiza el uso del lenguaje matemático y conceptos que permiten la construcción de los argumentos para llegar a una ***conclusión.***

Además, en correspondencia con la resolución de problemas planteada por Polya (1945), después de haber diseñado un plan, este debe aplicarse y examinar su solución, luego se debe realizar una serie de pasos a partir de procedimientos que permitan resolver el problema, y esto tiene relación con la estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación, propuesta por Duval (1999b)

Cuadro 15. Validez de términos medios y conclusión

Proceso/procedimiento	***Conclusión***	***Formas de comprobar***
Para la pregunta: 1. ¿Cuál es la distancia de cada estudiante a la cometa?: 	Ya resuelto, puedo decir que el estudiante A esta a 81.27 metros de la cometa y el estudiante B esta a 75.30 metros de la cometa.	E1: Es correcto porque la relación que establecí corresponde al teorema de seno. E2: aplique bien el concepto y las fórmulas. E5: Es correcto porque se aplicaron los datos de manera adecuada
Para la pregunta: 2. ¿a qué altura se encuentra la cometa? 		E1: es correcto porque la altura es un cateto y el cateto es menor que la hipotenusa. E2: porque no supero la medida de la hipotenusa, 81.27>73.65 E5: Es correcto porque el cateto es menor a la hipotenusa.

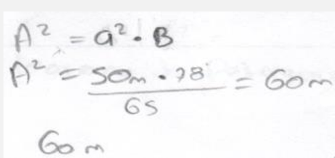
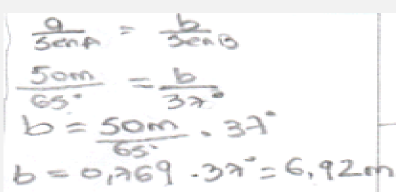
Nota: Elaborado por Contreras (2022).

Interpretación:

Se evidencia en la aplicación del plan o uso de términos medios en los estudiantes E1, E2 y E5 un buen manejo procedimental, adecuado uso del lenguaje matemático, aplicación coherente de los conceptos propuestos por el estudiante, lo que le permitió generar una cadena de argumentos válida, llegando así a una conclusión verdadera, luego se muestra fuerza y pertinencia en los argumentos.

Además, frente a las formas de comprobar su misma solución, los estudiantes manifiestan que lo que proponen es válido porque responde a las necesidades del problema, dada la aplicación de conceptos. En el caso de la pregunta 1 por el desarrollo del teorema de seno y en la pregunta 2 desde el uso de razones trigonométricas, teniendo en cuenta que lo que están buscando es un lado, y asumiendo un triángulo rectángulo este debe ser menor que la hipotenusa. Aunque puede comprobarse a partir de otros procedimientos para verificar los datos, los estudiantes los justifican teniendo en cuenta el uso adecuado de conceptos porque reconocen las diferencias que estos presentan.

Cuadro 16. Errores de términos medios y conclusión

Proceso/procedimiento	***Conclusión***	***Formas de comprobar***
Para la pregunta: 1. ¿Cuál es la distancia de cada estudiante a la cometa?: 	E3: A está a 60 mt, y B está a 41.6 mts de la cometa.	E3: porque estoy utilizando la distancia y el ángulo
	E4: A está a 6.92 mt, y B está a 41.6 mts de la cometa.	E4: porque aplique el teorema
	E6: el estudiante a se encuentra a 2.2 m, y el estudiante b a 14.7 m.	E6: si porque seguí el paso a paso.

$a^2 = (78^o)^2 + (50m)^2,\ \cos 65$ $a^2 = 6{,}084 + 2{,}500 \cdot -0.56$ $a^2 = 8.584 \cdot -0.56$ $a^2 = -4.80$ $a = \sqrt{-4.80}$ $a = 2.2\ m$		
Para la pregunta: 2. ¿a qué altura se encuentra la cometa?		
$\tan\alpha = \frac{co}{cA}$ $\tan\alpha = \frac{2.2m}{65} = 0{,}03\ m$	E6: la altura de la cometa es de 0.03	E6: creo que no está bien porque la altura es muy corta.
$c^2 = a^2 \cdot b^2 =$ $c^2 = \frac{60 \cdot 41}{50} = 49{,}2m$	E3: la altura es de 49.2 m.	E3: porque estoy utilizando la medida de los ángulos

Nota: Elaborado por Contreras (2022).

Interpretación:

En el caso de los estudiantes E3, E4, E6 en la pregunta 1, se puede observar errores conceptuales, procedimentales y de manejo del lenguaje, asociados inicialmente a problemas de interpretación y comprensión de enunciados matemáticos. En el estudiante E3 no se muestra una ubicación conceptual y simbólica válida; el estudiante E4, aunque reconoce que debe utilizarse el teorema de seno, realiza una aplicación del teorema que no es válida a nivel procedimental indicando errores conceptuales y de lenguaje, y el estudiante E6 no reconoce la diferencia entre los conceptos de teorema de seno y de coseno, además en la parte procedimental que desarrolla se muestran varios errores conceptuales, entre ellos confusión entre un lado y un ángulo, no reconoce el manejo de raíz cuadrada. Dichas dificultades también se hacen evidentes en la pregunta dos.

Esto muestra que se requiere de un manejo apropiado del saber y del sentido de los enunciados matemáticos, que llevaran al sujeto argumentador a tomar una posición fiable de lo que expresa, al respecto León y Calderón (2003a) afirman que “no se puede configurar un sentido matemático mientras no se comprenda suficientemente el contenido, se le asigne un valor y un estatus a ese conocimiento” (p.86). Esta es precisamente una de las mayores dificultades que se pueden visualizar, porque al no comprender los contenidos matemáticos con relación a las situaciones problema planteadas se evidencian falencias en los procesos de razonamiento y argumentación.

Además, uno de los aspectos que caracteriza la argumentación matemática de cualquier otro tipo de argumentación, es la manera de significar y representar matemáticamente (registro semiótico) una situación problema (Duval, 1999a); el uso no apropiado de estos sistemas de simbolización o de registros semióticos, afectan de manera negativa el desarrollo de la argumentación realizada por los estudiantes, porque no hacen uso de recursos matemáticos válidos y necesarios que permitan la solución del problema y esta situación está asociada a los errores conceptuales.

Contrastación de los hallazgos

Ahora bien, después de presentada y analizada la información correspondiente al abordaje realizado a docentes y estudiantes, se efectúa la contrastación de estos hallazgos desde los actores del estudio y los fundamentos del marco referencial, teniendo en cuenta en esta etapa de análisis la postura de Martínez (2006) quien menciona que “esta etapa consiste en relacionar y contrastar los resultados con aquellos estudios paralelos o similares que se presentaron en el marco referencial”(p.276), además se realiza una matriz de triangulación la cuál es definida por Bisquerra (2003) como; “…una técnica cualitativa que permite reconocer y analizar datos desde distintos ángulos para compararlos y contrastarlos entre sí" (p. 264). Con esto se busca obtener una mirada amplia del objeto de estudio al comparar la información desde dos fuentes, enriqueciendo así el estudio con mayor profundidad, buscando reducir sesgos y aumentando la comprensión del fenómeno.

En las tablas de matriz de triangulación el símbolo **“√”** significa que está presente y **“X”** significa que está ausente.

Contrastación de los hallazgos frente a la categoría de razonamiento

Cuadro 17. Matriz de triangulación de la categoría de razonamiento

Hallazgos	**Fuente**	
	Maestros	Estudiantes
Capacidad de pensar matemáticamente	√	√
Razonamiento visto como análisis de situaciones	√	√
Razonamiento visto como un resultado o respuesta	√	√
Razonamiento visto como comprobación	X	√
Desarrollo del pensamiento lógico	√	√
Manejo de procedimientos	√	√
Proceso intuitivo	X	√

Razonamiento deductivo	√	X
Razonamiento inductivo	√	X

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*
Símbolo: "√" *significa presente y* ***"X"*** *significa ausente.*

Se observa coherencia en el abordaje de la concepción de razonamiento desde la mirada de maestros y estudiantes, al ser contrastado con los fundamentos teóricos se encuentra relación con diferentes elementos, desde la postura del marco de referencia de las pruebas PISA, OCDE (2018), se menciona que el razonamiento tanto inductivo como deductivo "involucra sopesar situaciones, elegir estrategias, sacar conclusiones lógicas, desarrollar y describir soluciones, y reconocer cómo esas soluciones pueden ser aplicadas" (p. 21), así mismo desde los lineamientos curriculares en matemática (1998) planteados por el Ministerio de Educación Nacional, se menciona la importancia de enfatizar que el razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y es una capacidad que permite organizar ideas para llegar a una conclusión, de esta manera se analiza dentro de la resolución de problemas y tiene que ver con la comunicación, modelación y procedimientos.

Así mismo, el MEN (2006) desde los estándares básicos de competencias matemáticas, se entiende que es una capacidad de pensamiento que está relacionada con hacer predicciones, justificar, dar explicaciones, comprobar, proponer interpretaciones y posibles respuestas, aspectos que se deben potenciar desde situaciones de aprendizaje donde se aplique tanto el razonamiento deductivo como inductivo.

En este caso, aunque el razonamiento deductivo es fundamental en la organización curricular, se manifiesta por parte de los docentes que el razonamiento que más se desarrolla es el inductivo, por su parte Polya (1945) menciona que este es el razonamiento natural que da lugar al conocimiento científico a partir de la observación de casos particulares. De esta forma se entiende que es una manera de acceder al conocimiento matemático apoyado en casos particulares como las situaciones problema.

En el desarrollo de la situación problema que se les presentó a los estudiantes se les pregunto sobre el razonamiento matemático que habían aplicado, identificando en ellos que no clasifican los tipos de razonamiento, y esto lo asocian de la misma forma en que definen esta categoría, asumiendo como tipos de razonamiento los conceptos y procedimientos que aplican ante una situación problema.

Así mismo, un estudiante hace referencia al razonamiento como un proceso intuitivo, que no requiere tanto de análisis sino de simple observación, caso que no es abordado por los docentes porque se ubica que el razonamiento matemático debe darse por vía deductiva o inductiva.

Contrastación de los hallazgos frente a la categoría de argumentación matemática

Cuadro 18. Matriz de triangulación de la categoría de argumentación

Hallazgos	**Fuente**	
	Maestros	Estudiantes
Argumentación como demostración y comprobación	√	X
Argumentación vista como explicación	√	√
Argumentación vista como resultado	√	√
Uso de lenguaje matemático	√	√
Manejo de procedimientos	√	√
Manejo de conceptos y presaberes	√	√

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*
Símbolo: "√" *significa presente y* ***"X"*** *significa ausente.*

Desde la mirada de los maestros y estudiantes se observa coherencia frente a la conceptualización de argumentación matemática, donde es común que se haga referencia a una explicación frente a un proceso matemático y a un resultado, en el cual se requiere el manejo de procedimientos matemáticos y por ende del uso del lenguaje propio de la disciplina, además mencionan los docentes que es necesario el manejo de conceptos y presaberes, frente a esto León y Calderón (2003) mencionan que "la argumentación, exige a los sujetos altos niveles de comprensión de los objetos sobre los que argumenta; es decir, exige la toma de una postura epistémica más de tipo teórica que semántico para poder entrar en un juego argumentativo" (p.156).

Desde la mirada de los estudiantes se pudo evidenciar en el desarrollo de la situación problema que algunos estudiantes pasaron de una posición semántica a una posición teórica; es decir, desde el sentido del enunciado evidenciaron premisas con valor lógico verdadero que exigió la búsqueda de conceptos matemáticos que permitieron el desarrollo de una cadena de argumentos fuerte y pertinente, es decir que en coherencia con lo que plantea Duval (1999a) se observa la estructura de un pasaje de razonamiento en una argumentación que está conformado por tres elementos fundamentales, los cuales son las "premisas" que plantea el sujeto argumentador, los "términos medios" (preconceptos o conceptos matemáticos que se sustentan bajo procedimientos utilizados) y la "conclusión" a la cual se llega en el proceso argumentativo.

Algo que no se evidencia en el discurso del docente es precisamente la estructura de un proceso argumentativo, se mencionan algunos aspectos relacionados con la argumentación, como la explicación, el resultado, la demostración, pero debe considerarse la argumentación desde un sentido más amplio, como la capacidad para validar, justificar, relacionar datos, reflexionar sobre las soluciones y explicaciones, y para ello se crea una estructura argumentativa que se genera a partir del razonamiento, buscando a través de la argumentación un acercamiento a la demostración formal, como lo mencionan los estándares básicos de competencia matemática (2006), se debe tener en cuenta como proceso general "usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración. (p.51).

Contrastación de los hallazgos relacionados con la categoría "resolución de problemas trigonométricos" frente al desarrollo del razonamiento y la argumentación.

Cuadro 19. Matriz de triangulación de resolución de problemas trigonométricos frente al desarrollo del razonamiento y argumentación

Hallazgos	**Fuente**	
	Maestros	Estudiantes
Promueve el razonamiento y la argumentación	√	√
Uso de lenguaje matemático	√	√
Dificultad para argumentar	√	√
Dificultad para el manejo del lenguaje matemático	√	√

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*
Símbolo: "√" *significa presente y* ***"X"*** *significa ausente.*

Desde la concepción de los docentes se puede apreciar que la resolución de problemas trigonométricos promueven el razonamiento y la argumentación, así como también se evidenció en los estudiantes desde el desarrollo de la situación problema, pues su solución muestra que a partir de la comprensión de los enunciados matemáticos se genera una cadena de argumentos (premisas-término medio-conclusión) que le permiten llegar a una solución, algunos de ellos con argumentos válidos que muestran pertinencia y fuerza en su construcción.

Es importante entonces reconocer que tanto el razonamiento como la argumentación se promueven desde estrategias como la resolución de problemas, como lo plantea Duval (1999b), quien hace referencia a que la producción de argumentos se realiza desde un trabajo sobre casos particulares, donde se desarrolla una serie de operaciones sucesivas que ponen en funcionamiento un sistema semiótico, luego se considera la estrategia de resolución de problemas como aquella que promueve el desarrollo de la argumentación en el aula y sobre la cual se evidencian razonamientos matemáticos que permiten la creación de argumentos.

De igual forma se menciona desde los estándares básicos de competencia (2006) y los lineamientos curriculares en matemática (1998) planteados por el Ministerio de Educación Nacional, que formular, plantear y resolver problemas de la vida cotidiana requiere de un manejo adecuado de conceptos, procedimientos y lenguaje matemático, donde está integrado el razonamiento pues se exige la creación de argumentos que justifiquen los procesos realizados y se valide la solución. Además, las situaciones problema son un microambiente de aprendizaje, que se pueden elaborar de la vida cotidiana, de otras disciplinas o de la misma matemática, todo depende del contexto donde se trabaje.

También se evidencia la relación entre razonamiento y resolución de problemas desde la postura del marco de referencia de las pruebas PISA, OCDE (2018), donde se menciona que:

> Aunque el razonamiento matemático y la resolución de problemas de la vida real se superponen, hay un aspecto del razonamiento matemático que va más allá de la resolución de problemas prácticos. El razonamiento matemático es también una manera de crear y evaluar argumentos. (p. 21)

Luego la resolución de problemas es fundamental en la construcción del conocimiento y permite el desarrollo del razonamiento, porque si el razonamiento no se desarrolla las matemáticas se convierten en seguir procedimientos e imitar ejemplos sin reflexionar por qué tiene sentido.

Además, Devia y Campo (2013) también resaltan la importancia de la resolución de problemas en lo referente al desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas, desde el tratamiento de situaciones problémicas que trasciendan la ejercitación e impliquen el análisis, el razonamiento, la modelación, la argumentación, entre otras habilidades de pensamiento. Superando de esta manera la formación tradicional en matemática que centrada solo en el desarrollo de ejercicios mecánicos no permite ver la utilidad del conocimiento, dificultando en el estudiante establecer la relación concepto-realidad y por ende la argumentación.

Estas dificultades frente a la argumentación que se hace evidente en la resolución de problemas es una situación que se vivencia en diferentes contextos, como lo mencionan Pacheco y Pacheco (2021),

> Los estudiantes latinoamericanos, se les dificulta la resolución de problemas, debido a que ello, implica, un mayor esfuerzo por la atención a procesos de razonamiento lógico de tipo complejo en el aula de clase. Esta falencia, puede obedecer, a la predominancia de una educación memorística, poco reflexiva y limitada, en el cual, se generan aprendizajes con poca profundización del conocimiento.

Lo que lleva a pensar la necesidad de aplicar lo que a nivel de planeación curricular se menciona, que corresponde a una formación que supere lo tradicional, centrada en situaciones problema, porque si el estudiante ve la importancia y aplicación de la matemática se puede generar mayor motivación al aprendizaje del área.

Así mismo, se observa que en la resolución de problemas emerge el uso del lenguaje matemático, pues esta es la forma de comunicación de la disciplina, al plantear premisas se evidencia la conversión de un sistema de representación a otro, y en los términos medios se muestra también en los procedimientos matemáticos el uso del lenguaje coherente con los fundamentos conceptuales, aunque no en todos los estudiantes esto es claro si se evidencia en quienes desarrollaron con argumentos válidos la situación planteada, por lo tanto, en algunos se presenta dificultad frente al manejo de este lenguaje asociado a errores conceptuales.

El uso del lenguaje y el reconocimiento de conceptos es fundamental para que se desarrolle la argumentación matemática, situación en la que generalmente presentan dificultad los estudiantes, y esto es asociado inicialmente a problemas de interpretación y comprensión de los enunciados, a errores conceptuales, porque si no se conoce la aplicación de un concepto difícilmente se podrá utilizar de manera adecuada en los problemas que se presenten, por ello que los docentes en el caso de la trigonometría hacen claridad a las diferencias de lo que debe tener claro el estudiante para poder aplicar dicho conocimiento.

Contrastación de la categoría "relación conocimiento-contexto-resolución de problemas" y su vínculo con el razonamiento y argumentación

Cuadro 20. Matriz de triangulación de la relación conocimientos-contexto-resolución de problemas y su vínculo con el razonamiento y la argumentación.

Categorías	**Fuente**	
	Maestros	Estudiantes
Promueve el razonamiento y la argumentación	√	√
Planeación de área	√	X
Uso de lenguaje matemático	√	√

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*
Símbolo: "√" *significa presente y* ***"X"*** *significa ausente.*

Frente a la triada conocimiento, contexto y resolución de problemas se evidencia coherencia entre los sujetos de investigación, mostrando que esto promueve el razonamiento y la argumentación, tal como se mencionaba anteriormente, pues la resolución de problemas es una estrategia fundamental en la construcción de conocimiento matemático donde se evidencia el desarrollo de la argumentación y el uso del lenguaje matemático.

Los docentes referencian que es fundamental esta triada en la planeación de área, pues con ella se responde a lo planteado en las orientaciones nacionales de los lineamientos curriculares en matemática (1998) donde se considera que los conocimientos básicos, procesos como la resolución de problemas y el contexto permiten organizar el currículo de forma armoniosa.

De esta manera es fundamental que el aprendizaje de la matemática le permita al estudiante ver la aplicación del conocimiento dentro y fuera del ámbito escolar, y esto se logra a partir del planteamiento de situaciones de su cotidianidad, donde pueda aplicar la disciplina y esto le permita desenvolverse en cualquier contexto donde requiera de manejo de contenido matemático.

Así mismo, desde la situación problema desarrollada por los estudiantes se evidenció esta relación, pues para el análisis de la misma se elaboró una construcción gráfica desde el análisis en un contexto, bajo una realidad que es cercana a vivencias del estudiante, y así mismo para el planteamiento de estrategias de solución se requirió del manejo de conceptos matemáticos desde el campo de la trigonometría.

Contrastación de la categoría estrategias, competencias y procesos de la enseñanza de la matemática que promueven el razonamiento y argumentación

Cuadro 21. Matriz de triangulación de estrategias, competencias y procesos de la enseñanza de la matemática que promueven el razonamiento y argumentación

	Hallazgos	Fuente	
		Maestros	Estudiantes
Estrategias	Planeación de área	√	X
	Situaciones problema	√	√
	Enseñanza centrada en ejercicios	√	√
	Manejo de conceptos	√	√
	Lúdica	√	X
	Uso de videos explicativos	√	√
	Participación en clase	X	√
	Explicación del tema	X	√
	Uso de talleres	X	√
	Evaluación del tema	X	√
Competencias	Interpretativa	√	√
	Modelación	√	√
	Comunicativa	√	√
	Uso del lenguaje	√	√
	Manejo de procedimientos	√	√
	Interacción con el contexto	√	√
Procesos	Abstracción	√	√
	Imaginación	√	√
	Intuición	√	√
	Observación	√	√
Otros	Influencia de las formas de enseñar	X	√
	Gusto hacia la matemática	X	√

Virtualidad como distractor del aprendizaje	X	√
Presencialidad favorece el aprendizaje	√	√
Condiciones físicas favorables	√	X
Actitud del estudiante	√	X

Nota: *Elaborado por Contreras (2022).*
Símbolo:* “√”** *significa presente y* ***“X” *significa ausente.*

Desde los aspectos de la enseñanza de la matemática que favorecen el razonamiento y la argumentación, se evidencia relación entre lo planteado por maestros y estudiantes, en el caso de las estrategias que deben tenerse en cuenta, prima el planteamiento de situaciones problema, el cual no debe ser el fin último de un tema, pues generalmente se deja para el final cuando se ha trabajo el concepto y diferentes ejercicios, a partir de las situaciones problema se pueden construir los conceptos matemáticos. También, aunque el docente manifiesta que los ejercicios permiten fortalecer el desarrollo de procedimientos matemáticos, algunos estudiantes mencionan que esta es la estrategia que más se trabaja en el aula de clase, y esto debe cuestionarse en la planeación de área porque los ejercicios mecánicos no permiten del desarrollo cognoscitivo del estudiante. Como lo plantean Pérez y Ramírez (2016)

> el docente debe procurar plantear situaciones que sean capaces de provocar y activar el trabajo mental del alumno, y no limitarse a usar enunciados de problemas rutinarios que los alumnos resuelven en forma mecánica, sin ningún esfuerzo cognoscitivo…en otros casos cuando se trabajan problemas estos son extraídos de los libros en forma descontextualizada y por tanto, alejadas de cualquier significado para los alumnos, debido a que los mismos en nada se asemejan con la realidad en la que están inmersos (p.174)

De esta manera resulta fundamental que se asuma una enseñanza basada en situaciones problema que le permita al estudiante su desarrollo cognoscitivo y pueda establecer la relación entre concepto y realidad, reconociendo la aplicación de la disciplina en diferentes escenarios, lo que busca promover el interés en el estudiante por el aprendizaje de esta área, que a través del tiempo ha evidenciado grandes dificultades en su proceso de enseñanza y que ha sido considerada como un área de difícil comprensión por los estudiantes.

Esto teniendo presente que desde la postura del estudiante también se mencionan estrategias asociadas a una mirada más de tipo tradicional, donde se ubica un tema, se da la explicación, se plantea un taller para practicar dicho tema y finalmente se evalúa.

Ahora frente al desarrollo de competencias se evidencia coherencia entre lo que menciona el docente y lo que desarrolla el estudiante cuando se enfrenta a una situación problema. Pues se hace referencia la competencia de interpretación, que cuando se aplica a situaciones problema en algunos estudiantes se presenta una interpretación adecuada frente a enunciados matemáticos, pero en otros se evidencia dificultad. De igual forma desde la modelación, comunicación, uso del lenguaje, manejo de procedimientos, cuando el estudiante se enfrenta a resolver problemas en algunos se evidencia claridad, pero en otros no, por el no reconocimiento de conceptos matemáticos, mostrando que los estudiantes poco se enfrentan al proceso de resolución de problemas, esto genera dificultades en el razonamiento y la argumentación.

Ahora bien, desde los procesos se hace referencia de acuerdo a los sujetos del estudio a la abstracción, intuición, observación e imaginación, esto debe verse de una manera más amplia cuando se establece la relación desde situaciones problema y se vincula con el razonamiento, como lo plantea el marco de referencia de las pruebas PISA, OCDE (2018):

> Los procesos: formular, emplear, interpretar/evaluar … proporcionan una estructura útil y significativa para la organización de los procesos matemáticos que describen lo que los individuos hacen para conectar el contexto de un problema con las matemáticas y así resolver el problema… estos se asocian a formular las situaciones matemáticamente; emplear conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos; Interpretar, aplicar y evaluar los resultados matemáticos.

Esto se relaciona con lo que se ha mencionado anteriormente de la aplicación de problemas matemáticos y su vinculación en la planeación de área, y no debe verse como un tema más del currículo, sino como una estrategia para enseñar, aprender y evaluar, conceptos, procedimientos y uso del lenguaje que favorece la argumentación matemática, dándole sentido a la disciplina.

Ahora bien, hay otros elementos relacionados con la enseñanza que varían dependiendo del sujeto de estudio, desde la visión del maestro se menciona que es importante contar con unas condiciones físicas favorables, pues en ocasiones las condiciones de aula desde el espacio físico, ambiental no son apropiadas para la enseñanza, además que debe contarse con una actitud positiva hacia el aprendizaje por parte del estudiante.

De igual forma, desde la visión del estudiante se plantean algunos elementos como la influencia en la forma de enseñar de los profesores, porque no todos trabajan de la misma manera, algunos realmente motivan y generan gusto por el área, porque siempre están atentos a las necesidades o dificultades que presentan los estudiantes para dar claridad, pero esto no se presenta todo el tiempo.

También dentro de los elementos asociados a la enseñanza se menciona que desde la situación de pandemia que se vivió fue complicado el proceso de aprendizaje desde la virtualidad porque no había ese contacto directo con el docente para aclarar las dudas que se presentan, que además se presentan muchos distractores, por ende, la presencialidad favorece más el aprendizaje porque resulta fundamental la relación maestro-estudiante en el aula.

CONSTRUCTO TEORICO

Tomando como referencia los hallazgos de la investigación en contraste con otros estudios, se realiza un abordaje al objeto, entendiendo que un constructo teórico es una explicación que permite comprender y conocer las relaciones entre conceptos que busca integrar una idea o teoría, mostrando la realidad del problema de investigación, de esta manera, Arias (2019) indica que, "en principio un constructo es un concepto, idea o representación mental de un hecho o de un objeto" (p. 42). Luego, los constructos teóricos se refieren en particular a los referentes empíricos, contextuales y conceptuales, que permite darle un nexo teórico a la investigación, es así como se presenta de forma alternativa una explicación de la realidad. Así mismo Bunge (2001) señala que:

> Un constructo es un concepto, idea o representación mental de un hecho o de un objeto de la realidad. Así mismo, el término constructo puede ser entendido en dos direcciones: como concepto integrante de una teoría o como una "teoría" (p. 36).

De esta manera, desde el desarrollo de la presente investigación emergieron tres constructos teóricos:

1.- CONCEPCIÓN DEL MAESTRO: ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y RAZONAMIENTO LÓGICO

Abordando la concepción del maestro en el proceso de enseñanza de la matemática resulta fundamental comprender desde su formación tanto pedagógica como disciplinar la forma en como realiza la estructuración curricular donde se tienen en cuenta diferentes aspectos asociados a las formas de pensamiento, el desarrollo de procesos que debe promover, tales como el razonamiento y la argumentación, requiriendo así del reconocimiento de estructuras cognitivas, y a su vez se debe buscar impactar desde un aprendizaje significativo, por ende es necesario ver la aplicación de la matemática desde la relación con el contexto.

a) Formas de pensamiento.

En el proceso de enseñanza de la matemática se entiende el razonamiento como una forma de pensamiento, en el cual es fundamental promover tanto el razonamiento inductivo como deductivo. Es importante considerar desde los primeros años de formación el razonamiento inductivo, donde el maestro vincule materiales manipulativos como regletas, juegos matemáticos, cubos, bloques, etc, que le permitan acercar al estudiante a reconocer de manera agradable la disciplina, a partir de la construcción de escenarios particulares que ayuden a fortalecer el pensamiento matemático y le sirva como base para desarrollar el pensamiento deductivo. Estos aspectos son reconocidos por los maestros, al afirmar que el razonamiento inductivo es el más utilizado en el proceso de enseñanza y requiere de mayor fortalecimiento desde el trabajo que se realiza en los diferentes espacios pedagógicos, y a partir de esto se requiere también vincular en la planeación actividades que permitan fortalecer el razonamiento deductivo.

El desarrollo de razonamiento inductivo y deductivo es esencial frente a los aprendizajes que deben trabajarse a nivel disciplinar y que se encuentran estructurados desde los lineamientos curriculares propuestos por el MEN (1998) y son base en la planeación del maestro, estos aprendizajes están organizados en todos los grados de educación básica y media, los cuales deben potenciar el pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional.

Luego pensando en los aprendizajes que deben desarrollarse, es importante en el proceso formativo, que el docente reflexione tanto a nivel pedagógico como disciplinar, el reto que se asume en la enseñanza de la matemática, buscando generar aprendizajes que vayan más allá de un simple contenido, que trascienda esa visión tradicional, mecanicista y procedimental que de alguna manera ha tenido la disciplina a nivel histórico, y que se centre en promover realmente procesos de pensamiento que sean aplicables y útiles, permitiendo establecer la relación de la matemática con el entorno.

Para ello se requiere que el docente tenga un amplio dominio de su disciplina, conozca la estructura curricular del área que le permita una adecuada identificación de aprendizajes, materiales, métodos y evaluación, además que reconozca diferentes formas de enseñar donde tenga en cuenta dentro de su planeación el conocimiento del estudiante y genere un nivel de participación activa en ellos, para así fortalecer en el proceso formativo diferentes formas de pensamiento matemático.

b) El razonamiento y estructuras cognitivas

El razonamiento puede entenderse como una forma de pensamiento que permite ampliar el conocimiento, por ende, es considerado como un proceso cognitivo, pues en un proceso de razonamiento se parte de unas premisas iniciales, donde a través de operaciones cognitivas como la inferencia se puede llegar a conclusiones, y esta estructura de razonamiento se expresa o refleja a través de la argumentación matemática.

Luego, el desarrollo del razonamiento se evidencia en la solución de problemas matemáticos que requiere el manejo de conceptos previos de parte del estudiante, como lo manifiesta Alcivar y Concha (2017) “el desarrollo del razonamiento se manifiesta en la forma en que los estudiantes resuelven problemas, que al principio son de tipo matemático y que luego se espera extrapolar esa capacidad a solución de problemas cotidianos” (p.100).

Ahora bien, el desarrollo del razonamiento en la resolución de problemas insta al reconocimiento de la estructura cognitiva del alumno, pues esto es fundamental para el aprendizaje, es necesario tener presente las ideas o conceptos previos que se tienen y la forma en como estos están organizados y desde allí orientar el proceso de enseñanza, frente a esto, los maestros en la investigación, reconocen que es esencial el manejo de conceptos y presaberes por parte del estudiante con el fin de fortalecer la formación de la disciplina.

Esta mirada es fundamentada desde la teoría cognitiva, con representantes como Piaget (1981) y Ausubel (1968), donde se reconoce que el aprendizaje es un proceso que permite modificar significados, porque toda persona tiene inicialmente una estructura cognitiva preexistente y al momento de interactuar con la nueva información, si esta resulta significativa, entonces se producen ajustes o cambios a estas estructuras o esquemas. También se preocupa de los procesos correspondientes a la comprensión, cambio o transformación, almacenamiento de información.

De acuerdo a esto, es importante entonces que el docente en el proceso de reflexión de su praxis tenga en cuenta en su planeación los presaberes, y se reconozca él mismo con un mediador en el proceso de enseñanza, y no como transmisor de conocimiento, porque el estudiante llega al aula con saberes que han sido adquiridos de manera empírica por su relación con el contexto y de manera formal por su mismo proceso educativo, luego debe darse al discente un papel activo y participativo en su propio proceso formativo.

c) Contextualización de las matemáticas

Los procesos de formación hoy en día requieren que se establezca contextualización del saber, donde el contenido de la disciplina se pueda vincular con la realidad del estudiante, se destaque también su importancia y aplicación en otras disciplinas, porque si se piensa en formar ciudadanos matemáticamente competentes es fundamental recurrir a métodos que permitan afrontar los retos educativos actuales.

Una de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática está relacionada con el poco gusto o la motivación que tiene el estudiante frente al área, situación que se vivencia en diferentes escenarios y desde hace tiempo, generada por la enseñanza tradicional o mecanicista en la que se ha visto inmersa la disciplina, por lo tanto los estudiantes generalmente la rechazan, la catalogan de difícil y es carente el uso o aplicación que le ven en su realidad, esto por la poca contextualización que se realiza, y se visualiza en el manejo de materiales, ejemplos e inclusive textos que aunque busquen desarrollar actividades o vincular problemas estos generalmente son ajenos a la realidad que vive el estudiante. De acuerdo a esto, Ortiz (2019) menciona que:

> Surge la necesidad que los educadores, abandonen el paradigma tradicional de enseñanza de las matemáticas, en donde solo se hace énfasis en la memorización de conceptos, propiedades y axiomas, para buscar nuevos modelos pedagógicos que posibiliten la aplicación de estrategias didácticas en las que el aprendizaje sea significativo y perdurable en el tiempo

Es necesario entonces en la planeación curricular del área tener presente que los aprendizajes propuestos se vinculen con la realidad, pero una realidad que responda a las necesidades del estudiante, asociando la resolución de problema de la vida cotidiana, para que pueda acercarse a una mejor comprensión de la disciplina, y romper esa barrera de rechazo en la que se ha visto el aprendizaje de esta ciencia por parte de los estudiantes.

Así mismo, debe favorecerse en la enseñanza de la matemática una visión interdisciplinar, donde se establezca una mayor relación con otras ciencias, como lo expresan los mismos maestros, quienes hacen referencia a la aplicación que tienen la disciplina en otras áreas, y esta vinculación en los procesos de planeación puede despertar interés en el estudiante, al ver que los aprendizajes tienen sentido cuando son usados en otros campos para resolver y explicar problemas con temas externos a la matemática.

Con respecto a lo descrito anteriormente, desde las formas de pensamiento, la estructura cognitiva y la contextualización de la matemática, es importante asumir una reflexión desde la práctica de aula, reconociendo los intereses de los estudiantes y los aprendizajes necesarios en cada nivel educativo, con el fin de reestructurar la forma de enseñar, más allá de lo tradicional, desde estrategias y materiales manipulativos que potencien las formas de pensamiento desde el razonamiento inductivo y deductivo, abriendo paso a una agradable construcción del conocimiento matemático, desde la interacción que se genera en el aula, entre maestro, estudiante y contexto frente al saber.

Al implementar escenarios diferentes al tradicional, de lápiz y papel, se busca promover situaciones que requieran un mayor esfuerzo cognitivo, lo que permitirá influenciar en el desarrollo de las formas de pensamiento en el estudiante, y así mismo un fortalecimiento en la estructura cognitiva al lograr que el proceso de aprendizaje sea realmente significativo.

Es por esto que se propone desde grados iniciales el manejo de material manipulable, para ir acercando al estudiante acorde a cada grado a una apropiación más formal de la matemática, pues es necesario que cuando el estudiante llegue a grados superiores como lo es la educación media, en su estructura cognitiva cuente con ideas, conceptos o presaberes más de tipo formal, lo que le facilitará una mayor comprensión de aprendizajes abstractos de la disciplina y la relación que esto tiene con su cotidianidad, dándole sentido a la matemática como una disciplina útil.

La reestructuración y reflexión de estos aspectos, deben ser asumidos desde los planes de área y aula, donde se sustenta el trabajo realizado en los momentos pedagógicos, y se realiza la organización correspondiente a cada aprendizaje, teniendo en cuenta los saberes previos que permitan reconocer la estructura cognitiva del estudiante, para de esta manera aplicar la estrategia de enseñanza acorde a las necesidades y por ende la forma de evaluación.

Este es un trabajo que exige gran reflexión desde los primeros años escolares, porque es donde se empiezan a estructurar las concepciones básicas de la disciplina, aspecto que el estudiante debe ir fortaleciendo en la medida que avanza en su escolaridad, y así los grados de educación media pueden ser aprovechables, siempre y cuando la estructura cognitiva del estudiante responda a las exigencias del nivel en el que se encuentra y no se genere un retroceso escolar porque no se cuenta con los saberes básicos necesarios.

Es aquí donde se propone como eje central del currículo de matemática la enseñanza fundamentada en la resolución de problemas, siendo esto una estrategia que le permite al estudiante establecer una relación entre el contexto y su realidad, buscando un aprendizaje significativo de la disciplina y por ende el desarrollo de competencias matemáticas, que además es una exigencia de formación nacional e internacional, pero que debe repensarse y estructurarse desde cada escenario de formación.

2. CONCEPCIÓN DEL ESTUDIANTE: ESTRATEGIAS, COMPETENCIAS Y PROCESOS MATEMÁTICOS.

Para la comprensión de las fortalezas y debilidades que emergen en la enseñanza de la matemática es fundamental dar una mirada a la concepción del estudiante quien la vivencia desde el escenario de aula, donde se genera una interacción entre el estudiante, docente y el saber, permitiendo identificar aspectos asociados a la construcción del conocimiento matemático, las competencias y los procesos involucrados en el desarrollo de habilidades matemáticas frente al razonamiento y la argumentación.

a) Construcción del conocimiento matemático

Las estrategias que se aplican en el aula de clase pueden ser un apoyo fundamental para la construcción del conocimiento matemático o pueden ser un obstáculo para el mismo, esto depende de las formas de enseñar, la reflexión y planeación que se realice con respecto a la disciplina.

Dentro de las estrategias que cobra mayor relevancia se encuentra la resolución de situaciones problema, frente a esto los lineamientos curriculares en matemática (1998) propuestos por el MEN plantean que las situaciones problema son un ambiente propicio para el aprendizaje que pueden provenir de la vida diaria, de las matemáticas y de otras ciencias.

Luego la resolución de problemas es considerada fundamental en la construcción del conocimiento, pues requiere que el estudiante comprenda, analice, reflexione, plantee y aplique estrategias de solución, de esta manera es posible potenciar el razonamiento, la argumentación, y formas de pensamiento, por lo tanto, debe tenerse cuidado al momento de plantear problemas, estos deben presentar variedad y evitar diseñar situaciones de un solo tipo que terminen en una simple ejercitación procedimental donde se sigue un patrón a lo desarrollado en clase.

Aunque la resolución de problemas es una de las estrategias en la que mayor dificultad presentan los estudiantes, porque requiere de mayor esfuerzo en el desarrollo del pensamiento lógico, es necesario implementarla, porque la mejor forma de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas, superando así la enseñanza memorística y poco reflexiva que deriva en aprendizajes con poca profundización de conocimiento matemático.

Además, la resolución de problemas potencia la creatividad del estudiante, y permite la formación de personas más reflexivas y críticas que se puedan desenvolver en cualquier escenario donde requieran de conocimiento matemático. La aplicación de esta estrategia requiere que el estudiante haga uso de sus presaberes, del manejo y fortalecimiento de conceptos matemáticos que al ser vinculados con la realidad permitan una mayor apropiación del conocimiento.

Aun así, considerando la resolución de problemas como el eje central para la enseñanza y apropiación del conocimiento matemático, se encuentra que es común el desarrollo de actividades centradas en ejercicios, que aunque se apliquen y practiquen procedimientos matemáticos no se logra un aprendizaje significativo, porque el planteamiento de estos sin un contexto no permite ver la utilidad de la matemática, generando poco interés hacia la disciplina, de esta manera, en la medida que no se cambie y no se reflexione desde la planeación resultara más complejo ir reemplazando ese visión mecanicista de la matemática que ha afectado a lo largo del tiempo.

También es importante la aplicación de la lúdica en la disciplina, porque el manejo de materiales manipulativos favorece la comprensión del uso de la matemática y el desarrollo del pensamiento lógico, impactando así en la actitud y motivación del estudiante por el aprendizaje.

b) Las competencias matemáticas

El proceso de formación actual está centrado en el desarrollo de competencias, las cuales no se dan de manera espontánea sino que requiere que se generen ambientes propicios para que estas se desarrollen, para esto resulta esencial el planteamiento de situaciones problema, porque permite promover competencias matemáticas tales como la interpretación y representación, formulación y ejecución, razonamiento y argumentación, manejo del lenguaje, modelación, manejo de procedimientos, y la interacción con el contexto.

Se ha mencionado anteriormente que los estudiantes por lo general presentan dificultades en la resolución de situaciones problema, por ende, son evidenciables las dificultades en el desarrollo de competencias. De esta forma, una de las primeras dificultades que se encuentra es la comprensión e interpretación de enunciados matemáticos, porque a partir de esto es que se plantean posibles soluciones, entonces cuando es poco frecuente la aplicación de problemas en la enseñanza, resulta complejo superar estas dificultades.

Así mismo, la resolución de problemas posterior a la interpretación de enunciados requiere que se formule, ejecute, y modele la situación, para ello es necesario que el estudiante tenga claridad conceptual que le permita diseñar estrategias de solución, que además requieren el manejo de un lenguaje matemático (verbal, grafico, algebraico…) y si no existe claridad frente a contenidos matemáticos se presentan errores conceptuales y de lenguaje.

Frente a esto, la OCDE (2015), resalta con claridad, que, en la competencia matemática, la persona interpreta, plantea, procede, razona y argumenta en función de la resolución de un problema, y trata de involucrar dicho proceso dentro de la cotidianidad en la que está inmerso.

De esta manera se entiende que en la resolución de problemas se hace uso del razonamiento y la argumentación, requiriendo así desarrollar en los estudiantes de educación media un conjunto de habilidades para comunicarse matemáticamente tales como interpretación, representación, modelación, reconocimiento de conceptos, procedimientos, lenguaje matemático que permiten una mayor apropiación del conocimiento y desarrollo del pensamiento.

c) Procesos involucrados en el desarrollo de habilidades matemáticas frente al razonamiento y la argumentación.

El desarrollo de competencias matemáticas que se promueve a partir de estrategias como la resolución de problemas, vincula diferentes procesos de pensamiento dentro del razonamiento lógico, tales como la observación, intuición, imaginación y abstracción.

La observación es fundamental, pues requiere que el estudiante reconozca los contextos donde se desarrollan las situaciones problema, así mismo, a partir de este reconocimiento hace uso de la imaginación como base de la creatividad matemática, que le permite plantear posibles rutas de solución, para ello se requiere que realice una buena comprensión del problema y tenga un manejo de conceptos matemáticos necesarios para abordarlo. También requiere de la abstracción, que analice de manera aislada los datos necesarios del problema, y que los analice en conjunto, en relación con el contexto y los contenidos matemáticos esenciales para su solución.

Otro proceso fundamental es la intuición, que ha sido utiliza en el campo matemático, y entendida como una fuente de conocimiento evidente, directo o no inferencial, en muchos casos los matemáticos han utilizado el concepto de "idea intuitiva" que puede asemejarse al sentido común, para situaciones que se aceptan o conciben de manera inmediata.

Por otro lado, están los procesos cognitivos, donde se presentan operaciones como la inferencia, que, a diferencia de la intuición, se requiere del razonamiento para llegar a conclusiones a partir de premisas, las cuales se plantean en el análisis de problemas matemáticos.

Desde lo mencionado anteriormente, frente a la construcción del conocimiento matemático, las competencias y los procesos involucrados en el desarrollo de habilidades matemáticas frente al razonamiento y la argumentación, es fundamental en la planeación realizada tener presente los intereses de los estudiantes, pues se debe buscar generar mayor motivación en ellos frente al aprendizaje de la disciplina.

A lo largo del tiempo la matemática por su forma de enseñanza ha sido vista como un área sin sentido, de difícil comprensión que en muchas ocasiones genera miedo y desmotivación en los estudiantes por sus experiencias en el escenario educativo. Es por ello que debe replantearse el proceso de formación, pero desde los grados iniciales porque cuando llegan al último nivel de educación media ya se presenta una barrera que genera mayor dificultad para la enseñanza de esta ciencia.

Se ha mencionado que una estrategia que favorece la construcción del conocimiento matemático es precisamente la resolución de problemas, pero no se puede esperar a los grados superiores para empezar a aplicar dicha estrategia, debe ser fundamental su implementación desde la educación preescolar, la básica primaria, la básica secundaria y por ende la educación media. Pues la experiencia muestra que no genera un aprendizaje significativo una enseñanza centrada en lo memorístico, procedimental y bajo patrones de ejercicios o problemas de solución similar, dado que esto dificulta que el estudiante establezca una relación entre el saber matemático y su aplicación en el contexto.

Ahora bien, una forma de solventar esta dificultad, requiere de establecer una coherencia entre el deber ser y el hacer, ese deber ser que se plantea desde la organización micro-curricular donde se reflexionan las necesidades de la disciplina en función de fomentar competencias matemáticas en los estudiantes las cuales deben ir aumentando de nivel en la medida que se avanza en los grados y no un estancamiento de las mismas. Luego sino se solventa esta necesidad en la educación preescolar y la básica primaria las dificultades en la básica secundaria y media permanecerán pues aunque se generen escenarios que busquen promover procesos y competencias matemáticas su logro será complejo y en algunos casos poco posible, puesto que no se cuenta con las bases necesarias e inclusive ya se presentan obstáculos que influyen en la motivación y actitud de los estudiantes por el aprendizaje de este saber, siendo esto un factor más con el que se entra a trabajar en el proceso de planeación, buscando generar mayor motivación al área en grados superiores.

De esta manera, teniendo en cuenta las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, es fundamental la aplicación en todos los grados de situaciones problema, y esto debe iniciarse desde una reflexión en conjunto con todos los maestros que orientan el área, donde se compartan las experiencias significativas que se trabajan en aula, con el fin de fortalecerse como equipo de trabajo y enriquecer la práctica de aula buscando generar escenarios que promuevan el desarrollo de procesos y competencias matemáticas.

Estas reflexiones permiten desde el reconocimiento del contexto de trabajo proyectar actividades en conjunto que respondan a las necesidades de los estudiantes y a una reconstrucción armoniosa del currículo matemático, entendiendo que las situaciones problema son fundamentales para que el estudiante comprenda para que sirve la matemática, como la puede aplicar en la misma matemática y en otras áreas, desarrolle su creatividad al momento de buscar soluciones a un problema, fortaleciendo así la interpretación, representación, modelación, razonamiento, lenguaje matemático y argumentación que son competencias esenciales que debe desarrollar el estudiante, pero que se logra si el entiende la utilidad de lo que está aprendiendo.

3. RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS

A partir de las interpretaciones de las concepciones del maestro y posteriormente las del estudiante, se establece la importancia de la triada conocimiento-contexto-resolución de problemas, además se establece la relación de razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos.

a) Vinculación conocimiento-contexto-resolución de problemas con el razonamiento y argumentación.

Esta triada que permite establecer relación entre conocimiento, contexto y resolución de problemas, resulta esencial en la enseñanza de la matemática, porque permite promover el razonamiento y la argumentación. Anteriormente se mencionó la resolución de problemas matemáticos como una estrategia fundamental que facilita la construcción del conocimiento, y dichos problemas deben ser contextualizados, es decir relacionados con la realidad del estudiante, buscando así establecer una estrecha relación entre el conocimiento y la realidad, porque de esta manera se promueve el aprendizaje significativo buscando que los conocimientos que se van adquiriendo sean a largo plazo.

Luego, bajo esta relación se considera pertinente la planeación curricular, pues se tiene en cuenta la resolución de problemas, el conocimiento y el contexto, esto permite que se desarrollen competencias matemáticas, se promuevan procesos de razonamiento y argumentación, lo que requiere de la reflexión, planteamiento y aplicación de estrategias que permitan responder a una formación matemática actual, desde una visión que vaya más allá de lo tradicional.

Es decir que la enseñanza de la matemática debe centrarse en un enfoque de resolución de problemas, porque permite desarrollar las habilidades del pensamiento, permitiendo la relación del conocimiento que se adquiere en el contexto educativo con la cotidianidad, formando ciudadanos críticos y reflexivos, que son capaces de manejar el saber disciplinar y lo aplican en la vida cotidiana.

b) Razonamiento y argumentación en problemas trigonométricos.

Se concibe que la resolución de problemas trigonométricos permite promover el razonamiento y la argumentación, pues frente a una situación problema en este campo, se parte de la interpretación y comprensión del mismo, donde se plantean premisas que requieren del uso de contenido matemático para que sean consideradas como válidas, y a partir de esto se genera una cadena de argumentos donde se hace visible el uso del lenguaje matemático que finalmente lleva a una conclusión.

La importancia de promover estos procesos a partir de la resolución de problemas resulta coherente con lo planteado por Duval (1999b), quien hace referencia a que la producción de argumentos se realiza desde un trabajo sobre casos particulares, donde se desarrolla una serie de operaciones sucesivas que ponen en funcionamiento un sistema semiótico, luego se considera la estrategia de resolución de problemas como aquella que promueve el desarrollo de la argumentación en el aula y sobre la cual se evidencian razonamientos matemáticos que permiten la creación de argumentos.

Entonces, esta estrategia permite crear escenarios propicios para el aprendizaje, donde se deben plantear problemas de la vida cotidiana, de otras disciplinas o de la misma matemática, a partir de esta estrategia se promueve el razonamiento que de acuerdo a lo planteado puede ser inductivo o deductivo, donde se evidencian la inferencia como una operación cognitiva que permite establecer la relación entre el conocimiento y el contexto.

Esta relación entre el conocimiento y el contexto, al momento de resolver situaciones problema se representa desde la elaboración de una cadena de argumentos (premisas/término medio/conclusión), que permite justificar y explicar mediante procedimientos y uso de conceptos, el planteamiento que se realiza para llegar a la conclusión, emergiendo en este proceso el uso del lenguaje matemático.

El lenguaje matemático resulta fundamental en el razonamiento y la argumentación, pues a partir de él es que se representa la información, entendiendo así que la disciplina matemática tiene un lenguaje propio que debe trabajarse en el aula, porque las debilidades que se presenten en el manejo del lenguaje generan errores a nivel de construcciones matemáticas para representar conceptos, modelar y argumentar.

No se debe evitar ni manejar con poca frecuencia en la enseñanza de la matemática el lenguaje, este debe trabajarse constantemente, donde en la medida que el estudiante reconoce los conceptos pueda establecer relación con la simbología que lo representa. Así, frente al lenguaje matemático el estudiante debe reconocer los diferentes registros de representación, en lenguaje natural, gráfico y algebraico, y realizar transformaciones pudiendo pasar de una representación a otra.

Estas apreciaciones requieren de una visión de la matemática actual, que rompa barreras del miedo al aprendizaje de esta disciplina, desde verdaderas reformas en la planeación de acuerdo a las necesidades que cada contexto, que sean aplicadas, donde se diseñen estrategias enfocadas en la resolución de problemas que sean contextualizadas y permitan un aprendizaje significativo, impactando en la motivación y la actitud del estudiante, para que su participación en el aula sea activa frente a la construcción del conocimiento matemático y se puede favorecer el desarrollo de pensamiento y de las competencias.

Teniendo en cuenta la importancia de la triada conocimiento-contexto-resolución de problemas y su relación con el razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos, es fundamental reconocer que las situaciones problema son una estrategia que permite desarrollar procesos y competencias, pero estas deben pensarse de acuerdo al escenario en el cual se encuentra el estudiante.

Esto quiere decir, que hablar de situaciones problema requiere de pensar en planteamientos que realmente permitan una vinculación del conocimiento con la realidad del estudiante, para promover la construcción del saber desde actividades realmente significativas. Luego debe tenerse cuidado en el manejo de la estrategia, de evitar caer en errores comunes de aplicación de problemas que, aunque tiene una ubicación de contexto este no es acorde a situaciones actuales o a la vivencia del estudiante.

De esta manera, debe cuestionarse lo que se entiende por contextualización del saber, porque no es simplemente llevar al aula situaciones ya elaboradas sino ajustarlas al escenario de trabajo con el fin de fortalecer aprendizajes significativos, donde el estudiante establezca claramente la relación entre el conocimiento y la realidad, para de esta manera desarrollar o potenciar el razonamiento y la argumentación en el aula.

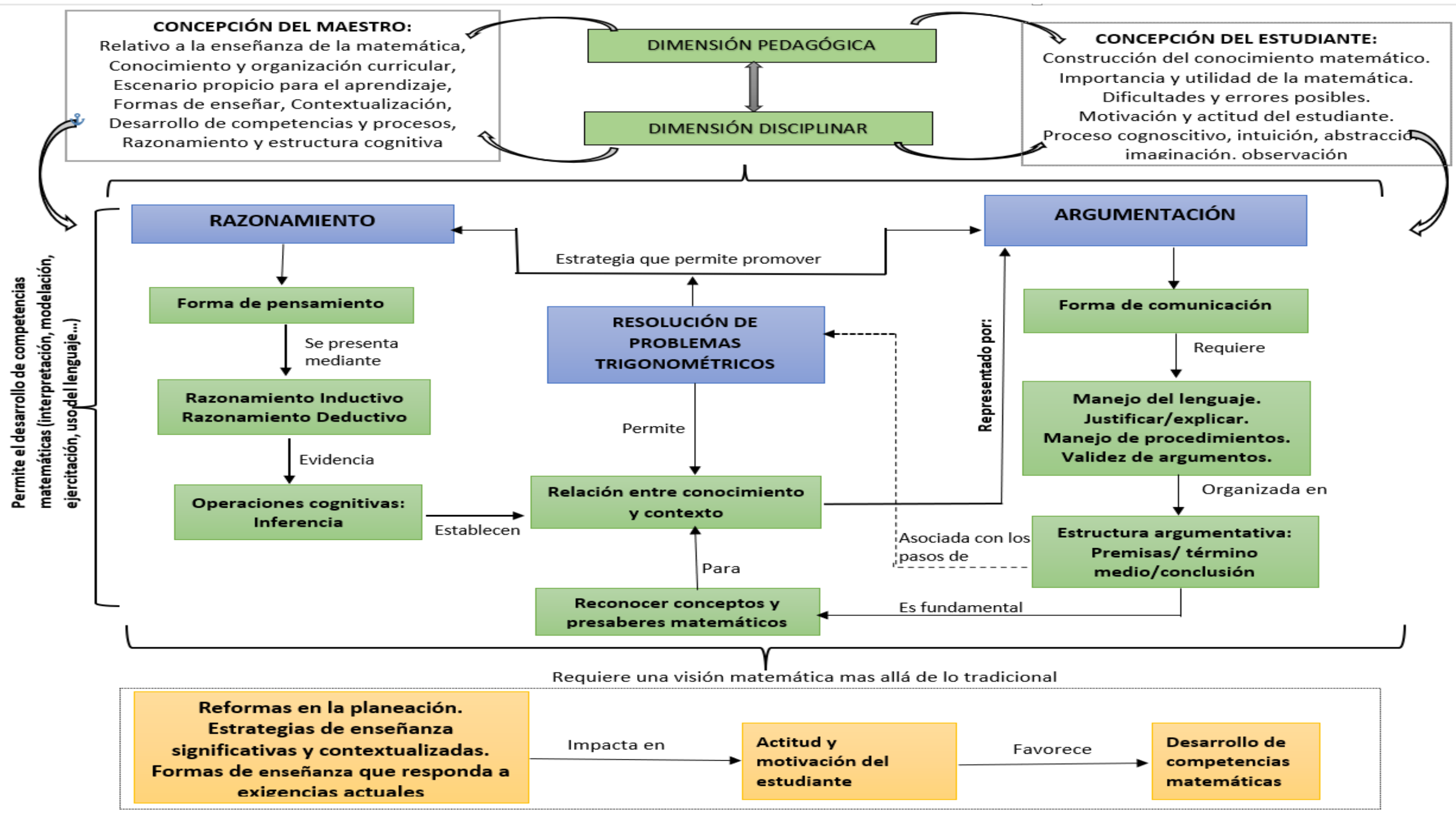
Entonces es importante que, aunque se habla de contextualización esto es algo que debe reflexionarse desde la práctica del maestro, en el caso de los problemas trigonométricos, estos tienen mucha aplicación en la realidad desde la matemática y en otras ciencias, luego cuando el estudiante es capaz de aplicar este conocimiento y reconocer que es útil en su vida diaria desde experiencias propias, se trasciende de lo tradicional y se logra una mayor apropiación del saber.

Además, al establecer una mayor relación entre conocimiento y realidad, se fortalecen las estructuras cognitivas, pues al estudiante se le facilita ir vinculando la nueva información con sus presaberes, va fortaleciendo sus concepciones en el área y por ende el mismo lenguaje matemático, en el cual generalmente se presenta en la actualidad mucha dificultad que está asociada a errores conceptuales porque el estudiante no ha logrado apropiar el saber, además que cuando se trabaja resolución de problemas el discente se ve en la necesidad de transformar la información dada en diferentes registros semióticos.

Cuando se manejan ejercicios se vuelve rutinario el uso del lenguaje porque se centra en una serie de pasos procedimentales con objetos matemáticos a los que el estudiante difícilmente puede darles un sentido, mientras que desde la resolución de problemas, cada premisa que se construye permite que el estudiante pase de un registro de representación a otro, inicialmente desde la interpretación que hace de los enunciados, que lleva al estudiante a pasar de un lenguaje común a un lenguaje simbólico que es la forma de comunicación de esta ciencia, pero para ello requiere un reconocimiento conceptual.

De esta manera, se reitera que no debe esperarse para empezar el manejo del lenguaje de la disciplina en grados superiores, esto debe hacerse desde la educación inicial, para que el estudiante vaya reconociendo la simbología matemática desde cada uno de los conceptos que vaya abordando, pero para esto ser requiere que esos conceptos sean trabajados de manera significativa. Además, el trabajo del lenguaje debe ser algo constante y común del trabajo en el aula.

En la siguiente imagen se pude apreciar las relaciones que se establecen en los tres constructos descritos anteriormente:



Grafica 16. Relación de concepción del maestro, concepción del estudiante, razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos.

Conclusiones

Frente al desarrollo de la investigación y en coherencia con los objetivos planteados, se encuentra que es necesario tener presente en la enseñanza formas de promover el razonamiento matemático, pues es una capacidad asociada al pensamiento que contribuye al aprendizaje de las matemáticas, pero se requiere del manejo de conceptos claros, de la contextualización de la disciplina, del reconocimiento de la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y en otros escenarios, aspectos generales que se pueden centrar en la estrategia de resolución de problemas.

En el caso del presente estudio, se menciona la resolución de problemas trigonométricos, pues estos tienen gran relación con la cotidianidad, su desarrollo integra el razonamiento inductivo o deductivo, y en su solución está inmerso el uso del lenguaje, manejo de conceptos, procedimientos matemáticos, que permiten generar la argumentación con el fin de llegar a una solución.

Ahora, en el desarrollo del proceso de argumentación matemática, se circunscribieron diferentes problemas que de alguna manera afectan la formación de cadenas de argumentos en los estudiantes; dichos problemas vienen dados a nivel general por: la no comprensión y desarrollo de un proceso de sentido y significación coherente con la situación problema, llevando esto a concluir en errores conceptuales, un uso no apropiado de los registros semióticos para la construcción de premisas y/o proposiciones matemáticas y la no fundamentación de un *cuerpo bien definido* de teorías que le permita una adecuada apropiación epistémica en el campo de la matemática.

De esta manera debe considerarse en la planeación del docente estrategias centradas en desarrollar el razonamiento y la argumentación, donde se propone la resolución de problemas, pero debe tener presente que estos deben ser contextualizados, deben responder a la realidad del estudiante, debe buscarse el desarrollo de procesos y competencias que le permitan al estudiante ser matemáticamente competente y responder a las exigencias actuales de formación.

Debe dejarse de lado el currículo tradicional que a nivel histórico ha estado presente en la enseñanza de la matemática, el cual no genera motivación al estudiante que no entiende la utilidad de la matemática cuando se centra solo en el trabajo de ejercicios rutinarios que no le permite el desarrollo cognoscitivo, aunque los docentes manifiestan que el estudiante prefiere este tipo de ejercicios porque no tienen complejidad en su desarrollo, debe transformarse la visión de formación y ampliar la mirada desde la estructuración de estrategias centrada en la resolución de problemas.

La resolución de problemas también resulta ser un planteamiento que inclusive forma parte de la organización de formación a nivel nacional, desde los lineamientos curriculares en matemática (1997) y los estándares básicos en matemática (2006) que guardan coherencia con el marco de referencia de las pruebas PISA, luego a nivel nacional e internacional se ve marcada esta coherencia que debe reflexionarse desde el escenario de aula, dadas las dificultades que son evidentes en la enseñanza y aprendizaje del área.

Esto teniendo en cuenta que una de las mayores preocupaciones a nivel nacional e internacional centrado en los resultados de pruebas, no evidencian buenos desempeños en el área de matemática, al igual que a nivel institucional, por ende, esta investigación muestra aspectos fundamentales en los que se presentan dificultades y sobre los cuales se debe fortalecer. Es así como desde los constructos se da un aporte que permita abordar dichas dificultades, donde se tiene en cuenta una estrategia fundamental como lo es la resolución de problemas trigonométricos contextualizados, buscando así establecer la relación entre el conocimiento y el contexto para que el estudiante comprenda la importancia y utilidad de la matemática en su cotidianidad.

De esta manera, se deja como reflexión y orientación la forma de abordar la enseñanza de la matemática, con la intención de superar la enseñanza tradicional, buscando generar aprendizajes significativos que permitan fortalecer la estructura cognitiva del estudiante y por ende desarrollar procesos y competencias matemáticas.

Así mismo, en contraste con el marco referencial, se encuentra coherencia con otros estudios que muestran que el razonamiento y la argumentación presentan grandes dificultades, y que es fundamental el desarrollo del pensamiento matemático, y de procesos y competencias, que desde este estudio, se encuentra gran relación de la competencia de interpretación, comunicación, uso el lenguaje, manejo de procedimientos, resolución de problemas con el razonamiento y la argumentación, porque se hacen evidentes en el momento que se da el desarrollo de situaciones problema contextualizadas.

Por ello se da claridad en los constructos sobre la forma de abordar dicha problemática con el fin de poder aportar a la transformación del escenario de aula, donde es el docente quien debe reflexionar los procesos que se desarrollan en los momentos pedagógicos con el fin de lograr superar las barreras que durante el tiempo se han presentado sobre la enseñanza de la matemática, y para ello se plantean estrategias que permitan desarrollar mejor actitud y motivación en el estudiante.

Recomendaciones

De acuerdo a los resultados del proceso investigativo resulta fundamental realizar reflexión a nivel institucional sobre el proceso de enseñanza de la matemática en todos los niveles de educación, desde la primaria hasta la educación media, así mismo desde el contraste con otros estudios frente a los resultados se considera pertinente que cada institución educativa debe estar en constante revisión y autoevaluación de sus prácticas de aula, buscando responder a una enseñanza contextualizada acorde a cada escenario y bajo la fundamentación en la resolución de problemas.

También es pertinente desde los resultados del estudio, continuar investigando en el campo de la educación matemática, con el fin de fortalecer el proceso formativo dadas las dificultades que siempre se presentan con la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, y aplicando dichos resultados en el aula.

Las pruebas estandarizadas muestran bajos niveles en el área, este puede ser un punto de partida para que las instituciones inicien su proceso de reflexión desde el desarrollo de competencias matemáticas que se debe alcanzar y se incursione en procesos investigativos que permitan ampliar la mirada y dar aportes significativos para la enseñanza de esta área.

REFERENCIAS

Alcívar, A. M. U., & Concha, A. C. (2017). Programa de estrategias didácticas cognitivas para el desarrollo del razonamiento matemático. Una experiencia con estudiantes de bachillerato. Revista Boletín Redipe, 6(4), 99-111.

Algarín, D., & Fiallo, J. E. (2013). Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Andrade, C. A. A., Alcívar, Y. G., Palma, L. M., & Ampuero, S. N. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales, 5(2), 62-69.

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L., & Gómez, P. (2014). Razones trigonométricas.

Arias, F. G. (2019). Actividad Física y Ciencias (Vol. 10). FIDIAS G. ARIAS ODÓN.

Ausubel, D. (1968): Educational Psychology. Acognitive viuw. Holt, Rinehart and Wilson. New York

Azuaje, L., & González, M. (2018). Reflexiones sobre la epistemología, axiología y ontología de la investigación docente. Cieg, revista arbitrada del centro de investigación y estudios gerenciales, 251-259.

Barrón Tirado, M. C. (2015). Concepciones epistemológicas y práctica docente: una revisión. Red U: revista de docencia universitaria.

Bernardino Suárez, D., & Cercado Zumba, S. (2010). Importancia del razonamiento lógico-matemático para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas (Bachelor's thesis, Universidad de Guayaquil. Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación).

Bisquerra, R. (2003). Orientación, Tutoría y Educación Emocional. Chile: Ediciones Corporación Social Chilena

Blumer, H. (1982). El interaccionismo simbólico. Barcelona: Hora.

Borwein, J.M. (2009). Digitally-assisted discorvery and proof, University of Newcastle, Australia and Dalhousie University, Canada.

Breuker, J. (1999). Ontología del Conocimiento Educativo. IOS Press, Amsterdam. Amsterdam: IOS Press.

Bunge, M. (2001). Diccionario de filosofía. México: Editorial Siglo XXI Editores. Primera edición.

Chico. (2015). Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas

Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994].

Constitución política de Colombia [Const.] (1991), Artículo 67.

Crespo, C. (2013). Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología (Doctoral dissertation).

Dewey, J. (1938) "El patrón de la investigación", en Dewey, J. (2000) La miseria de la epistemología. Ensayos de pragmatismo, trad. y ed. Faerna, A. Madrid: Biblioteca Nueva.

De la Fuente Pérez, J. A. (2016). Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor. Universitat Autònoma de Barcelona.

Devia Miranda, C., & Campo Peña, E. (2013). Desarrollo de la competencia de razonamiento y argumentación en estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria.

Duval, R. (1999a). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva. México : Iberoamérica.

Duval, R. (1999b). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143-168.

Flotts, M. P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejías, N., & Abarzúa, A. (2016). Aportes para la enseñanza de la matemática.

Gámez, C. J. (2017). Aprendizaje de la demostración matemática en estudiantes de introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio. Dialéctica, 13(2), 1-24. Acceso: 27/01/2022. Disponible en: http://revistas.upel.edu.ve/index.php/dialectica/article/view/6462/3675

Gómez Moreno, F. (2019). El desarrollo de competencias matemáticas en la institución educativa pedro Vicente Abadía de Guacarí, Colombia. Revista Universidad y Sociedad, 11(1), 162-171.

González Merino, A.(2019). Panorama de la Educación 2019. Indicadores de la OCDE. Informe español. Versión preliminar. Ministerio de Educación.

Goizueta, M. (2015). Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas. TESEO.

Guber, R. (2001). La etnografía: método, campo y reflexividad. *Colombia: Grupo Editorial Norma*.

Guerrero, Y. A., & Vega, N. P. (2016). Estudio de dificultades y errores en la resolución de triángulos utilizando teorema del seno y el coseno.

ICFES. (2019). Marco de referencia de matemática.

Informe institucional del área de matemática. (2020). Colegio San José.

Informe institucional del área de matemática. (2021). Colegio San José.

León, O., & Calderón, D. (2003). Argumentar y validar en matemáticas: ¿una relación necesaria?. Hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas. Universidad del Valle. Bogotá: COLCIENCIAS .

Lever, C. O., & López, K. D. (2020). El logro de los aprendizajes en matemáticas en PISA, ENLACE y PLANEA en adolescentes mexicanos: an análisis retrospectivo. Archivos Analíticos de Políticas Educativas= Education Policy Analysis Archives, 28(1), 17.

Lincoln, Y.S. & Guba, E.G. (1985). Naturalistic Inquiry, London, Sage.

Lozada, N. R. G. (2016). Errores en el entendimiento y uso del lenguaje matemático, en estudiantes de ingeniería. University of Puerto Rico, Rio Piedras (Puerto Rico).

Marín González, F., Castillo Nieto, J., Torregroza Mendoza, Y., & Peña Arrieta, C. (2018). Competencia argumentativa matemática en sexto grado. Una propuesta centrada en los recursos educativos digitales abiertos. Revista de pedagogía, 39(104).

Martínez, M. (2006). Metodología de la Investigación cualitativa**.** Editorial Trillas. México

Mead, G.H. (1982 [1934]). Espíritu, persona y sociedad: desde el punto de vista del conductismo social. Barcelona: Paidos

Mejía, G. A., Aldana, J. A., & Ruiz Hernández, R. E. (2017). Estrategias que permitan mejorar la participación activa durante el proceso de aprendizaje en estudiantes de Formación Docente de la Escuela Normal José Martí de Matagalpa (Doctoral dissertation, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua).

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá .

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias.

OCDE. (2015). El Programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve. París.

OCDE (2018). Marco de referencia a nivel internacional de pruebas PISA

Olave, M. (2013). Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva (Doctoral dissertation).

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2017). Mas de la mitad de los niños y adoslescentes en el mundo no está aprendiendo (Fihca informativa No 46). UIS/FS/2017/ED/46. Recuperado de http://uis.unesco.org/sites/default/files/documents/fs46-more-than-half-children-not-learning-2017-sp.pdf

Ortega, J. F., & Ortega, J. A. (2001). Matemáticas:¿ Un problema de lenguaje. Actas IX Jornadas de ASEPUMA. Recuperado de http://150.214, 55.

Ortega, F. J. R., Márquez, C., Badillo, E., & Rodríguez, J. M. R. (2018). Desarrollo de la mirada profesional sobre la argumentación científica en el aula de secundaria. Revista complutense de educación, 29(2), 559.

Ortiz, M. S. M. C.(2019). La enseñanza didáctica de las matemáticas y la estadística para desarrollar el pensamiento científico. 1. Las competencias blandas como complemento de las competencias duras en la formación escolar.

Pacheco Ochoa, S., & Pacheco Aparicio, W. (2021). Resolución de problemas y su relación con el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria (Master's thesis, Corporación Universidad de la Costa).

Perelman, C., & Tyteca, L. (1958). Tratado de la argumentación. Madrid: Gredos.

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2016). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. Revistas de investigación, 35(73).

Piaget, J. (1981): Psicología y Pedagogía. Editorial Ariel, Barcelona

Pierce, C. (1974). La ciencia de la semiótica. Colección de semiología y epistemología. Buenos Aires: Nueva Visión.

Polya, G. (1945). How to salve it. Princeston: Princelon Universiti Press.

Presidencia de la república. (3 de agostro de 1994) Decreto de Educación. [Decreto 1860 de 1994].

Radillo, M., Nesterova, E., Ulloa, R., & Pantoja, R. (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa. Universidad de Guadalajara, México.

Razo, A. E. (2018). La Reforma Integral de la Educación Media Superior en el aula: política, evidencia y propuestas. Perfiles educativos, 40(159), 90-106.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Ruiz, R. A. T., Villa, M. G. O., Torres, D. L. R., & Berbén, A. B. G. (2018). Las competencias argumentativas en la formación universitaria. INNOVA Research Journal, 3(1), 30-41.

Salazar-Torres, J. P., Contreras-Santander, Y. L., & Jaimes-Mora, S. S. (2016). Semiótica: Un recurso fundamental en los procesos de argumentación matemática escrita. ECOMATEMATICO, 7(1), 20-32.

Salazar-Torres, J., Vera, M., Contreras, Y., Gelvez-Almeida, E., Valbuena, O., Barrera, D., & Rincon, O. (2019, noviembre). La argumentación matemática en el aula. En Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1408, No. 1 (2019), pp. 1-7). Journal of Physics: Conference Series.

Sánchez, L., Nieto, U., & Berrío, J. (2018). Niveles de razonamiento de los estudiantes de décimo grado basado en la caracterización por descriptores de las razones trigonométricas.

Santander, Y. L. C., Torres, J. P. S., & Mora, S. S. J. (2017). Posición epistémica y discursiva de la trama argumentativa en la resolución de problemas matemáticos. En Gómez Vahos, J., Aguilar Barreto, A. J., Jaimes Mora, S. S., Ramírez Martínez, C., Salazar Torres, J. P., Contreras Velásquez, J. C., & Espinosa Castro, J. F. (2017). Prácticas pedagógicas.

Shoenfeld, A. (1989). Mathematical problema solving. New York: Academic press.

Strauss, A., & Corbin, J. (2016). Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Universidad de Antioquia.

Taylor, S. & Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. España: Ediciones paidos ibera S.A.

Toulmin, S. (1958). Los usos de la argumentación. Barcelona, España: Ediciones Península

Vasco, E., Saénz, A., Martinez, M., Gómez, A., León, O., Calderón, I., & Athanasopoulou, A. (2007). Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas. Bogotá: Universidad Distrital francisco José de Caldas.

Vásquez Sierra, C. M. (2020). Diseño de un proyecto de aula que contribuya al desarrollo del pensamiento matemático desde la teoría de la argumentación.

Villalonga Pons, J. M. (2017). La competencia matemática: caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria.

Zubieta Lagos, J. K. (2018). Tipificación de errores y dificultades en el desarrollo de las funciones trigonométricas de estudiantes de grado décimo.

ANEXOS

A. Entrevista aplicada a docentes

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR

Doctorado en Educación

Instrumento: Entrevista

Objetivo: Diagnosticar los procesos implícitos en el razonamiento y la argumentación matemática.

Entrevista aplicada a: Docentes de matemática de la Institución Educativa Colegio San José.

Observación: La siguiente entrevista busca aportar al proceso investigativo "constructos teóricos sobre el Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media". Para lo cual se le agradece su sinceridad en cada una de sus respuestas a las preguntas formuladas en esta entrevista; así mismo, este proyecto garantiza el anonimato (definido como la imposibilidad de identificar quien ha contestado la entrevista) y la confidencialidad (definida como el hecho de que la persona que realiza la investigación, puede saber quién ha contestado la entrevista, pero se garantiza que esta información no se divulgará públicamente por ningún medio).

1. ¿Cuáles elementos considera importantes para la enseñanza de la matemática dentro del aula de clase y su contextualización?

2. Desde su experiencia como Docente, ¿Cómo conceptualiza el razonamiento y la argumentación matemática?

3. ¿Cuáles estrategias utiliza en el aula de clase para fortalecer el razonamiento matemático en su abordaje para enseñanza de la matemática en presencialidad y como se realizó en tiempos de pandemia?

4. ¿Cuáles competencias deben desarrollar los estudiantes para fortalecer los procesos de razonamiento y argumentación en el área de matemáticas?

5. ¿De qué manera relaciona en su praxis áulica la tríada: conocimientos matemáticos-contexto del estudiante-resolución de problemas para propiciar un impacto significativo en la argumentación matemática?.

6. ¿Qué elementos y procesos enmarcados en la enseñanza deben tenerse en cuenta para el desarrollo del razonamiento matemático?

7. Desde su práctica docente ¿Qué tipos de razonamiento matemático evidencia en el aula cuando trabaja con sus estudiantes? (ejemplifique desde algunas situaciones)

8. Considerando su experiencia formativa, ¿Por qué es necesario desarrollar la argumentación matemática con el razonamiento lógico dentro del aula?

9. ¿Cómo promovería usted el desarrollo del razonamiento matemático de la mano con la argumentación matemática en contextos apropiados para el estudiante?

10. ¿Considera que a través de la resolución de problemas trigonométricos el estudiante pueda fortalecer el razonamiento y la argumentación matemática?

11. Desde la resolución de problemas trigonométricos ¿Qué aspectos forman parte de un registro semiótico (registros que entrelazan el lenguaje natural con el abstracto, lo gráfico y lo algebraico) con los procesos de razonamiento y argumentación?

12. ¿Cuáles fortalezas y debilidades se evidencian en los estudiantes ante el razonamiento y la argumentación matemática frente a la resolución de problemas trigonométricos?

13. ¿Cómo valora la pertinencia de la argumentación y el razonamiento matemático en función al desarrollo del lenguaje matemático y la resolución de problemas trigonométricos contextualizados dentro del aula de clase?

B. Entrevista aplicada a estudiantes

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR

Doctorado en Educación

Instrumento: Entrevista
Objetivo: Diagnosticar los procesos implícitos en el razonamiento y la argumentación matemática.
Entrevista aplicada a: Estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Colegio San José.

Estudiante: ____

1. ¿Qué significado tiene para Usted la matemática y su uso en la vida cotidiana?

2. ¿Qué entiende por razonamiento matemático?, ¿De qué manera lo aplica en las situaciones problemas o actividades desarrolladas en las clases de matemática?

3. ¿Qué entiende por pensamiento lógico?

4. ¿Usted logra crear imágenes mentales que le faciliten comprender los conceptos, ejemplos, problemas o actividades que desarrolla en la clase de matemática?

5. ¿Qué significa para Usted argumentar en matemática?

6. ¿Qué entiende por un problema matemático?

7. ¿De qué manera se desarrollan las clases de matemática dentro del aula?, ¿Qué estrategias utiliza el docente?, puede mencionar ejemplos.

8. ¿De qué manera se puede aplicar la trigonometría en la vida cotidiana?, puede mencionar un ejemplo.

9. ¿Qué facilidad tiene para el manejo de la simbología matemática cuando resuelve ejercicios y problemas relacionados con trigonometría

Considere la siguiente situación:

1. Dos estudiantes se encuentran separados 50 metros, ven una cometa volando situada entre ellos dos bajo ángulos de 65° y 78°, ¿a qué distancia se

encuentra cada estudiante de la cometa? ¿a qué altura se encuentra la cometa?

De acuerdo a la situación, realice la representación gráfica de la misma	
¿Qué figura se observa en la representación gráfica?, que características tiene esa figura.	
¿identifica los conceptos de trigonometría que necesita para abordar este problema? descríbalos.	
¿Reconoce la simbología matemática necesaria que le permite representar esta situación?	
Teniendo en cuenta los datos del problema, como plantea identificar la distancia de cada estudiante a la cometa ¿de qué manera se puede iniciar?	
¿Por qué ése planteamiento tiene sentido para usted? justifique.	

¿Cree que pueda plantearse de otra manera?, justifique.	
De acuerdo a lo que planteó, Realice el proceso o los procedimientos matemáticos necesarios	
Su conclusión sobre la pregunta: ¿A qué distancia se encuentra cada estudiante de la cometa?	
¿Cómo puede comprobar que la conclusión es correcta ?	
Ahora, para determinar la altura a la que se encuentra la cometa, ¿Qué plantea para iniciar su solución?	
¿Cuál sería el proceso o los procedimientos matemáticos necesarios?	

Cuál sería la conclusión para la pregunta, ¿A qué altura se encuentra la cometa?	
¿Cómo puedes comprobar que la conclusión es cierta?	
¿Qué razonamiento matemático aplicó para el desarrollo de esta situación?	

C. Acta de validación de instrumento

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGOGICO "GERVASIO RUBIO"

ACTA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

El Dr. Zabdiel Rodríguez Ibarra, Doctor en Educación, docente de la Universidad UDES, en calidad de experto disciplinar y el Dr. Roberto Carlos Ontiveros, como tutor del proyecto investigativo que lleva por título: "constructos teóricos sobre el razonamiento y argumentación en la resolución de problemas trigonométricos en educación media", de la estudiante Yudith Liliana Contreras Santander, de la Universidad Pedagógica experimental libertador UPEL, del Programa de Doctorado en educación. Se permiten dejar constancia que, una vez Evaluados y corregidos los instrumentos, éstos son pertinentes, válidos y suficientes para recolectar la información requerida en el desarrollo de los objetivos investigativos.

Se validan como instrumentos de este proyecto:

1. Guion de entrevista a docentes
2. Guion de entrevista a estudiantes

En constancia se firma a los 10 días del mes de febrero de 2022

Zabdiel Rodriguez

Dr. Zabdiel Rodríguez Ibarra
Experto disciplinar

Dr. Roberto Carlos Ontiveros
Tutor